

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

89. Band, Heft 2

16. Oktober 1961

S. 241-480

Geschichte.

Sayili, Aydin: Thābit ibn Qurra's generalization of the Pythagorean theorem. *Isis* 51, 35—37 (1960).

Ein Brief Thābit ibn Qurra in einer Istanbuler Handschrift (eine andere Kopie ist in Kairo) befaßt sich mit dem Satz des Pythagoras. Nach zwei auch sonst bekannten Beweisen beim rechtwinkligen Dreieck verallgemeinert Thābit ibn Qurra das Problem auf beliebige Dreiecke in einer von der gewöhnlichen verschiedenen, interessanten Formulierung, sowie auf ähnliche Vielecke, die auf den Seiten des beliebigen Dreiecks errichtet sind.

K. Vogel.

Hofmann, Joseph E.: Zur Geschichte des sogenannten Sechsqadratproblems. *Math. Nachr.* 18, H. L. Schmid-Gedächtnisband, 152—167 (1958).

Das von Euler (Anleitung zur Algebra II, 2, § 235/36) behandelte Sechsqadratproblem, welches in der Bestimmung von drei verschiedenen ganzen positiven und zu dritt teilerfremden Zahlen u, v, w besteht, deren Summe und Differenz je zu zweit ein volles Quadrat ergibt, geht auf J. Ozanam zurück, dessen Lösung im „Dictionaire mathématique“ 1691 publiziert wurde. Wie aus dessen Brief vom März 1673 an Leibniz hervorgeht, muß jener es aber schon vor 1673 aufgeworfen haben. Leibniz kam mit dem Problem nicht zu Rande, berichtete aber am 16. X. 1674 an Oldenburg über die Polemik Ozanams mit Mengoli, der es für unlösbar hielt. Leibnizens Hinweise scheinen aber bei den Engländern kein Interesse gefunden zu haben. Gregory hat sich 1675 mit dem Problem befaßt; er war aber von J. Frazer, der sich damals in Paris befand, darauf aufmerksam gemacht worden. Der Lösungsansatz von Gregory stimmt mit dem von Ozanam überein, dieser zitierte aber 1691 weder die Lösung von Gregory noch die von Rolle. Das Problem wurde 1749 erneut von Landen in „Ladies Diary“ gestellt; die Lösungen von Landen, Bumpkin und Wildbore erschienen dort 1750. Ob Euler diese kannte, ist zweifelhaft; die erste von Ozanam scheint er wahrscheinlich nicht gekannt zu haben. Nach seiner systematischen Lösung von 1770 hat Euler 1780 noch eine einfachere gefunden (E 753 postum), welche einen Gedanken benutzt, den Leybourn 1814 „vorher“ aussprach. Verf. macht auf die noch versteckten anderen elementaren Lösungsgruppen aufmerksam, die nicht auf systematischem Wege, sondern durch Probieren an Hand von Tabellen gefunden werden können.

J. Fleckenstein.

• Caravelli, Vito: Le traité des hosoèdres. Traduit sur le texte latin original avec des notes par Paul Ver Eecke. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard 1959. 24 p. NF 3,50.

Es handelt sich um den Wiederdruck aus *Mathesis* 49, 59—82 (1935). Einleitend entwirft der Übersetzer ein lebendiges Bild von der umfangreichen unterrichtlichen und auch wissenschaftlichen Tätigkeit des sonst kaum beachteten Neapolitaners V. Caravelli (1724—1800). Die hier vorliegende Übersetzung bezieht sich auf den selbständigen Anhang zu einer Archimedes-Paraphrase (Neapel 1751). Es geht um Körper, die durch Verschieben ein- und umbeschriebener regelmäßiger Vielecke eines Kreises längs halbkreisförmiger bzw. halbellipsenförmiger Kontur senkrecht zum erzeugenden Kreis entstehen. Sie zeigen starke Verwandtschaft mit den Eigenschaften von Kugel und Drehellipsoid.

J. E. Hofmann.

Yajima, S.: Théorie nébulaire de Shizuki (1760—1806). *Arch. internat. Histoire Sci.* 12, 169—173 (1960).

Rychlík, Karel: *Theorie der reellen Zahlen in Bolzano's handschriftlichem Nachlasse.* Czechosl. math. J. 7 (82), 553—567, russ. Zusammenfassung 567 (1957).

Die vorliegende Handschrift Bolzanos stammt ungefähr aus den Jahren 1830—1834. Als einen unendlichen Zahlenausdruck bezeichnet Bolzano einen Ausdruck, in dem unendlich viele rationale Operationen vorkommen, die auf wirkliche, d. h. natürliche Zahlen angewandt werden. Er macht keinen Unterschied zwischen dem zeitlichen Prozeß und dem schließlich erreichten Resultat. Zum Beispiel sind für ihn $1 + 2 + 3 + \dots$ und $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ in inf. Zahlenausdrücke. Unter den Zahlenausdrücken befinden sich auch solche S , bei denen man zu einer positiven ganzen Zahl q eine ganze Zahl p bestimmen kann derart, daß $S = p/q + P_1$, $S = (p + 1)/q - P_2$ gilt, wo P_1 und P_2 unendliche Zahlenausdrücke bezeichnen, wobei P_1 nicht negativ und P_2 positiv ist. Wenn diese Gleichungen für jeden beliebigen Wert von q gelten, wenn p geeignet gewählt wird, dann heißt S meßbar oder ermeßlich. Unter den unendlichen Zahlenausdrücken gibt es solche, bei denen der messende Bruch p/q für jedes q gleich Null ist. Dann ist S eine unendlich kleine (zwar positive) Zahl und alle unendlich kleinen Zahlen werden als gleichgeltend mit Null angesehen. Aber mit positiven und negativen unendlich kleinen Zahlen sind alle mit Null gleichgeltenden Zahlen natürlich nicht erschöpft. Man erinnere sich nun daran, daß Cantor und Dedekind die neue Theorie der reellen Zahlen erst im Jahre 1872 veröffentlicht haben. Es gibt hier auch Stellen, die an den Satz von Dedekind über die Zuordnung von reellen Zahlen und Schnitten erinnern. Es ist wirklich sehr interessant, klar anzusehen, wie Bolzano in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts um die Begründung der Theorie der reellen Zahlen rang.

Z. Suetuna.

Householder, Alston S.: Dandelin, Lobačevskij, or Graeffe? Amer. math. Monthly 66, 464—466 (1959).

In the Russian translation of the author's book "Principles of numerical analysis" (cf. this Zbl. 51, 346) the designation of Graeffe's method is changed to "Lobačevskij's method", though not without a conscientious footnote calling attention to the fact. Since some texts refer to the "Dandelin-Graeffe method", the question who did what and when seems of some interest.

(Aus der Einleitung des Autors.)

Borůvka, Otokar und Mitarbeiter: Mathias Lerch und sein Werk auf dem Gebiete der Analysis. Acta Acad. Sci. Čechosl. Brun. 29, 417—540 (1957) [Tschechisch].

Die vorliegende Veröffentlichung ging aus einem Seminar unter Leitung des Brünner Mathematikers Otokar Borůvka hervor, das sich mit dem wissenschaftlichen Werk des tschechischen Mathematikers Matthias Lerch (1860—1922) befaßte. In sechs Artikeln werden die Leistungen von Lerch auf dem Gebiete der Analysis dargestellt und in die Entwicklung der Mathematik eingeordnet. Es handelt sich um die Beiträge von Lerch zur allgemeinen Funktionstheorie, zur Theorie der unendlichen Reihen, zur Theorie der Gammafunktion, zur Theorie der elliptischen Funktionen und zur Integralrechnung. Der letzte Artikel befaßt sich mit der wissenschaftlichen Auseinandersetzung zwischen Lerch und Alfred Pringsheim. Es ist schade, daß sprachliche Schwierigkeiten die Verbreitung der interessanten Ausführungen über den international anerkannten Mathematiker Lerch einschränken werden.

E. Lammel.

Cardoso, Jayme Machado: *Anläßlich der Hundertjahrfeier von Volterra.* Bol. Soc. Paranaense Mat. 3, 28—29 (1960) [Portugiesisch].

Szegő, Gabor: *Leopold Fejér: In memoriam, 1880—1959.* Bull. Amer. math. Soc. 66, 346—352 (1960).

Alexandroff (Aleksandrov), P. S., M. I. Višik (Vishik), V. K. Saul'ev and L. É. El'sgol'e (El'sgol'ts): Lazar' Aronovič Ljusternik. (On the occasion of his 60th birthday). Russ. math. Surveys 15, Nr. 2, 153—168 (1960), Übersetzung von Uspechi mat. Nauk 15, Nr. 2 (92), 215—230 (1960).

Mit Schriftenverzeichnis.

Angelitch, T. P.: Milutin Milankovitch. Arch. internat. Histoire Sci. 12, 176—178 (1960).

Krejn (Krein), M. G. and G. E. Šilov (Shilov): Mark Aronovič Najmark. (On the occasion of his fiftieth birthday). Russ. math. Surveys 15, Nr. 2, 169—174 (1960), Übersetzung von Uspechi mat. Nauk 15, Nr. 2 (92), 231—236 (1960).

Mit Schriftenverzeichnis.

Ladyženskaja, O. A. and G. M. Fichtengol'e: Vladimir Ivanovič Smirnov (zum siebzigsten Geburtstag). Vestnik Leningradsk. Univ. 12, Nr. 7, (Ser. Mat. Mech. Astron. Nr. 2) 5—14 (1957) [Russisch].

Hooykaas, R.: A l'occasion du 80^e anniversaire de Cornelis de Waard. Arch. internat. Histoire Sci. 12, 173—175 (1960).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Scherrer, Willy: Geometrie und Erkenntnistheorie. Dialectica 12, 185—196; Réponse de M. F. Gonseth à M. W. Scherrer. Ibid. 197—199 (1958).

Diese Arbeit handelt von der erkenntnistheoretischen Bewertung der Geometrie und von der absoluten Selbständigkeit der Arithmetik. In den ersten zwei Paragraphen begründet Verf. die beiden Aussagen, daß jede Geometrie logisch gerechtfertigt ist, wenn sie vollständig arithmetisiert werden kann, und daß sie empirisch gerechtfertigt ist, wenn die zu ihrer objektiven Aufweisung erforderlichen materiellen Substrate innerhalb der Beobachtungsfehler denselben Relationen genügen wie ihre arithmetischen Korrelate. Die beiden folgenden Paragraphen handeln von den weiteren Auswirkungen der Arithmetisierung und von der Evidenz. Die Grundsätze der Arithmetik stützen sich auf die Evidenz der endlichen Mengen. Die Arithmetik kann aber nicht auf endlich viele Axiome gegründet werden. Deshalb hat die sogenannte axiomatische Methode für die Arithmetik keine grundsätzliche Bedeutung. Zur weiteren Begründung verweist Verf. auf seine Schrift: „Exakte Begriffe“ (dies. Zbl. 80, 5). In einem Zusatz setzt er sich mit gewissen Schlußfolgerungen auseinander, die F. Gonseth in seiner Arbeit „La géométrie et le problème de l'espace“ [Studium générale 11, 108—115 (1958)] gezogen hat und betont seine Überzeugung, daß der Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik nie endgültig geleistet werden könne. In einer Antwort darauf führt Gonseth unter Hinweis auf diese und eine weitere in Vorbereitung befindliche Arbeit aus, daß die Meinungsverschiedenheit zwischen Scherrer und ihm nicht auf einer Verschiedenheit in der Bewertung dieses oder jenes besonderen Punktes für den Aufbau der Geometrie beruht (wie Scherrer angenommen hatte), sondern auf einem grundsätzlichen methodologischen Unterschied.

E. Löffler.

Dummett, Michael: A propositional calculus with denumerable matrix. J. symbolic Logic 24, 97—106 (1960).

Gödel [Ergebn. math. Kolloqu. Wien 4, 39—40 (1933); this Zbl. 7, 193] observed that all theorems of the intuitionistic propositional calculus IC are valid ($\equiv 0$) for the truth tables M_m with truth values $0, 1, \dots, n$ where $(a \vee b) = \min(a, b)$, $(a \wedge b) = \max(a, b)$, $(a \supset b) = 0$ if $a \geq b$, $= b$ if $a < b$ and $\rightarrow a = (a \supset n)$. Wajsberg (this Zbl. 19, 385) showed that this sequence or, equivalently, the corresponding denumerable truth table M , is not characteristic for IC since the unprovable formula $(*) [p \supset (q \vee r)] \supset [(p \supset q) \vee (p \supset r)]$ is valid for M . The author now shows that M is characteristic for the calculus obtained by adding Wajsberg's schema

(*) to IC as an additional axiom schema, and observes that therefore IC (*) is decidable. The interest of the result lies in providing a particularly simple characteristic matrix for IC (*) and not in the mere existence of a decision method since by a result of Dummett and Lemmon, footnote on p. 255 of [Z. math. Logik Grundl. Math. 5, 250—264 (1959)] every finitely axiomatized theory over IC is decidable. — It may be remarked that the proof of this last result by Dummett and Lemmon is defective; but, if this result is correct, it answers positively a question raised by Kreisel and Putnam in remark 1 on p. 77 of their paper reviewed this Zbl. 79, 7. — The author inadvertently attributes to McKinsey and Tarski (this Zbl. 37, 294) the result: $\vdash_{IC} (\Phi \vee \Psi)$ if and only if $\vdash_{IC} \Phi$ or $\vdash_{IC} \Psi$; this was stated by Gödel l. c., the first published proof occurring at the bottom of p. 407 of a paper of Gentzen's (this Zbl. 10, 146). G. Kreisel.

Hintikka, K. Jaakko J.: Vicious circle principle and the paradoxes. J. symbolic Logic 22, 245—249 (1957).

Für das Folgende vgl. dies. Zbl. 71, 11. Verf. zeigt nunmehr, daß sein Abstraktionsprinzip H unter der Annahme, daß es zwei verschiedene Individuen gibt, ebenfalls zu einem Widerspruch führt, wie dies ja auch für die Fregesche Abänderung des unbeschränkten Abstraktionsprinzips der Fall ist. Es bleibt die Frage offen, ob auch das folgende Prinzip H^+

$$(\exists x)(y)(y \neq x \wedge y \neq z_1 \wedge \dots \wedge y \neq z_k \rightarrow \cdot y \in x \leftrightarrow A(y)),$$

worin z_1, \dots, z_k alle in H^+ auftretenden freien Variablen sind und alle Quantoren in A hinsichtlich des Prädikates $P(u)$ $u \neq x$ relativisiert sind, zu einem Widerspruch führt. Die Prinzipien H und H^+ bieten schon Schwierigkeiten bei der Bildung einfacher Mengen, etwa der Menge, die genau das feste Ding a enthält. — Die vom Verf. vertretene Auffassung, daß durch die Widerlegung von H das Russellsche vicious circle principle betroffen sei, kann der Ref. nicht teilen. Vgl. dazu die Schlussbemerkung im eingangs genannten Referat; übrigens muß wohl betont werden, daß das Abstraktionsprinzip in der Mengenlehre keine extensionale „Definition“ von Mengen liefert, sondern eine Anforderung an den Individuenbereich darstellt im Sinne der Postulatenmethode der Algebra. G. H. Müller.

Wright, G. H. von: The heterological paradox. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 24, Nr. 5, 28 p. (1960).

This pamphlet contains a non-technical discussion of Grelling's paradox of heterological words. Its main points may be summarized thus: We use x as a variable for individuals and Y as a variable for classes (or properties) of individuals and the notation $D(x, Y)$ for x denotes Y . We define the notion $H(x)$ of heterological individuals in the following way: (1) $(x) (H(x) \equiv \sim (E Y) (D(x, Y) \& Y(x)))$. We assume that H exists in the domain of classes: (2) $(E Y) (Y = H)$. Then we assume that h is an individual which denotes H but no other class: (3) $(E x) (x = h)$, (4) $(Y) (D(h, Y) \equiv (Y = H))$. From (1)—(4) we derive the paradox: $(H(h) \equiv \sim H(h))$. The author suggests that a rejection of the conjunction of (1) and (2) is a natural "way out" of the paradox. The reviewer cannot agree. The existence of a class H defined by (1) is provable in the second order predicate logic, and a "way out" which is inconsistent with this part of logic ought to be avoided. A better "way out" is the rejection of (3) & (4). In other words, we exclude every object h fulfilling (4) from the domain of individuals. This exclusion is usually made by means of the well-known distinction between object-language and meta-language. S. Kanger.

Rieger, Ladislav: A contribution to Gödel's axiomatic set theory. I. Czechoslov. math. J. 7 (82), 323—357 (1957).

Es werden Modellfragen, Abhängigkeiten und Unabhängigkeiten innerhalb einer Gödelschen Mengenlehre untersucht. Hauptresultate: Axiom D von Gödel ist eine Konsequenz der Axiome A, B, C und der Forderung der verallgemeinerten Konstruktivität. Axiom D ist unabhängig von den Axiomen A, B, C, E samt der ver-

allgemeinerten Kontinuums-hypothese. Die Postulierung der Existenz von Mengen, die sich selbst als Element enthalten, und der Existenz der Klasse derartiger Mengen ist verträglich mit den Axiomen *A*, *B*, *C*, *E* samt der verallgemeinerten Kontinuums-hypothese.

W. Ackermann.

Fine, N. J. and R. Harrop: Uniformization of linear arrays. *J. symbolic Logic* 22, 130—140 (1957).

Für das folgende vgl. dies. Zbl. 55, 4. Verff. führen die von N. Goodman angeregte und von Fine aufgenommene Untersuchung über die Struktur endlicher geordneter Mengen, in denen zusätzliche „Berührungs“-relationen („*a* matches *b*“) erklärt sind, fort. Die Arbeit kann unabhängig von den früheren Arbeiten gelesen werden. Die Theorie hat den großen Vorzug, durch die Anschauung gestützt zu sein, und es erscheint dem Ref. durchaus möglich, daß sie Anwendungen in der Sinnesphysiologie und der Physik finden kann.

G. H. Müller.

Heyting, A.: Blick von der intuitionistischen Warte. *Dialectica* 12, 332—345 (1958).

This note begins with some remarks on the primitive intuitionistic notion of construction. Though made in connection with criticisms of Griss, their general purpose seems to be a distinction (a) between (completed) constructions and methods of construction and (b) between totally and partially defined methods of construction. However, there seem to be some inconsistencies in the exposition since, on p. 337, the author speaks of constructions whose arguments and values are free choice sequences and so they are certainly not completed; it may be that Gödel's distinction [*Dialectica* 12, 280—287 (1958)] between constructions on spatio-temporal and on abstract objects expresses the point better. As to (b) it may well be that the need for partial functions is smaller in intuitionistic than in classical mathematics, as illustrated by partial recursive mappings p from a set $S [= \{n: (\exists x) A(n, x)\}]$ into $T [= \{n: (\exists x) B(n, x)\}]$, A and B primitive recursive. There are such p which are not potentially recursive; however, intuitionistically, it is more natural to consider a pair of constructions p_1 and p_2 which associate with any n and any "proof" x of $n \in S$ a "proof" $p_2(n, x)$ of $p_1(n, x) \in T$. (Clearly, a "proof" of $n \in S$ is a number x such that $A(n, x)$.) — The second part sets out to discuss the relation between intuitionist and other mathematics, but confines itself mainly to recursive functions. Here it is in any case clear that almost all results on recursive functions which are evident get this evidence when thought of in terms of the primitive notion of constructive function. The author makes the familiar point that, on the intuitionistic interpretation of the existential quantifier, the notion of constructive function is used in defining recursiveness (of a system of equations E with principal function letter f , namely $(n) (\exists m) [E \vdash f(0^{(n)}) = 0^{(m)}]$). Conversely, he stresses the less familiar point that on the basis of the primitive intuitionistic notions, it makes sense to formulate the (mathematical) question whether every constructive function is computable from a set of recursion equations [in accordance with Gödel, l. c., footnote 2, p. 283; and in contrast to Kalmár (this Zbl. 88, 249)]. — Finally, he mentions that most constructive investigations have kept very much within the finitist domain, without developing specifically intuitionistic notions. In this connection it may be remarked that this applies not only to working mathematicians, but even to apparently higher order intuitionistic systems; e. g. Kleene's fragment of intuitionistic analysis (this Zbl. 88, 249), essentially incorporating [Heyting, S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., Berlin 1930, 158—169 (1930)] can be proved by finitist means to be an inessential extension of Heyting's arithmetic. In contrast, whatever the practice of mathematicians may be, the known higher order systems based on classical conceptions are stronger than the first order systems.

G. Kreisel.

• Grzegorzcyk, Andrzej: *Entscheidbarkeitsprobleme*. [Zagodnienia rozstrzygalności.] Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1957. 142 S. zł. 16,—. [Polnisch].

This book in an introductory way presents problems connected with decidability. At the beginning the author treats, in general, effective methods in mathematics passing to the intuitive and next to the rigorous notion of computability. The metamathematical grasp of computability and algorithm theory are given besides those problems. On the base of those considerations the author treats on decidability of theories in general and that of arithmetic in particular sketching proofs of its essential undecidability, its incompleteness and of its non-axiomatization. The last chapter is devoted to a short characteristic of further problems and results in this field. Only the lack of discussing Turing's machines makes Grzegorzcyk's book an incomplete handbook of decidability problems.

Z. Lis.

Kogalovskij (Kogalovsky), S. R.: *On universal classes of algebras*. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 759—761 (1958) [Russisch].

Eine (abstrakte, s. Mal'cev, dies. Zbl. 73, 251) Klasse K von Algebren heißt universal ($K = U(K)$ oder „universal abgeschlossen“), wenn alle ihre definierenden (endlich oder unendlich vielen) Axiome folgende Form haben: $(x_1) \cdots (x_n) (f_1 = g_1 \vee \cdots \vee f_l = g_l \vee \sim h_1 = q_1 \vee \cdots \vee \sim h_m = q_m)$, wo die f_1, \dots, q_m „Polynome“ in den x_1, \dots, x_n sind. Allgemein bezeichne $U(K)$, die universale Abschließung von K , die kleinste universale K umfassende Klasse. Eine Kongruenz ε in einer beliebigen Algebra \mathfrak{A} heißt K -Kongruenz, wenn $\mathfrak{A}/\varepsilon \in K$. Eine Menge von Kongruenzen, $\{\varepsilon_i\}$, in \mathfrak{A} , heißt abgeschlossen, wenn mit jeder konvergierenden Teilfolge $\{\varepsilon_i\}$ auch $\lim \varepsilon_i \in \{\varepsilon\}$ (Mengenlimes $\varepsilon_i = \lim \varepsilon_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} \varepsilon_j$; $\varepsilon_i \subset \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$); K heißt ab-

geschlossen, $K = \bar{K}$, wenn für beliebiges \mathfrak{A} die Menge ihrer K -Kongruenzen abgeschlossen ist. $S(K)$ deute die Klasse aller Unteralgebren von Algebren aus K . Eine allgemeine Hypothese über universale Klassen wird formuliert. In dieser Richtung werden bewiesen: Lemma 1: Jede universale Klasse ist abgeschlossen. Lemma 2. Es sei \mathfrak{A} eine endlich erzeugte Algebra und $\mathfrak{A} \in U(K)$, $K = \bar{K} = S(K)$; dann gilt $\mathfrak{A} \in K$. K heißt ferner lokal definiert, wenn K eine Algebra dann und nur dann enthält, wenn K alle endlich erzeugten Unteralgebren von \mathfrak{A} enthält. Unter den sieben formulierten Sätzen sei zitiert: Satz 2. $K = U(K) \Leftrightarrow K$ ist lokal definiert und $K = \bar{K}$. Die verschiedenen Abschließungsbegriffe lassen sich relativieren: Satz 4 entspricht so dem Satz 2. Weiter, Satz 5. Eine für direkte Produktbildung abgeschlossene Klasse K ist dann und nur dann universal, wenn sie lokal definiert ist und $\mathfrak{A}/\bigcup \varepsilon_i \in K$ (\mathfrak{A} beliebige Algebra, $\{\varepsilon_i\}$ eine beliebige Kette (= linear geordnete Menge) von K -Kongruenzen in \mathfrak{A}). Die universalen, für direktes Produkt abgeschlossenen Klassen werden charakterisiert (Satz 6), und ein Zusammenhang mit Mal'cev's quasiprimitiven Klassen (dies. Zbl. 73, 250) wird hergestellt (Satz 7).

D. Tamari.

Kogalovskij (Kogalovskii), S. R.: *Universal classes of models*. Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 260—263 (1959) [Russisch].

Diese Arbeit ist die Fortsetzung einer früheren Note (s. vorstehendes Referat) und setzt deren Kenntnis für grundlegende Definitionen und Problemstellung voraus. (Merkwürdigerweise hat der Verf. vergessen, sich selbst zu zitieren). Die dort begonnenen Charakterisierungen der universalen Klassen werden vertieft. Es wird angestrebt dies mit „inneren“ Mitteln der betrachteten Modellkategorie zu erreichen, so daß die gewonnenen Charakterisierungen sich leicht auf die relative Universalität von Unterkategorien in bezug auf die gegebene Kategorie übertragen lassen. Dies gelingt insb. für Modellklassen und endlich oder abzählbar unendlich vielen Prädikaten. Es werden zunächst weitgehende mengentheoretische und topologische

Mittel auf als gegeben vorausgesetzten Ordnungsrelationen aufgebaut, und verschiedene Limes- und Abschließungsbegriffe, insbesondere über vollständige Verbände, eingeführt. Ein großer Teil der gewonnenen Ergebnisse hängt vom Auswahlaxiom in einer (scheinbar neuen) Minimalversion (Lemma 1) ab. Eine sinnvolle Wiedergabe einiger Definitionen und Resultate (5 Lemmen, 12 Sätze) dieser hoch kondensierten Note ist im Rahmen dieser Besprechung unmöglich. Es sei jedoch bemerkt, daß sie in enger Beziehung steht zu verschiedenen Arbeiten von Mal'cev, wie auch zu Arbeiten von A. Tarski, A. Robinson und R. Vaught (s. u. a. die in der vorstehenden referierten Note zitierten Arbeiten).

D. Tamari.

Markov, A. A.: The theory of algorithms. Translat. by Edwin Hewitt. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 15, 1—14 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. 49, 293.

Asser, Günter: Normierte Postsche Algorithmen. Z. math. Logik Grundl. Math. 5, 323—333 (1959).

A Markov algorithm in an alphabet \mathfrak{A} consists of a series of rules of the form $P_1 \rightarrow (\cdot) Q_1, P_2 \rightarrow (\cdot) Q_2, \dots, P_r \rightarrow (\cdot) Q_r$ where P_i, Q_i ($i = 1, \dots, r$) are words in \mathfrak{A} and $\rightarrow (\cdot)$ indicates either \rightarrow or $\rightarrow \cdot$. $P_i \rightarrow Q_i$ means replace P_i by Q_i and proceed; $P_i \rightarrow \cdot Q_i$ means replace P_i by Q_i and stop. To apply this algorithm to a word W in \mathfrak{A} one takes the first occurrence in W of the first P_i in the list which occurs in W and replaces it by Q_i . This procedure is repeated and terminates only if a stage is reached where no rules are applicable (i. e. there are no occurrences of any of the P_i in the word) or where a "terminating rule" $P_i \rightarrow \cdot Q_i$ is used. A Post algorithm of the usual kind differs from this in two ways: 1. instead of replacing P_i by Q_i , P_i is deleted from the beginning of the word and Q_i is added on the end, 2. there is no question of applying the rules in a definite order and so obtaining a unique result but rather of applying all rules in all possible ways and generating a set of words. The author suggests that for many purposes it is convenient to use, instead of Markov algorithms, Post algorithms modified by dropping 2. Thus the "normal Post algorithm" defined by the above set of rules is like the Markov algorithm except that the P_i must occur as an initial segment of the word and instead of replacing P_i by Q_i one deletes P_i from the beginning and places it on the end. He proves that for each Post algorithm in \mathfrak{A} there exists a Markov algorithm in an alphabet containing \mathfrak{A} whose restriction to \mathfrak{A} coincides with the given Post algorithm. Also conversely (i. e. with "Post", "Markov" interchanged). He suggests various combinations of the two types of algorithm; these also are equivalent to Markov algorithms. He also points out that Post algorithms with the Q_i put on at the beginning (instead of the end) do not yield all possible algorithms.

J. C. Shepherdson.

Asser, Günter: Turing-Maschinen und Markowsche Algorithmen. Z. math. Logik Grundl. Math. 5, 346—365 (1959).

As in Wang [J. Assoc. comput. Machin. 4, 61—92 (1957)] the author takes a formulation of Turing machines in terms of a program of instructions rather than a set of internal states. The basic instructions used are of the form "if s_i is scanned print $s_{\lambda(i)}$, move one square right (or left, or stay put) and jump to instruction $\mu(i)$ ". Using subroutines to simplify the work as far as possible the author proves in full the equivalence of such Turing machine programs with Markov algorithms.

J. C. Shepherdson.

Wang, Hao: Circuit synthesis by solving sequential Boolean equations. Z. math. Logik Grundl. Math. 5, 291—322 (1959).

In this paper the author presents a new method of attack on the problems of automata theory. He considers ordinary Boolean algebra extended by the addition of a time operator d , so that x means x_t and dx means x_{t+1} . Certain variables i, j, \dots are distinguished as input variables, the others x, y, \dots as output variables. He shows that by introducing new output variables if necessary any system of

such "sequential Boolean equations" can be reduced to a single equation of the form

$$H[i, \dots, j, x, \dots, y, di, \dots, dj, dx, \dots, dy] = 0.$$

The general problem is to find functionals, i. e. functions of time and the input functions, $x(i, \dots, j, \dots, t), \dots, y(i, \dots, j, \dots, t)$ such that, for all t and all functions i_t, \dots, j_t ,

$$H[i_t, \dots, j_t, x(i_t, \dots, j_t, \dots, t), \dots, y(i_t, \dots, j_t, \dots, t), i_{t+1}, \dots, j_{t+1}, x(i_t, \dots, j_t, \dots, t+1), \dots, y(i_t, \dots, j_t, \dots, t+1)] = 0.$$

Previous work [Friedman, this Zbl. 81, 13; Burks-Wright, Proc. I. R. E. 41, 1357—1365 (1953)] has been concerned essentially with finding deterministic solutions of the equation, i. e. those in which the state of the outputs at time $t+1$ is determined only by the input at the same time and the complete state at the preceding moment. The author gives a method of finding all deterministic solutions by means of a "reduced characteristic table" which seems more efficient than previous methods. He also considers other kinds of solution, predictive solutions where the state of the outputs depends also in the inputs of times $t+1, \dots, t+q$ (for fixed q) and other non-effective solutions where e. g. the output at time 0 depends on the whole future input history. He gives an effective method in terms of a "solution table" for deciding whether an equation has solutions of any kind, and an effective method of determining whether it has effective solutions and for determining these when they exist. He points out that the methods extend easily to the case where the equation also contains terms $i_0, \dots, j_0, x_0, \dots, y_0, di_0, \dots, dj_0, dx_0, \dots, dy_0$ corresponding to the state at $t=0$. He discusses the relation between arbitrary sequential Boolean equations and the net-equations expressing the behaviour of a net built up from delay elements and stroke elements. He shows finally how the notation of sequential Boolean equations can also deal with other forms of expression such as bounded quantifiers, modulo quantifiers and modulo conditions.

J. C. Shepherdson.

Algebra und Zahlentheorie.

Gruppentheorie:

Drbohlav, Karel: Gruppenartige Multigruppen. Czechosl. math. J. 7 (82), 183—189, russ. Zusammenfassung 189—190 (1957).

Sei G eine beliebige Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe hiervon. Unter der (linken) gruppenartigen Multigruppe (von G nach H) versteht Verf. das mit gewöhnlichem (im allgemeinen mehrdeutigem) Linksrestklassenprodukt versehene System aller Linksrestklassen von G nach H : $g_1 H \cdot g_2 H$ (mit $g_1, g_2 \in G$) bedeutet die Gesamtheit aller im Komplexprodukt $g_1 H g_2 H$ enthaltenen Linksrestklassen $g H$ ($g \in G$). Zeichen: G/H . Ziel der Arbeit ist es, alle gruppenartigen Multigruppen unter den allgemeinen Multigruppoiden (mit skalarer Rechtseinheit) zu charakterisieren (abgesehen von einem Isomorphismus \cong). Dazu führt Verf. den Begriff einer Standarddarstellung einer gruppenartigen Multigruppe $M \cong G/H$ ein, indem er definiert: G/H ist eine Standarddarstellung von M , wenn $\bigcap_{g \in G} g^{-1} H g = \{1\}$ (die Einheitsgruppe von G). Verf. zeigt (Satz 1 der Arbeit), daß jede gruppenartige Multigruppe wenigstens eine Standarddarstellung besitzt. — Weiter führt Verf. den Begriff einer wesentlichen Permutation eines Multigruppoids M (mit skalarer Rechtseinheit $\dot{}$) ein, indem er definiert: Die Permutation π sei wesentlich, wenn $\pi(ab) = \pi(a)b$ für alle $a, b \in M$. Dann stellt Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen dafür auf, daß das Multigruppoid M mit einer gruppenartigen Multigruppe isomorph sein soll, und es gilt dann $M \cong \Gamma/\Delta$, wobei Γ eine Gruppe von wesentlichen Permutationen von M bedeutet, während $\Delta = \Gamma \cap \Delta(M)$, wobei

$\Delta(M)$ alle diejenigen wesentlichen Permutationen enthält, für welche $\pi j = j, j \in M$ (Satz 3 der Arbeit). Schließlich beweist Verf. (Satz 4 der Arbeit), daß, wenn G/H eine Standarddarstellung der gruppenartigen Multigruppe ist, dann stets $G \subseteq \Gamma(M)$ und $H = G \cap \Delta(M)$ gilt, wobei $\Gamma(M)$ die Gruppe aller wesentlichen Permutationen von M bedeutet. Die Arbeit enthält auch einige Überlegungen über die Primitivität und die zweifache Transitivität der Gruppe $\Gamma(M)$ (§ 3). M. Benado.

Dulmage, A. L., Diane Johnson and N. S. Mendelsohn: Orthogonal latin squares. Canadian math. Bull. 2, 211—216 (1959).

Parmi les conjectures relatives au nombre des quasigruppues d'ordre $n = \prod p^m$ formant une série orthogonale il n'a encore jamais été montré de celle qui assigne $\text{Max}(p^m) - 1$ comme borne supérieure à la longueur de cette série qu'elle fut controuvée. Les AA. pensent que cette conjecture est inexacte et établissent un certain nombre de propositions dont ils exposent le mécanisme pour $n = 12$, mais qui se généralisent aisément, et qui ont pour but de fournir la construction de séries orthogonales à partir d'un quasigroupe de „base“ α . Algébriquement, on peut définir α comme le produit direct du groupe de second ordre par le quasigroupe dont la loi de composition est $x \times y = x - y$ sur l'anneau $\mathbb{Z}/6$. Une condition nécessaire et suffisante pour que α soit orthogonal à son isotope β par $(\xi, 1, 1)$ est énoncée, ainsi que des propriétés des β . Six transformations (comme par exemple $x \rightarrow x + 6$) sont formulées qui, lorsque α et β sont orthogonaux, appliquent β sur un nouveau quasigroupe, γ , orthogonal à α . Ces transformations forment un groupe et produisent un grand nombre de séries orthogonales de longueur 3. L'une de ces séries, correspondant à $\xi = (1852793) (46) (10, 11) (0)$ et à $\xi = (0, 10, 674983, 11, 5, 2) (1)$ sur $\mathbb{Z}/12$, est représentée explicitement. A. Sade.

Bruck, R. H.: An open question concerning Moufang loops. Arch. der Math. 10, 419—421 (1959).

Wie vom Verf. früher (s. A survey of binary systems, dies. Zbl. 81, 17) bewiesen, ist die freie kommutative Moufang-Loop mit n freien Erzeugenden zentral nilpotent von (endlicher) Klasse $k(n)$, wobei $[n/2] + 1 \leq k(n) \leq n - 1$ gilt. Man weiß nicht, ob $k(5) = 3$ oder $= 4$ ist. Verf. zeigt nun: Wenn $k(5) = 3$, so $k(n) = [n/2] + 1$ für alle $n \geq 3$. Das folgt aus dem Satz: Gilt in einer kommutativen Moufang-Loop G die Gleichung $((x, y, a), a, b), b, z) = 1$ für alle x, y, z, a, b , so ist $(G, G', G') = 1$ mit G' als der von den sämtlichen Assoziatoren erzeugten Unterloop von G . Ferner wird gezeigt, daß bei einer solchen Loop G die von den inneren Abbildungen von G erzeugte additive Loop mit der Hintereinanderausführung als Multiplikation zu einem assoziativen Ring wird. G. Pickert.

Auslander, Maurice: Remark on automorphisms of groups. Proc. Amer. math. Soc. 9, 229—230 (1958).

Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$ und α ein Automorphismus von G , dessen Fixpunkte in $Z(G)$ liegen. Es wird bewiesen: ist n eine ganze Zahl derart, daß α^n ein innerer Automorphismus von G ist, so gilt $\alpha^{n^2} = 1$. Wird α^n von dem Element $g \in G$ induziert und bezeichnet $\omega(\alpha, n)$ die Restklasse $-g + \alpha(g) \pmod{(-1 + \alpha)Z(G)}$, so ist $\alpha^n = 1$ genau dann, wenn $\omega(\alpha, n) = 0$. Satz und Beweis lassen sich homologisch interpretieren. W. Kappe.

Levine, Norman: The anticenter of a group. Amer. math. Monthly 67, 61—63 (1960).

Das Antizentrum einer Gruppe G definiert Verf. als das Erzeugnis derjenigen Elemente von G , die mit keinem Element aus G vertauschbar sind (außer in trivialen Fällen). Versteht man unter einer Wurzelgruppe H_a bezüglich des Elementes $a \in H_a$ eine Gruppe, derart daß für alle Elemente $b \in H_a$ die von a und b erzeugte Untergruppe $\{a, b\}$ zyklisch ist, so besteht der Rand $R(G)$ von G genau aus denjenigen Elementen $a \in G$, für die der Zentralisator $Z(a) < G$ eine Wurzelgruppe bezüglich a ist. Das Antizentrum ist die kleinste $R(G)$ enthaltende Untergruppe von G . Genau

die lokalzyklischen Gruppen sind Wurzelgruppen bezüglich jedes ihrer Elemente. Daraus folgt, daß für abelsche Gruppen G stets $R(G) = G$ gilt genau dann, wenn G lokalzyklisch ist. Für endliche p -Gruppen G ist $R(G) = G$ genau für zyklische Gruppen und verallgemeinerte Quaternionengruppen. W. Kappe.

Rapaport, Elvira Strasser: Note on Nielsen transformations. Proc. Amer. math. Soc. 10, 228—235 (1959).

Let G be a group given by generators a_1, \dots, a_n and defining relations $R_j(a_i) = 1$. An automorphism of the free group F on these generators a_i induces an automorphism of the factor group G of F precisely when the normal subgroup generated by all the relations $R_j(a_i)$ in F is invariant under this automorphism of F . We call an automorphism of this kind a Nielsen automorphism of G ; similarly we call an isomorphism between two n -generator groups G and H a Nielsen isomorphism if it can be induced by an isomorphism between the corresponding free groups. Simple examples show that not every automorphism of G is, in terms of a given representation of G , a Nielsen automorphism. A further example is (in Theorem 1.) provided by the group of Listing's knot [M. Dehn, Math. Ann. 75, 402—413 (1914)] generated by u and v with the defining relation $u^2 v u^{-1} v^{-2} u^{-1} v u = 1$. The author shows that Tietze's theorem (cf. A. G. Kuroš, Theory of Groups Vol. 2, 1955, p. 75; report of the Russian original this Zbl. 57, 18) implies that to a given automorphism of G there is a representation, involving not more than twice the minimal number of generators of G , such that in this representation the automorphism is Nielsen. Next the author deals with those groups H with two generators and one relation whose derived group H' is free of rank two and whose factor group H/H' is free of rank one. She shows (Theorem 4.) that every such group is Nielsen isomorphic to one of three non-isomorphic groups of this kind. One of these is again the group mentioned above, though in a slightly different representation. [Theorems 1. and 4. seem to contradict each other; the reviewer has however not succeeded in checking the proofs. Theorem 4., if correct, would confirm in a special case a rather more general conjecture of W. Magnus.]

Hanna Neumann.

Dieman, A. P.: Über die p -Untergruppen von Gruppen und Sätze, die dem Sylowschen Satz analog sind. Moskovsk. gosudarst. ped. Inst. V. I. Lenin, učenye Zapiski 108, mat. Kafedry 2, 99—114 (1958) [Russisch].

Der Verf. sucht die Sätze von Sylow auf Gruppen mit unendlicher Ordnung zu verallgemeinern. Die folgenden Resultate wurden erhalten. Sei G eine Gruppe. Sei $H_A = \{H_\alpha; \alpha \in A\}$ eine Menge von Untergruppen von G . Sei Π eine Menge von Primzahlen. Ein Element a von G heißt ein $(\Pi; H_A)$ -Element von G , wenn es für jedes $\alpha \in A$ eine Π -Zahl (jeder Primteiler $\in \Pi$) $\beta_\alpha \geq 1$ mit $a^{\beta_\alpha} \in H_\alpha$ gibt. $L(\Pi; H_A)$ bezeichnet die Menge aller $(\Pi; H_A)$ -Elemente von G . Eine Untergruppe P heißt eine $(\Pi; H_A)$ -Untergruppe, wenn $P \subseteq L(\Pi; H_A)$ ist. Zwei Mengen H_A und $H_B = \{H_\beta; \beta \in B\}$ heißen Π -äquivalent, wenn $L(\Pi; H_A) = L(\Pi; H_B)$ ist. (Satz 1). Es sei $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$. $\{D\}$ und H_A sind dann und nur dann Π -äquivalent, wenn es für jedes $a \in L(\Pi; H_A)$ eine ganze Zahl $i = i(a) \geq 1$ und eine Π -Zahl $\beta_\alpha = \beta_\alpha(a) \leq i$ mit $a^{\beta_\alpha} \in H_\alpha$ gibt. H_A heißt invariant, wenn H_A mit H_α auch alle ihre konjugierten Untergruppen umfaßt. H_A heißt normal, wenn alle H_α Normalteiler von G sind. (Satz 2). Sei S_1 eine Untergruppe von G mit endlich vielen Konjugierten S_1, \dots, S_k . Für ein festes i sei N eine Untergruppe von $Ns(S_i)$ (= der Normalisator von S_i). Sei m ein gemeinsamer Teiler von $N: N \cap Ns(S_j)$, $j = 1, \dots, k$; $j \neq i$. Dann gilt (1) $k \equiv 1 \pmod{m}$ und (2) sei H eine beliebige Untergruppe von G . Sei d der größte gemeinsame Teiler von $H: Ns(S_l)$, $l = 1, \dots, k$. Dann ist $k \equiv 0 \pmod{d}$. (Satz 3). Sei $\Pi = \{p\}$. Sei P_1 eine maximale $(p; H_A)$ (invariant)-Untergruppe von G mit endlich vielen Konjugierten P_1, \dots, P_k . Für jedes $\alpha \in A$, $h \in H_\alpha$, und $b \in P_i$ sei $\langle b, h \rangle$ eine $(p; H_\alpha)$ -Untergruppe. Dann ist jede maximale $(p; H_A)$ -Untergruppe von

G mit einem P_i gleich und $k \equiv 1 \pmod{p}$. (Satz 4). Sei $\{P_\beta; \beta \in B\}$ eine Klasse von konjugierten $(p; H_A \text{ (normal)})$ -Untergruppen von G . ($A = \{1, \dots, k\}$). Für jedes α seien endlich viele von $H_\alpha P_\beta$ ($\beta \in B$) verschieden. Sei I eine $(p; H_A)$ -Untergruppe von G . Setze $D = H_1 \cap \dots \cap H_k$. Dann gibt es ein β derart, daß $\langle P_\beta, I \rangle$ einer $(p; D)$ -Untergruppe wird. (Satz 5). Im Satz 4 sei P_β maximal. Dann ist jede maximale $(p; D)$ -Untergruppe von G mit einem P_β gleich. (Satz 6). Sei $\{P_\beta, \beta \in B\}$ eine Klasse von konjugierten maximalen $(p; H_A \text{ (normal)})$ -Untergruppen. Damit eine beliebige maximale $(p; H_A)$ -Untergruppe von G mit einem P_β gleich ist, ist es notwendig und hinreichend, daß es für jede maximale $(p; H_A)$ -Untergruppe P von G einen Index $t \in B$ mit $R: N_S(P_t) \cap R < +\infty$ ($R = P_t \vee P$) gibt. Es werden noch zwei analoge Sätze angegeben. N. Itô.

Abhyankar, Shreeram: On the finite factor groups of abelian groups of finite rational rank. Amer. J. Math. **79**, 190—192 (1957).

Verf. zeigt: Ist A eine torsionsfreie abelsche Gruppe vom endlichen rationalen Rang n und B eine echte Untergruppe von endlichem Index, so ist A/B direkte Summe von $m \leq n$ zyklischen Gruppen. — Hieraus folgt: Die Zerlegungsgruppe einer nulldimensionalen reellen Bewertung eines algebraischen Funktionenkörpers mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper der Charakteristik 0 vom Transzendenzgrad n ist bei galoisscher endlicher Erweiterung eine direkte Summe von $m \leq n$ zyklischen Gruppen. E. Lamprecht.

Altman, Mieczyslaw: Généralisation aux groupes abéliens de la théorie de F. Riesz. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 1135—1138 (1958).

In this note it is shown how to replace topological hypotheses by algebraic in order to get much of the Riesz-Schauder theory of completely continuous operators. Let T be an endomorphism of an abelian group X , let T^0 be the identity endomorphism, let $T^{n+1} = T(T^n)$, let $L_n = T^n(X)$, and let G_n be the null space of T^n . T is said to satisfy the ascending (descending) chain condition if the chain $0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$ (the chain $X = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots$) has only finitely many distinct elements. If T satisfies both chain conditions, the least p such that $L_n = L_p$ for all $n > p$ is also the least p such that $G_n = G_p$ for all $n > p$; then X is the direct sum of L_p and G_p . If T is not nilpotent, then (Theorem 2) $T = H + K$, where H is an automorphism of X and $K(X) = L_p$. M. M. Day (M. R. 20, Nr. 2376).

Takahashi, Shuichi: Arithmetic of group representations. Tôhoku math. J., II. Ser. **11**, 216—246 (1959).

Sei k ein endlich algebraischer Zahlkörper. Es wird die Anzahl der Klassen von Darstellungen in k einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} studiert, wobei zwei Darstellungen als äquivalent gelten, die sich durch eine unimodulare Matrix ineinander transformieren lassen. Zwei Darstellungen heißen verwandt oder zum gleichen Geschlecht gehörig, wenn sie für alle Primstellen \mathfrak{p} von k ineinander unimodular transformierbar sind; dabei entfällt für unendliche \mathfrak{p} der Zusatz „unimodular“. Die Anzahl der Geschlechter ist endlich und das Produkt der Klassenzahlen für die endlichen Primstellen \mathfrak{p} . Letztere sind immer 1, wenn \mathfrak{p} nicht in der Gruppenordnung aufgeht. — Auf der anderen Seite wird die Anzahl $h(k, D)$ der Darstellungen, welche mit einer Darstellung D von \mathfrak{G} verwandt sind, folgendermaßen gedeutet: es sei C die mit D kommutierende Algebra von Matrizen der gleichen Reihenzahl, C^\times die Multiplikationsgruppe von C und \tilde{C} die Idelgruppe von C , d. h. das direkte Produkt der Multiplikationsgruppen der \mathfrak{p} -adischen Erweiterungen von C , wobei fast alle Faktoren unimodulare Matrizen sind. Schließlich bezeichne \tilde{U} die „Einheitengruppe“ in \tilde{C} bezüglich eines endlichen Darstellungsmoduls \mathfrak{M} von D , d. h. die Gruppe derjenigen $u \in \tilde{C}$, für deren \mathfrak{p} -Komponenten $u_{\mathfrak{p}} \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ gilt. Dann ist $h(k, D)$ die Anzahl der Doppelkomplexe $\tilde{U} \gamma C^\times$ mit $\gamma \in \tilde{C}$. Die Endlichkeit dieser Anzahl wurde für gewisse lineare algebraische Gruppen von T. Ono [Ann. of Math., II. Ser. **70**, 266—290 (1959)] gezeigt.

Wenn die Darstellung D absolut irreduzibel ist, so besteht C nur aus Diagonalmatrizen, und die Klassenzahl läßt sich wie folgt ausdrücken:

$$(1) \quad h(k, D) = h(k) \prod_{p|g} h(k_p, D),$$

wo $h(k)$ die Idealklassenzahl von k und g die Ordnung von \mathfrak{G} bedeutet. Ist D zwar noch irreduzibel, aber nicht mehr absolut irreduzibel, so entsprechen den Doppelkomplexen $\tilde{U} \gamma C^\times$ die Klassen von \mathfrak{Q} -Linksideal in der mit D kommutierenden Algebra C , wo \mathfrak{Q} die Ordnung der Matrizen M mit $M \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$ ist. Auch jetzt ist $h(k, D)$ im allgemeinen in ähnlicher Weise wie (1) explizit angebar. — Die Formeln für die Anzahl der Geschlechter, sowie (1) im absolut irreduziblen Falle finden sich bereits bei J. M. Maranda (dies. Zbl. 65, 261). Als Hilfsmittel bei dieser Hauptaufgabe untersucht der Verf. auch das Verhältnis zwischen modularen Darstellungen und Darstellungen in k_p und stellt dabei das folgende Analogon des Henselschen

Lemmas auf: Sei D eine ganzzahlige Darstellung von \mathfrak{G} in k und $D \equiv \begin{pmatrix} \bar{D}_1 & 0 \\ 0 & \bar{D}_2 \end{pmatrix} \pmod{p}$,

wobei die (in naheliegender Weise definierte) Cohomologiegruppe $H^1(\mathfrak{G}; D_1, D_2) = 0$ ist. Dann zerfällt D in k_p in zwei Darstellungen $D_i \equiv \bar{D}_i \pmod{p}$. Schließlich ist noch folgendes interessante Analogon des Hauptgeschlechtssatzes zu erwähnen: Die genaue Potenz, mit der p in der Gruppenordnung aufgeht, sei e_0 . D_1 und D_2 seien zwei ganzzahlige Darstellungen von \mathfrak{G} in k_p . Wenn ein n -Cozyklus $E \equiv 0 \pmod{p^e}$ mit $e \geq e_0$ ist, so ist E der Corand einer $(n-1)$ -Cokette F mit $F \equiv 0 \pmod{p^{e-e_0}}$. M. Eichler.

Suprunenko, D. and R. Apatenok: Nilpotent irreducible linear groups over a finite field. Doklady Akad. Nauk BSSR 3, 475—478 (1959) [Russisch].

Let $GL(n, P)$ be the full linear group over a field P . It is shown that in the case of a finite field P two maximal irreducible nilpotent subgroups of $GL(n, P)$ are conjugate in this group, if their centrals are conjugate in $GL(n, P)$. The proof is based upon some theorems on maximal subgroups of $GL(n, P)$ where P is an arbitrary field. Reference is made to the (Russian) book by D. A. Suprunenko, Solvable and Nilpotent Linear Groups, Minsk 1958, and the paper Belorussk. gosudarst. Univ. V. I. Lenin, učenyje Zapiski, Ser. fiz.-mat. Nr. 15, 3—6 (1953), by the same author.

H. Schwerdtfeger.

Budini, P.: On the regular representation of the Lorentz group. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 11, 84—93 (1957).

Die reguläre Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe wird in einer 6-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des 8-dimensionalen Raumes definiert, und die infinitesimalen Operatoren für diese Darstellung werden angegeben. Es wird gezeigt, daß gewisse Eigenvektoren der invarianten infinitesimalen Operatoren nicht zum Darstellungsraum der regulären Darstellung gehören, d. h. nicht quadratisch integrierbar sind. Nach Ansicht des Ref. lassen die Ausführungen vom mathematischen Standpunkt aus manche Frage offen.

E. Thoma.

Vilenkin, N. Ja. (N. J.): The matrix elements of the irreducible unitary representations of the group of real orthogonal matrices and the group of the motions of Euclidean $(n-1)$ -space. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 16—19 (1957); Brief an die Redaktion. Ibid. 120, 688 (1958) [Russisch].

The representations of the corresponding Lie algebras, described by Gel'fand and Cetlin (this Zbl. 37, 153) are used. The computation of the matrix elements of the representations of the groups is made by induction on n using a system of parameters analogous to the Euler angles. Among the matrix elements corresponding to the rotations in the plane (x_{n-1}, x_n) are the Gegenbauer polynomials. An addition theorem is given for these functions. In an ulterior erratum, the author notes that in the right part of the formulas 4 and 9 one must take the sum over all schemas γ , which are compatible with the first line N .

I. Ciuculescu.

Vilenkin, N. Ja. (N. J.): The matrix elements of irreducible unitary representations of a group of Lobachevsky space motions and the generalized Fock-Mehler transformations. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 118, 219—222; Brief an die Redaktion. *Ibid.* 120, 688 (1958) [Russisch].

The integral formula for the matrix elements of the representations of the homogeneous group is deduced in another work of the same author (cf. the paper reviewed above). In this work are calculated the spherical functions corresponding to the subgroup of the transformations which leave invariant the hyperplane $x_{n+1} = 0$. A theorem of addition for these functions is obtained, using the theory of group representations. From the decomposition of a function in integral over the zonal spherical functions, an inversion formula for an integral operator is deduced; this operator is isometric with respect to some norms. From this formula others are deduced. Passing to the limit the matrix elements of the representations of the group of motions of the euclidean space can be obtained; these elements are expressed with the aid of Bessel functions. These formulas give formulas involving Bessel functions. In the letter to the editor, the author announces that one of his basic formulas was obtained in other conditions and by other methods by Olevskij [*Doklady Akad. Nauk SSSR* 40, 5—10 (1943) and this *Zbl.* 38, 216].

I. Cuculescu.

Curtis, Charles W.: Representations of Lie algebras of classical type with applications to linear groups. *J. Math. Mech.* 9, 307—326 (1960).

Let L be a Lie algebra over an algebraically closed field Ω of characteristic $p \neq 2, 3, 5$ or 7 (restricted in case $p \neq 0$) and of classical type, i. e. with an abelian Cartan subalgebra H satisfying the axioms of Mills and Seligman (this *Zbl.* 79, 48) (Recall that these axioms hold whenever L has a non-degenerate Killing form). The methods of E. Cartan, Weyl and Harish-Chandra are applied to obtain a complete classification of all finite-dimensional irreducible restricted representations (cf. Jacobson, this *Zbl.* 25, 303) of L . Thus irreducible L -modules are determined up to isomorphism by their maximal weight and, for finite characteristic, every integral linear function on H appears as maximal weight of a finite-dimensional irreducible (restricted) L -module. In particular, if L has rank l and finite characteristic p , then it has precisely p^l distinct irreducible representations. In the second part the author attempts a similar extension of results relating to the representations of the classical groups. Let $A(L)$ be the group of automorphisms of L and G the subgroup of special automorphisms, generated by elements of the form $\sigma(\alpha, \xi) = \exp \operatorname{ad}(\xi e_\alpha)$ ($\xi \in \Omega$, α a root). Using methods of algebraic groups (Chevalley, *Théorie des groupes de Lie II*, this *Zbl.* 54, 13) the author shows that G is an irreducible algebraic subgroup of $A(L)$; moreover, if L has a non-degenerate Killing form, G is the algebraic identity-component in $A(L)$ and the Lie algebra of G is isomorphic to L (cf. also Ono, this *Zbl.* 85, 17). Now let $x \rightarrow T(x)$ be any irreducible (restricted) representation of L ; then in the case of characteristic 0, a projective representation $\sigma \rightarrow F(\sigma)$ of the group G of special automorphisms may be defined by $F(\sigma) = \exp(\xi T(e_\alpha))$. For finite characteristic this definition is useless, but by representing elements in the representation space in terms of a maximal vector (belonging to a maximal weight) and a minimal vector, a projective representation may be defined in this case too which reduces to $F(\sigma)$ in the case of characteristic 0. It is shown that this projective representation is irreducible and determines the representation T up to isomorphism. Again, if G is a connected Lie group, the continuous finite-dimensional projective representations of G can be lifted to ordinary representations of the universal covering group G^* of G ; the author obtains an analogue of G^* in the case of finite characteristic by starting out from the p^l distinct irreducible projective representations. He shows that for the algebra of type A_n ($n \geq 1$), $G^* \cong SL(n+1, \Omega)$ and for type C_n ($n \geq 2$), $G^* \cong \operatorname{Sp}(2n, \Omega)$ and raises a number of questions, in

particular the identification of G^* in the general case with an algebraic group playing a role analogous to the universal covering group. *P. M. Cohn.*

Cernjavskij, I. Ja.: Das multiplikative Integral in der Lieschen Gruppe. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 4 (11), 198—223 (1959) [Russisch].

The title is misleading. The author deals with multiplicative integrals of functions of a real variable with values in a Lie group. *Hans Freudenthal.*

Stoka, Marius I.: Sur les groupes G_r mesurables d'un espace R_n . Commun. Acad. Republ. popul. Romine 7, 581—585, russ. und französ. Zusammenfassung 585 (1957) [Rumänisch].

On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe de transformations $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n; a^1, \dots, a^r)$, ($i = 1, \dots, n$) soit mesurable. Un groupe est dit mesurable s'il admet un invariant intégral unique. *G. Vranceanu.*

Glicksberg, Irving: Some special transformation groups. Proc. Amer. math. Soc. 11, 315—318 (1960).

Let H be a compact Abelian group and let G be an equicontinuous group of self-homeomorphisms of H containing all translations. The author proves that every $g \in G$ is of the form $g(h) = h_{\sigma} \sigma_g(h)$, where σ_g is an automorphism of H . In addition if H is finite-dimensional, and G is also required to be a group of automorphisms of H , then there exists an integer k such that every element in G has period k . *M. Mahowald.*

Conner, P. E. and E. E. Floyd: A note on the action of $SO(3)$. Proc. Amer. math. Soc. 10, 616—620 (1959).

In this note the authors prove that if the 3-dimensional rotation group ($SO(3)$) acts on a closed n -cell then the orbit space is acyclic over the integers. *M. Mahowald.*

Horne jr., J. G.: Multiplications on the line. Proc. Amer. math. Soc. 9, 791—795 (1958).

L/A détermine toutes les multiplications associatives définies sur la droite numérique, continues pour la topologie ordinaire, telles que 0 soit élément zéro, 1 élément unité et que le produit de deux nombres positifs soit leur produit ordinaire. Parmi elles, il caractérise la multiplication ordinaire par l'une ou l'autre des propriétés suivantes: a) il existe au moins un couple de nombres négatifs dont le produit est positif; b) il n'y a pas d'élément idempotent autre que 0 et 1 et pas d'élément nilpotent autre que 0. *R. Croisot.*

Roquette, Peter: Bericht über algebraische Gruppen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 62, 53—84 (1959).

Dieser Bericht ist aus einem Vortrag entstanden, den Verf. 1957 auf der DMV-Tagung in Dresden gehalten hat. Eine Gruppe heißt algebraisch, wenn sie gleichzeitig eine algebraische Mannigfaltigkeit ist und wenn die Gruppenoperationen reguläre Abbildungen im Sinne der algebraischen Geometrie sind. Zur Präzisierung dieser Definition, die ja ganz analog etwa zur Definition der „topologischen“ Gruppe ist, erinnert Verf. an die Definition der algebraischen Mannigfaltigkeiten und der regulären Abbildungen. Er läßt dabei Grundkörper beliebiger Charakteristik zu, die nicht algebraisch abgeschlossen zu sein brauchen. Die Mannigfaltigkeiten sind „abstrakt“ definiert im Sinne von Weil und brauchen natürlich nicht vollständig (kompakt) zu sein. Es folgen Beispiele algebraischer Gruppen: Vektorräume, lineare Gruppen, Wittsche Vektoren, Kurven vom Geschlecht 1. Im § 2 (Allgemeines über algebraische Gruppen) bespricht Verf. Untergruppen, Faktorgruppen, Isomorphiesätze und den Chevalleyschen Struktursatz: Es sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper. Dann gibt es unter den linearen, zusammenhängenden Untergruppen von G eine eindeutig bestimmte maximale L . Diese ist Normalteiler, und die Faktorgruppe G/L ist eine abelsche Mannigfaltigkeit. „Auf Grund dieses Satzes konzentriert sich die weitere Untersuchung der algebraischen Gruppen einerseits auf die linearen Gruppen, andererseits auf die abelschen Mannigfaltigkeiten.“ Der § 3 behandelt abelsche Mannigfaltigkei-

ten, die definiert werden als vollständige (kompakte) zusammenhängende algebraische Gruppen. Die Kommutativität folgt dann. Eine abelsche Mannigfaltigkeit ist minimales Modell ihres Funktionenkörpers. Eine weitere Grundeigenschaft der abelschen Mannigfaltigkeiten ist der sog. Satz von Poincaré über die vollständige Reduzibilität. Es folgen Betrachtungen über den Endomorphismenring $H(A)$ einer abelschen Mannigfaltigkeit A , der besonders interessant ist, da jede reguläre Abbildung von A in A bis auf eine Translation ein Endomorphismus von A ist. $H(A)$ ist als Modul über den ganzen Zahlen endlich erzeugt. Die Struktur der Algebra $H(A) \otimes Q$ (über den rationalen Zahlen Q) wird beschrieben. Die Jacobische Mannigfaltigkeit \mathfrak{C}_0 einer algebraischen Kurve Γ ist das bekannteste Beispiel einer abelschen Mannigfaltigkeit. Die Gruppe \mathfrak{C} der Divisorenklassen von Γ läßt sich in folgender Form schreiben: $\mathfrak{C} = \bigcup \mathfrak{C}_n$, wo n alle ganzen Zahlen durchläuft. \mathfrak{C}_n ist die Menge der Divisorenklassen vom Grade n . Für jedes n besitzt \mathfrak{C}_n in natürlicher Weise die Struktur einer vollständigen algebraischen Mannigfaltigkeit über dem Grundkörper, und zwar derart daß die Gruppenoperationen reguläre Abbildungen sind. Man könnte also sagen, daß \mathfrak{C} eine „algebraische Gruppe mit unendlich vielen Zusammenhangskomponenten“ ist. Wenn $n = \text{Geschlecht von } \Gamma$, dann ist der Funktionenkörper von \mathfrak{C}_n das n -fache symmetrische Kompositum des Funktionenkörpers von Γ . Wenn der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist, dann sind alle \mathfrak{C}_n einander biregulär äquivalent. Die Bedeutung der Jacobischen Mannigfaltigkeiten liegt darin, daß die Struktur der Divisorenklassengruppe \mathfrak{C} mit den Methoden der Theorie algebraischer Gruppen untersucht und damit Aufschluß über die arithmetische Struktur des Funktionenkörpers von Γ gewonnen werden kann. Als Beispiel dafür, wie die allgemeinen Methoden der Theorie arbeiten, gibt Verf. einen Beweis für die Endlichkeit der Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers vom Geschlecht > 1 . In § 4 werden lineare Gruppen besprochen (geometrische Eigenschaften, auflösbare Gruppen, kommutative lineare Gruppen). In den Schlußbemerkungen kommt Verf. auf die Gruppe der rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe zu sprechen (Satz von Mordell-Weil, Satz von Lutz-Mattuck, Riemannsche Vermutung im Falle eines endlichen Grundkörpers). Der vorliegende Bericht ist eine schöne Einführung in eine Theorie, die in den letzten Jahren große Fortschritte gemacht hat. Die zahlreichen Literaturangaben erleichtern dem Leser das weitere Studium. *F. Hirzebruch.*

Verbände. Ringe. Körper:

Rocos, Pant.: *Algèbre-anneaux*. Praktika Akad. Athen **32**, 307—317, französ. Zusammenfassung 317—318 (1957) [Griechisch].

In this paper the author defines a new algebraic structure, the algebra-ring, as a set E equipped with an equality relation and two finite sequences $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, (f_1, \dots, f_n) of binary operations on E such that: 1. E is a commutative semi-group with respect to each of the operations φ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ with a common neutral element $e \in E$. 2. Each f_j , $j = 1, 2, \dots, n$ is associative. 3. f_j are distributive with respect to φ_i for all $j = 1, 2, \dots, m$ and $i = 1, 2, \dots, n$. Algebra-rings generalize Boolean rings; (with respect to the author's assertion that the new concept contains that of a lattice, one should remark that it generalizes also distributive lattices with 0 or 1). A left-ideal I of an algebra-ring E is a subset I of E closed with respect to all φ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ and such that $f_j(x, y) \in I$ for all $x \in E$, $y \in I$ and for every $j = 1, 2, \dots, n$. A right-ideal and a 2-sided ideal in E is now defined in the usual way, so that one obtains a generalization of the concept of a lattice-ideal in a Boolean ring. In the sequel the author examines relations between ideals and equivalence relations in an algebra-ring generalizing corresponding results of the theory of rings. The general homomorphism theorem in the case of algebra-rings is also stated and proved.

A. Mallios.

Rodriquez, Gaetano: Sui quasicorpi distributivi finiti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 26, 458—465 (1959).

Gli elementi di un quasicorpo finito (necessariamente di ordine $q = p^t$, dove p è un numero primo), diversi dallo 0, possono essere rappresentati da $q - 1$ matrici quadrate a elementi nel campo di Galois, $GF(p)$, con p elementi, della forma $(x_i, f_{i2} \cdots f_{it})$, $i = 1, \dots, t$, che si ottengono attribuendo ad x_1, \dots, x_t i valori costituenti tutte le possibili t -ple non nulle di $GF(p)$ (per le condizioni verificate dal sistema di matrici in questione, v. ad es. L. Lombardo-Radice, Quelques résultats nouveaux et quelques problèmes ouverts dans la théorie des quasicorps, Fac. Sci. Paris, Séminaire Dubreil, 1957/58). — L'A. fa vedere innanzitutto (nn. 2, 3) che le funzioni f_{ij} possono rappresentarsi mediante polinomi di grado $p - 1$ al più in ciascuna delle variabili x_i , e privi del termine noto. — Nella rappresentazione sopra accennata degli elementi del quasicorpo mediante matrici, come somma (prodotto) di due matrici del sistema occorre assumere la matrice del sistema (univocamente determinata) che ha per prima colonna la prima colonna della matrice che si ottiene sommando (moltiplicando) le due date con la regola ordinaria. L'A. dimostra che la nuova addizione così definita coincide con l'ordinaria addizione di matrici quando il quasicorpo è distributivo dalle due parti (n. 4); fa vedere quindi che, sempre nel caso distributivo, le funzioni f_{ij} possono rappresentarsi mediante polinomi omogenei di 1° grado nel complesso delle incognite (n. 5). L'A. riesce di conseguenza a ricondurre la costruzione dei quasicorpi distributivi di ordine q alla costruzione di ben determinati sistemi di matrici in $GF(p)$ a determinante non nullo (n. 6); per questa via riottiene in modo semplice e naturale un risultato di L. E. Dickson (1905), secondo il quale non esistono quasicorpi distributivi propri di ordine p^2 . *L. Lombardo-Radice.*

Rieger, Ladislav: A remark on the s. c. free closure algebras. Czechosl. math. J. 7 (82), 16—20, engl. Zusammenfassung 20 (1957) [Russisch].

Theorem 8, chapter XI of Birkhoff's Lattice theory (revised ed. New York 1948; this Zbl. 33, 101), there attributed to Kuratowski, states that the free closure algebra on one generator has 16 elements. The author shows that this is false by giving the following example of an infinite closure algebra on one generator: Let N be the set of positive integers consisting of $2, 2^{h+2} 3^h, 2^h 3^{h+1}$ ($h = 0, 1, \dots$) and \mathfrak{B} the collection of subsets of N which are finite or have a finite complement. For any $X \in \mathfrak{B}$ define \bar{x} to consist of all multiples of elements of X . This is a closure operation on \mathfrak{B} and \mathfrak{B} is generated by $\{2\}$. (It appears that the result of Kuratowski referred to by Birkhoff applies to algebras admitting the operations of closure and complementation but not set-theoretical union.) As the author points out, \mathfrak{B} itself is not free, and the structure of the free closure algebra seems to be fairly involved.

P. M. Cohn.

Grätzer, G. and E. T. Schmidt: Two notes on lattice-congruences. Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös, Sect. Math. 1, 83—87 (1958).

The authors prove the theorems: If L is a Boolean algebra, then the following conditions are equivalent: (1) L is the lattice of all congruence relations of a suitable abstract algebra; (2) L is the lattice of all congruence relations on a suitable lattice; (3) L is weakly atomic and complete; (4) L is complete, every element $a \in L$ is a join of \uparrow -inaccessible elements, $x_\alpha \uparrow x$ and $y_\beta \uparrow y$ imply $x_\alpha \cap y_\beta \uparrow x \cap y$; (5) L is isomorphic to the Boolean algebra of subsets of a suitable set. If L is a chain, then (1)—(4) are equivalent. (A lattice is called weakly atomic if every interval contains a prime interval.) The lattice of all congruence relations of a lattice L is denoted by $\Theta(L)$. If L is a distributive lattice, then the following conditions are equivalent: (a) $\Theta(L)$ is a Boolean algebra; (b) the infinite distributive law $\Theta \cup \bigwedge_{\alpha \in A} \Theta_\alpha = \bigwedge_{\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha)$ holds in $\Theta(L)$; (c) every closed interval of L has a finite length.

J. Jakubík.

Avann, S. P.: Upper and lower complementation in a modular lattice. Proc. Amer. math. Soc. **11**, 17—22 (1960).

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der früheren Untersuchungen des Verf. über die endlichen modularen Verbände (dies. Zbl. **82**, 250). Sei L ein endlicher modularer Verband, $a \in L$. Ist $a \neq 1$, sei a^* die Vereinigung aller oberen Nachbarn von a ; $1^* = 1$. Das Symbol a_* ist in dualer Weise erklärt. Der Zähler a'_U eines minimalen Quotienten, welcher mit dem Quotienten a^*/a projektiv ist, wird oberes Komplement von a genannt. Ist dabei der zugehörige minimale Quotient zu a^*/a transponiert, so heißt a'_L ein direktes oberes Komplement von a . Die Definition eines unteren Quotienten a'_L ist dual. Das Hauptresultat der Arbeit (Satz 4) sind 8 äquivalente Bedingungen für die Eindeutigkeit des oberen Komplementes von a . Eine von diesen Bedingungen z. B. besagt: a^*/b_* ist das direkte Produkt $a/b_* \times b/b_*$ (wobei b das einzige obere Komplement von a ist). Einige weitere Resultate: Jedes a besitzt wenigstens ein direktes oberes Komplement. Gilt $b = a'_U$, $a = b'_L$, so ist die Anzahl der oberen Komplemente von a gleich der Anzahl der unteren Komplemente von b . L ist distributiv genau dann, wenn jedes Element genau ein oberes Komplement besitzt. Ist L komplementär, so sind die Begriffe Komplement und oberes bzw. unteres Komplement äquivalent. Gibt es Elemente $a, b \in L$ so daß b gleichzeitig ein oberes, ein unteres und ein gewöhnliches Komplement von a ist, so ist L komplementär.

J. Jakubík.

Anderson, Lee W.: One dimensional topological lattices. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 715—720 (1959).

Hauptresultat: Jeder lokal kompakte, zusammenhängende, eindimensionale topologische Verband ist eine Kette, d. h. ist totalgeordnet. Der Beweis macht von algebraischer Topologie Gebrauch.

G. Bruns.

Matsushima, Yatarō: Hausdorff interval topology on a partially ordered set. Proc. Amer. math. Soc. **11**, 233—235 (1960).

Die Intervall-Topologie einer (teilweise) geordneten Menge X ist sicher dann Hausdorffsch, wenn zu jedem Element $a \in X$ eine endliche Menge S , deren Elemente sämtlich mit a unvergleichbar sind, so existiert, daß jedes mit a unvergleichbare Element $x \in X$ mit einem Element $s \in S$ vergleichbar ist. Korollar: Wenn jede total ungeordnete Teilmenge von X endlich ist, so ist X in seiner Intervall-Topologie ein Hausdorff-Raum.

G. Bruns.

Murata, Kentaro: Additive ideal theory in multiplicative systems. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A **10**, 91—115 (1959).

L'A. considère dans la première partie de son travail un treillis multiplicatif L avec élément zéro et élément maximum e , la multiplication étant commutative et vérifiant $ab \leq a$. L'associativité n'est pas supposée, mais on précise la notion de puissance $a^{(q)}$ d'un élément a en posant $a^{(1)} = a$, $a^{(q)} = a^{(q-1)} a^{(e-1)}$, ce qui permet de définir un élément primaire sous la forme: q est primaire si on a $ab \leq q$, $a \leq q \Rightarrow \exists q'$ tel que $b^{(q')} \leq q$. Le premier théorème de l'A. s'énonce: Si L vérifie la condition de chaîne ascendante, tout élément \cap -irréductible de L est primaire. Ce résultat est inexact, même dans le cas associatif, comme le montrent certains contre-exemples déjà donnés par R. P. Dilworth et M. Ward (ce Zbl. **21**, 108) ou par le rapp. [Bull. Soc. math. France **83**, 161—193 (1955; ce Zbl. **64**, 261), p. 185] qui ont étudié en outre des conditions suffisantes pour que cette propriété soit vraie. La démonstration de L'A. est fautive du fait que l'ensemble $j(a \cup u) \wedge K$ qu'il considère n'est pas un idéal du treillis L et qu'on a seulement $j(a \cup u) \wedge K \subseteq j(a)$ et non pas $j(a \cup u) \wedge K = j(a)$. Ceux des résultats donnés dans la suite du mémoire qui s'appuient sur ce théorème 1 sont donc incorrects, en particulier les théorèmes 13 et 14. La deuxième partie est relative aux éléments primaux d'un demigroupe réticulé quasi-entier, commutatif ou non. La notion introduite généralise celle de

C. W. Curtis (ce Zbl. 47, 32); dans le cas où la condition de chaîne ascendante est vérifiée, elle a été considérée également par le rapp. (loc. cit., p. 170) qui a montré plus tard [Lesieur et Croisot, Centr. Belge Rech. math., Colloque d'Algèbre supérieure, Bruxelles du 19 au 22 déc. 1956, 79—121 (1957; ce Zbl. 84, 27), p. 93] qu'elle est identique dans le cas des idéaux d'un anneau avec celle de W. E. Barnes (ce Zbl. 70, 267).

L. Lesieur.

Yen, Chih-ta: Sur la classification des algèbres de Lie simples réelles et les figures de Schläfli associées. Science Record, n. Ser. 3, 270—275 (1959).

It is known that the real forms of a complex simple Lie algebra L correspond to certain involutions of the compact form of L (cf. Berger, Blanchard, Buchat, Cantier, Lagard, Serre, Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie, Séminaire Sophus Lie, 1^e année 1954/55, this Zbl. 68, 21). By a result of Gantmacher (this Zbl. 22, 315) any automorphism α of L is conjugate (in $\text{ad } L$) to $\tau = \tau_0 \exp \text{ad } h'$, where τ_0 leaves a given Cartan subalgebra H invariant and h' is an element of H left fixed by τ_0 . The author shows that if α is an involution, τ may be chosen so that, if $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ is a system of simple roots and $\varphi = \sum_1^l m_i \varphi_i$ ($m_i \geq 0$) the dominant root, and $\tau_0(\varphi_i) = \varphi_i$, then $(\varphi'_1, h') = \frac{1}{2}$, $(\varphi'_i, h') = 0$ ($i > 1$), $m'_1 = 1$ or 2. (Here φ'_i, φ' are induced by φ_i, φ on H_1 the eigenspace for the root $+1$, and $\varphi' = \sum_1^l m'_i \varphi'_i$, $m'_i \geq 0$). He then states without proof further results which reduce the problem of classifying real simple Lie algebras to the determination of characteristic subalgebras and the leading weight of their representation on L (the characteristic subalgebra of L associated with τ_0 is the algebra generated by the rootvectors left fixed by τ_0). These results are interpreted in terms of the Schläfli figure of L . P. M. Cohn.

Yen, Chih-ta: Sur les automorphismes d'une algèbre de Lie simple réelle. Science Record, n. Ser. 3, 276—279 (1959).

Let L be a real simple Lie algebra, $\text{aut } L$ its group of automorphisms and $\text{ad } L$ the subgroup of inner automorphisms (special automorphisms). The author's object is to show that $\text{aut } L$ splits over $\text{ad } L$ and to determine a complement of $\text{ad } L$, using the results of an earlier note (cf. the previous review). Let $L = L_1 + \sqrt{-1} V_1$ be a Cartan decomposition of L and define τ_0, H_1 as in the preceding review, then a complement of $\text{ad } L$ may be generated by τ_0 and the group of all linear transformations of H_1 which leave fixed the system of simple roots of L_1 and the system of dominant weights of $\text{ad}_{[V_1]} L_1$ (i. e. the representation of L_1 induced by the adjoint representation on the complexified form $[V_1]$). Some indications of these transformations (as permutations of roots and dominant weights) are given for algebras of types $A - E$. P. M. Cohn.

Blij, F. van der and T. A. Springer: The arithmetics of octaves and of the group G_2 . Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 406—418 (1959).

Ansätze von H. S. M. Coxeter [Duke math. J. 13, 561—578 (1946)] fortführend, jedoch nicht voraussetzend, studieren Verff. die maximalen Ordnungen \mathfrak{F} in einer Cayley-Algebra A über einem Körper k , in welchem ein Integritätsbereich R ausgezeichnet ist. Sie sind so definiert: 1. \mathfrak{F} ist ein endlicher R -Modul. 2. \mathfrak{F} ist ein nicht assoziativer Ring, der das Einselement von A enthält. 3. Jedes Element von \mathfrak{F} genügt einer „ganzen“ Gleichung in R . 4. \mathfrak{F} ist maximal. (Bem. d. Ref.: Postulat 3. ist eine Folgerung von 1. und 2.) Wenn $k = Q$ der rationale Zahlkörper und $R = Z$ ist, so sind für $p \neq \infty$ alle p -adischen Erweiterungen von \mathfrak{F} mit einem bestimmten Ring von Vektormatrizen isomorph (das gilt auch noch für algebraische Zahlkörper k). Daraus folgt, daß alle Cayley-Algebren A über Q zu zwei Typen gehören, je nach dem Nullteiler vorhanden sind oder nicht. Im letzteren Falle ist die zugehörige quadratische Normenform von \mathfrak{F} die ganzzahlige definite Form in 8 Variablen mit

der Diskriminante 1. — An \mathfrak{S} -Linksidealen existieren nur die trivialen $\mathfrak{S} \lambda$, $\lambda \in k$. — Schließlich wird gezeigt, daß alle maximalen Ordnungen \mathfrak{S} in einer Cayley-Algebra A isomorph sind. Wie Verf. ausführen, läßt sich dieses Resultat im Sinne eines (allerdings nur für spezielle Gruppen bewiesenen) Satzes von T. Ono [Ann. of Math., II. Ser. 70, 266—290 (1959)] deuten, nach dem die Anzahl der Gitterklassen in einem Geschlecht bezüglich einer linearen algebraischen Gruppe endlich ist. In diesem Falle handelt es sich um die Gruppe der Automorphismen von A . *M. Eichler.*

Smiley, M. F.: Jordan homomorphisms onto prime rings. Trans. Amer. math. Soc. 84, 426—429 (1957).

Diese Arbeit ist bereits in dem Referat von M. Gerstenhaber über die Arbeit von Herstein, Trans. Amer. math. Soc. 81, 331—341 (1956), in diesem Zbl. 73, 22 mitbesprochen worden. *E. A. Behrens.*

Martindale III, Wallace S.: The structure of a special class of rings. Proc. Amer. math. Soc. 9, 714—721 (1958).

A ring R with the property that for each $x \in R$ there exists c (depending on x) such that $x^2 c - x$ is in the center of R is called a ξ -ring. The author investigates the structure of ξ -rings as the subdirect sums of subdirectly irreducible rings. He shows that subdirectly irreducible ξ -rings with nonzero Jacobson radical have the property C : "Every commutator is central". The subdirectly irreducible semisimple ξ -rings are division rings. Hence his main result states that every ξ -ring is the subdirect sum of subdirectly irreducible ξ -rings each of which is either a division ring or a ring with property C . Along these lines, Utumi (dies. Zbl. 77, 258) has shown that the nilpotent elements of a ξ -ring form an ideal and that modulo that ideal the ring is the subdirect sum of division rings and commutative rings. The paper concludes with an investigation of ξ -algebras over fields. In this case, the main theorem can be sharpened to read: If R is an algebraic ξ -algebra over a perfect field then R is the subdirect sum of division algebras and commutative algebras. *J. P. Jans.*

Szász, F.: Les anneaux ne contenant que des sous-anneaux propres cycliques. Czechosl. math. J. 7 (82), 21—25, russ. Zusammenfassung 25 (1957).

Ein assoziativer Ring heiße zyklisch, wenn seine additive Gruppe zyklisch ist. Verf. untersucht die Frage, welche Ringe die Eigenschaft haben, daß jeder eigentliche Unterring zyklisch ist und stellt fest, daß es folgende sind: die zyklischen Ringe, der Nullring, konstruiert über der quasizyklischen additiven Gruppe vom Typ p^∞ , die endlichen Körper der Ordnung p und p^q (p, q : Primzahlen) und die Ringe der Ordnung p^2 . Daraus ergibt sich als Zusatz für abelsche Gruppen: Eine abelsche Gruppe, die nur zyklische Gruppen als eigentliche Untergruppen enthält, ist zyklisch oder besitzt die Ordnung p^2 oder ist vom Typ p^∞ . *A. Bergmann.*

Almeida Costa, A.: Sur les anneaux demi-premiers. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 7, 89—104 (1959).

In der ersten Hälfte der vorliegenden Arbeit werden die Ringe R ohne nilpotente Ideale (d. h. in denen aus $a^2 = (0)$ für ein Ideal a von R $a = (0)$ folgt), kurz, die o. n. Ringe untersucht. Ein Ideal a in einem beliebigen Ring R heißt o. n. Ideal, wenn R/a ein o. n. Ring ist. Ein p -System bedeute eine Untermenge P von R , so daß es zu jedem $c \in P$ ein x aus R gibt mit $cxc \in P$. Dann bestehen zwischen den p -Systemen und den o. n. Idealen ähnliche Relationen, wie man sie zwischen den m -Systemen und den Primidealen in einer Arbeit von McCoy (dies. Zbl. 35, 18) finden kann. In der zweiten Hälfte der Arbeit beschäftigt sich der Verf. mit radikaltheoretischen Fragen. In Verbindung mit dem unteren Radikal von Baer werden die Nilideale, die gleichzeitig o. n. Ideale sind, d. h. die Radikalideale von Baer studiert. Mit Hilfe der p -Systeme wird ein neues Radikal eingeführt, und zwar ist dieses Radikal η_a eines Ideals a der Durchschnitt von allen minimalen o. n. Idealen, die a enthalten. Es wird gezeigt, daß für ein Nilideal a das Radikal $\eta_a = \Phi_1(a)$ mit dem unteren Radikal $\Phi_0(a)$ zusammenfällt. Insbesondere gilt für $a = R$ die Be-

ziehung $\mathfrak{n}_R = \Phi_1((0)) = \Phi_0((0)) = \mathfrak{L}$, wo \mathfrak{L} das obere Radikal von Baer bezeichnet. Endlich ergibt sich für Nilideale, daß das McCoy'sche Radikal $\Phi_2(\mathfrak{a})$ dem Radikal $\Phi_1(\mathfrak{a})$ gleich wird.

J. Szendrei.

Mitas, Günter: Zur Strukturtheorie separabler Algebren. J. reine angew. Math. 198, 1—6 (1957).

Für den Satz, daß jede separable Algebra endlichen Ranges über einem Körper k direkte Summe einfacher Algebren ist, wird eine Beweisanordnung gegeben, in der jeder Schritt konstruktiv durchgeführt werden kann, vorausgesetzt, daß es möglich ist, jedes über k separable Polynom explizit in Primfaktoren zu zerlegen.

M. Kneser.

Lech, Christer: On the associativity formula for multiplicities. Ark. Mat. 3, 301—314 (1957).

Verf. zeigt: Es seien Q ein Stellenring der Dimension r mit dem maximalen Primideal \mathfrak{m} , $\{x_1, \dots, x_r\}$ ein Parametersystem von Q , $\mathfrak{q} = (x_1, \dots, x_r)$ ein \mathfrak{m} -primäres Ideal und $\mathfrak{a} = (x_{m+1}, \dots, x_r)$, wobei $0 \leq m \leq r$ (fest); dann gilt für die Multiplizität von \mathfrak{q} (nach Samuel)

$$(1) \quad e(\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{p}} e\left(\frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right) e(\mathfrak{a}; \mathfrak{p}),$$

wobei \mathfrak{p} alle minimalen Primoberideale von \mathfrak{a} mit $\dim \mathfrak{p} + \text{Rang } \mathfrak{p} = r$ durchläuft und $e(\mathfrak{a}; \mathfrak{p}) = e(\mathfrak{a} Q_{\mathfrak{p}})$ ist. Für den Spezialfall von Stellenringen mit Kern (bzw. für geometrische Stellenringe) wurde eine entsprechende Formel schon früher von Chevalley bewiesen [Trans. Amer. math. Soc. 57, 1—85 (1945)]; beide Ergebnisse sind wesentlich in der Theorie der Schnittmultiplizitäten. — Der Beweis des Verf. stützt sich auf die auch an sich interessante Formel

$$(2) \quad e(\mathfrak{q}) = \lim_{n_1, \dots, n_r} \frac{L(x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r})}{n_1 \cdots n_r} \text{ für } \left(\min_i n_i\right) \rightarrow \infty,$$

wobei $L(x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r})$ die Länge des \mathfrak{m} -Primärideals $(x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r})$ bedeutet, und das zu (1) analoge Ergebnis für $m = r = 1$. — Als Verallgemeinerung erhält Verf. z. B.: Sind \mathfrak{a} und \mathfrak{b} analytisch disjunkte Ideale von Q (vgl. Northcott-Rees, dies. Zbl. 57, 26) und ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ \mathfrak{m} -primär, so ist

$$(3) \quad e(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{p}} e\left(\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right) e(\mathfrak{b}; \mathfrak{p}),$$

wobei \mathfrak{p} alle minimalen Primoberideale von \mathfrak{b} mit $\dim \mathfrak{p} + \text{Rang } \mathfrak{p} = r$ durchläuft.

E. Lamprecht.

Rees, D.: A note on form rings and ideals. Mathematika, London 4, 51—60 (1957).

Ist A ein noetherscher Ring mit Einselement und \mathfrak{a} ein festes Ideal von A , so führt Verf. entsprechend einer früheren Note [J. London math. Soc. 31, 221—228

(1956)] den Ring $R = R(A, \mathfrak{a})$ ein als Teilring aller endlichen Summen $\sum_{r=-p}^q c_r t^r$

mit $c_r \in \mathfrak{a}^r$, wobei $\mathfrak{a}^r = A$ für $r \leq 0$, von $A[t, u]$ ($t =$ Unbestimmte, $u = t^{-1}$). Jedem Ideal \mathfrak{b} von A wird dann das Ideal $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{b} A[t, u] \cap R$ von R zugeordnet, wobei Primärzerlegung, Primidealeigenschaft und Länge von Primäridealien erhalten bleiben. Ist speziell Q ein Stellenring mit dem maximalen Primideal \mathfrak{m} , $B = Q/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{q} = (a_1, \dots, a_m)$ ein \mathfrak{m} -primäres Ideal, so sei $F(Q, \mathfrak{q})$ der Formenring bezüglich \mathfrak{q} (vgl. Krull, dies. Zbl. 19, 289; $F(Q, \mathfrak{q}) = B[X_1, \dots, X_m]/\mathfrak{D}'$, wo \mathfrak{D}' die Gesamtheit der Formen zu \mathfrak{q} ist); ist \mathfrak{b} ein Ideal von Q , so sei $\bar{\mathfrak{b}}$ das zugehörige Formenideal in $F(Q, \mathfrak{q})$. Dann gilt: $F(Q, \mathfrak{q}) \cong R(Q, \mathfrak{q})/u R(Q, \mathfrak{q})$ und $\bar{\mathfrak{b}} \cong (\mathfrak{b} + u R(Q, \mathfrak{q}))/u R(Q, \mathfrak{q})$; insbesondere sind somit F und $\bar{\mathfrak{b}}$ unabhängig von der Auswahl der Basis von \mathfrak{q} . Das Hauptergebnis des Verf. lautet: Ist \mathfrak{a} ein Ideal von Q , sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die minimalen Primoberideale von \mathfrak{a} und bedeutet jeweils μ_i die Länge der zu \mathfrak{p}_i

gehörigen Primärkomponente von \mathfrak{a} , ist ferner \mathfrak{P} ein minimales Primoberideal des Formenideals \mathfrak{a} zu \mathfrak{a} bezüglich eines m -primären \mathfrak{q} und sind λ bzw. λ_i ($= 0$, falls \mathfrak{P} kein zugehöriges minimales Primoberideal) die Längen der isolierten Komponenten von \mathfrak{a} bzw. \mathfrak{p}_i bezüglich \mathfrak{P} , so gilt $\lambda = \sum_{i=1}^r \mu_i \lambda_i$. Verf. gibt algebraisch-geometrische

Deutungen seines Ergebnisses (Vielfachheit einer Komponente des Tangentenkegels in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit) und zeigt, daß sein Ergebnis den Spezialfall $r = m$ der Assoziativitätsregel von Lech (vgl. obenstehendes Referat) liefert.

E. Lamprecht.

Nagata, Masayoshi: A Jacobian criterion of simple points. Illinois J. Math. **1**, 427—432 (1957).

Es seien $A = k\{X_1, \dots, X_n\}$ der formale Potenzreihenring über dem Körper k , $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale von A und $R = A_{\mathfrak{q}}$; ferner sei $\{f_1, \dots, f_r\}$ ein Erzeugendensystem von \mathfrak{p} . Dann gilt: (1) Falls A/\mathfrak{q} separabel-erzeugbar über k ist, so ist $R/\mathfrak{p}R$ d. u. n. d. regulärer Stellenring, wenn $\text{Rang } (J(f_1, \dots, f_r) \bmod \mathfrak{q}) = \text{Rang } \mathfrak{p}$. (2) Ist k von der Charakteristik $p \neq 0$, so ist $R/\mathfrak{p}R$ regulärer Stellenring d. u. n. d., wenn ein Teilkörper k^* von k mit $[k:k^*] < \infty$ existiert, so daß $\text{Rang } (J^*(f_1, \dots, f_r; k^*) \bmod \mathfrak{q}) = \text{Rang } \mathfrak{p}$ ist. Hierbei ist $J(f_1, \dots, f_r)$ Jacobische Matrix zu den Grundderivationen in A und J^* die durch induzierte Derivationen von k über k^* ergänzte Jacobische Matrix. — Die Ergebnisse lassen sich auch sinngemäß auf den algebraischen Fall übertragen.

E. Lamprecht.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Roquette, Peter: Über das Hassesche Klassenkörper-Zerlegungsgesetz und seine Verallgemeinerung für beliebige abelsche Funktionenkörper. J. reine angew. Math. **197**, 49—67 (1957).

Verf. gibt in vorliegender Arbeit einen erneuten Beweis und eine Verallgemeinerung des Hasseschen Zerlegungsgesetzes für elliptische Funktionenkörper über ihrem m -Teilkörper (vgl. dies. Zbl. **28**, 343) und zeigt, wie seine Beziehungen zu der auf kohomologietheoretischer Basis beruhenden Pseudo-Klassenkörpertheorie von Kawada-Tate (dies. Zbl. **68**, 34) sind. Es seien K ein konservativer elliptischer Funktionenkörper mit mindestens einem rationalen Punkt und dem Konstantenkörper k , der die n_0 -ten Einheitswurzeln enthält, $\mathfrak{D}(K)$ bzw. $\mathfrak{C}(K)$ die Divisoren- bzw. Divisorenklassengruppe von K , und $\mathfrak{D}_0(K)$ bzw. $\mathfrak{C}_0(K)$ die entsprechenden Untergruppen 0-ten Grades; ferner sei \mathfrak{G} eine endliche Gruppe von k -Automorphismen von K , deren Exponent n_0 zur Charakteristik teilerfremd ist, und L der Invariantenkörper von \mathfrak{G} . Verf. konstruiert einen Homomorphismus h , der jeder bei \mathfrak{G} invarianten Divisorenklasse $C \in \mathfrak{C}(K)$ eine Faktorensystemklasse $H(C)$ zu \mathfrak{G} in k^\times zuordnet (h ist als Homomorphismus von $H^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ in $H^2(\mathfrak{G}, k^\times)$ deutbar). Es ist $h(C) = 1$ genau dann, wenn C aus einer Nullklasse von L durch Einbettung hervorgeht; ein entsprechendes Ergebnis gilt bei Einbettung in eine Konstantenerweiterung. Eine Nullklasse X einer Konstantenerweiterung von K heißt allgemeine Nullklasse, wenn jede Nullklasse (einer geeigneten Konstantenerweiterung) durch Spezialisierung aus ihr hervorgeht; der Koordinatenkörper $\bar{K} = k(X)$ heißt der zu K konjugierte Körper; die rationalen Punkte \mathfrak{p} von \bar{K} entsprechen umkehrbar eindeutig den $C \in \mathfrak{C}_0(K)$. Die zu K/L konjugierte Erweiterung \bar{L} von \bar{K} ist der Kernkörper des irreduziblen Hasseschen Faktorensystems $h(X)$. Ist nun \mathfrak{p} ein rationaler Punkt von \bar{K} , $C \in \mathfrak{C}_0(K)$ die \mathfrak{p} entsprechende Nullklasse, so ist für jeden Teiler \mathfrak{q} von \mathfrak{p} in \bar{L} der Restklassenkörper $L^{\mathfrak{q}}$ gleich dem Kernkörper von $h(C)$. Dies ist (für die konjugierte Erweiterung formuliert) das Analogon des Hasseschen Zerlegungsgesetzes und verallgemeinert dies über den Spezialfall

der m -Teilung hinaus. Verf. zeigt anschließend, wie sich der „schwache“ Weilsche Endlichkeitssatz (Endlichkeit von $h(\mathbb{C}_0)$) mit seiner Methode ohne Heranziehung der Distributionenlehre Weils herleiten läßt, und skizziert die Übertragung der Überlegungen auf beliebige abelsche Funktionenkörper. *E. Lamprecht.*

Lang, Serge: Unramified class field theory over function fields in several variables. *Ann. of Math.*, II. Ser. 64, 285—325 (1956).

Es sei K ein endlich-algebraischer Funktionenkörper von n Veränderlichen, dessen genauer Konstantenkörper k ein Galoisfeld von q Elementen ist. Verf. charakterisiert die Gesamtheit der „unverzweigten“ separablen endlich-algebraischen Erweiterungen L von K , die galoissch mit abelscher Galoisgruppe sind, nach dem Vorbild der Klassenkörpertheorie durch Zuordnung einer arithmetischen Gruppe des Grundkörpers (Existenzsatz, Eindeutigkeitssatz, Reziprozitätsgesetz, Abgrenzungssatz usw.). — Es sei V eine normale abstrakte Varietät (über k erklärt) mit dem Funktionenkörper K und \mathfrak{B}_k das k -Skelett von V , d. h. die Gesamtheit der Lokalitäten \mathfrak{o} zu V mit über k endlichem Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$; die maximalen Primideale \mathfrak{p} der $\mathfrak{o} \in \mathfrak{B}_k$ werden als Repräsentanten der Lokalitäten gewählt; sie repräsentieren gleichzeitig die primen rationalen Zyklen (der Dimension 0) von V , d. h. die Erzeugenden der (rationalen) Zyklengruppe $Z(\mathfrak{B}_k)$. Ist L eine endlich-algebraische Erweiterung von K , so heißt die Gesamtheit \mathfrak{U} der über den $\mathfrak{o} \in \mathfrak{B}_k$ liegenden normalen Lokalitäten \mathfrak{D} eine Überdeckung (covering) von \mathfrak{B}_k ; für Konstantenerweiterungen $L = k' \cdot K$ ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_{k'}$, für geometrische Erweiterungen (gleicher Konstantenkörper) ist \mathfrak{U} das k -Skelett der Normalisierung U von V in L (die zugehörige rationale Abbildung $f: U \rightarrow V$ wird dann selbst Überdeckung genannt). $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_k$ heißt unverzweigt, wenn alle Lokalitäten unverzweigt sind (bei Konstantenerweiterungen stets erfüllt); U/V heißt divisor-unverzweigt, wenn jeder Primdivisor von V in L unverzweigt ist (dann ist jede reguläre Lokalität von \mathfrak{B}_k unverzweigt); L/K heißt unverzweigt, wenn ein vollständiges normales Modell V von K/k existiert, dessen Überdeckung $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}_k$ unverzweigt ist. U/V heißt abelsche Überdeckung, wenn L/K abelsche Erweiterung ist. Ist $\alpha: V \rightarrow A$ die kanonische Abbildung von V in seine Albanesische Varietät und entsteht U/V aus einer abelschen Überdeckung B/A mit einer abelschen Varietät B durch einen „Herunterziehungsprozeß“ (vgl. § 4), so heißt U/V vom Albanesischen Typus (AT); U/V ist dann eine abelsche Überdeckung; L/K heißt vom AT, wenn eine Überdeckung U/V über einem geeigneten k zu L/K vom AT ist. Die abelsche Erweiterung L/K vom AT sind dann fast alle divisor-unverzweigten abelschen Erweiterungen von K , und für diese Erweiterungen wird das Analogon der Klassenkörpertheorie aufgestellt. Dazu wird das Artin-Symbol $(\mathfrak{p}, L/K)$ in geläufiger Weise erklärt (beachte, daß $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ endlich ist). Der Kern $Z_\alpha(\mathfrak{B}_k)$ der kanonischen Abbildungen der Zyklengruppe 0-ten Grades $Z_0(\mathfrak{B}_k)$ in die Gruppe der rationalen Punkte von A heiße der Albanesische Kern und $C_K = Z(\mathfrak{B}_k)/Z_\alpha(\mathfrak{B}_k)$ (bzw. $C_K^0 = Z_0/Z_\alpha$) die Zyklenklassengruppe (bzw. diejenige 0-ten Grades) von \mathfrak{B}_k (diese Definition ist sinngemäße Verallgemeinerung der bei Dimension 1 üblichen). Bei einer galoisschen Erweiterung L/K kann mit Hilfe der Automorphismen wie üblich die Spur von Zyklen und Zyklenklassen erklärt werden; $S_K^L C_L \leq C_K$ bezeichne die Spurgruppe der Zyklenklassen. Dann gilt: Jeder Untergruppe M vom endlichen Index von C_K entspricht genau eine abelsche Erweiterung L von K vom AT, und M ist die Spurklassengruppe dieser Erweiterung; die Reziprozitätsabbildung $\mathfrak{p} \rightarrow (\mathfrak{p}, L/K)$ liefert dabei einen Isomorphismus von C_K/M auf die Galoisgruppe der Erweiterung. Weiter werden der Abgrenzungssatz (innerhalb galoisscher Erweiterungen) und weitere Sätze formuliert. Die Beweise werden zunächst für Konstantenerweiterungen und abelsche Varietäten durchgeführt, und schließlich wird das Analogon eines Hilbertschen Klassenkörpers hergeleitet. Der allgemeine Fall wird durch geeignete Kombination hieraus hergeleitet. Die nicht erfaßten verzweigten abelschen Erweiterungen sind Torsionsklassenkörper (zur Zyklengruppe) und eventuell Erwei-

terungen vom p -Potenzgrad. Ein abschließender Paragraph bezieht sich auf Kummer-Erweiterungen. Ein Anhang enthält beim Beweis benutzte Hilfsmittel über verallgemeinerte arithmetische Progressionen. Verf. weist in einem Zusatz darauf hin, daß die Beweise nicht nur bei AT, sondern unter allgemeineren Voraussetzungen gelten.

E. Lamprecht.

Lang, Serge: Sur les séries L d'une variété algébrique. Bull. Soc. math. France 84, 385—407 (1956).

Es sei $V = V^r$ eine normale abstrakte Varietät der Dimension r über dem endlichen Körper k von q Elementen, K der zugehörige Funktionenkörper (über k) und $f: U \rightarrow V$ eine galoissche geometrische Überdeckung (= revêtement) von V vom Grade n mit der Galoisgruppe G ; E sei der Funktionenkörper von U (vgl. vorstehendes Referat). Verf. führt nach dem Vorbild von Artin L -Funktionen zu Gruppencharakteren zu G ein, betrachtet verallgemeinerte arithmetische Progressionen und leitet zugehörige Dichteaussagen für die Punkte von V her. — Jedem Automorphismus $\sigma \in G$ entspricht eine birationale Korrespondenz T_σ von U . Ist \mathfrak{p} ein unverzweigter primärer rationaler Zyklus (der Dimension 0) vom Grade d von V , Q ein Punkt zu \mathfrak{p} , $P = f^{-1}(Q)$ ein Urbildpunkt in U , dann wird durch $T(P) = P^{(q^d)}$ (komponentenweise) invariant das Frobeniusymbol $(\mathfrak{p}, U/V)$ (= Konjugiertenklasse von T) zugeordnet. Ist k_m eine Erweiterung m -ten Grades von k , in der Q rational ist, $T_Q^{(m)} = T$ aus der Konjugiertenklasse mit $T(P) = P^{(q^m)}$, so gilt $(\mathfrak{p}, U/V)^{m/\deg(\mathfrak{p})} = T_Q^{(m)}$. Ist χ ein einfacher Charakter von G , m ganzrational, so sei $\chi(\mathfrak{p}^m) = \chi(T^m)$; für verzweigte oder nicht einfache Q (diese seien in einem über k rationalen Divisor Z enthalten) setze man stets $\chi(Q) = 1$. Dann wird durch

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \log L\left(t, \chi \frac{E}{K}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\deg(\mathfrak{p})|m} \chi(\mathfrak{p}^{m/\deg(\mathfrak{p})}) \deg(\mathfrak{p}) \right) t^{m-1}$$

die L -Funktion zu χ erklärt; der Koeffizient von t^{m-1} ist dabei

$$(2) \quad \sum_Q \chi(T_Q^{(m)}) \quad (\text{über alle über } k_m \text{ rationalen } Q \text{ von } V).$$

Dann gilt: Es gibt eine von f , U , V und Z abhängige, aber von q unabhängige Zahl A , so daß

$$(3) \quad \left| \sum \chi(T_Q^{(1)}) \right| \leq A q^{(r-\frac{1}{2})}, \quad \chi \neq \text{Hauptcharakter}$$

$$(4) \quad \left| \sum \chi(T_Q^{(1)}) - q^r \right| \leq A q^{(r-\frac{1}{2})}, \quad \chi = \text{Hauptcharakter}.$$

Entsprechendes gilt für jedes m mit q^m an Stelle von q . Der Beweis stützt sich auf den Fall $r=1$ und eine direkte Zurückführung mit Hilfe erzeugender Kurven. Ist $N_0(C, m)$ die Anzahl der \mathfrak{p} vom Grade m , so daß $(\mathfrak{p}, U/V)$ in der Konjugiertenklasse C der Elementanzahl h liegt, so gilt als Folgerung

$$(5) \quad (h/n) N_0(C, m) = (1/m) q^{r_m} + O(q^{(r-\frac{1}{2})}).$$

In den letzten Abschnitten betrachtet Verf. in Verallgemeinerung der Untersuchungen obiger Note folgende Situation: Es sei V eine über k definierte singuläritätenfreie vollständige Varietät und $\alpha: V \rightarrow A$ eine rationale Abbildung in eine kommutative Gruppenmannigfaltigkeit A (beides über k erklärt), und α sei in jedem Punkt von V definiert. Es sei $\lambda: B \rightarrow A$ eine separable Isogenie (über k erklärt), deren Kern in den rationalen Punkten von B enthalten ist. Es sei v ein allgemeiner Punkt von V/k , $\xi = \alpha(v)$, y ein allgemeiner Punkt von B/k und $x = \lambda(y)$; ist dann η irgendeine Spezialisierung von y über der Spezialisierung $x \rightarrow \xi$, so gilt $k(\eta) \supset k(\xi)$. Ist nun k in $k(v, \eta) = E$ algebraisch abgeschlossen, so ist die Normalisierung U von V in E eine Überdeckung von V , die durch α und A bestimmt ist: das reziproke Bild von $\lambda: B \rightarrow A$ [Sprechweise: Überdeckung vom Typus (α, A)]. Falls $[U: V] = B: A$ ist, heißt dieses nicht degeneriert. Diese Überdeckungen sind abelsch. — Neben einer Umdeutung der obigen Dichtigaussage skizziert Verf., wie man die Klassen-

körpertheorie der vorstehend besprochenen Arbeit verallgemeinern kann, indem man eine Zyklenklassengruppe $Z(V, k)/Z_\alpha(V, k)$ zugrunde legt, wobei $Z_\alpha(V, k)$ der Kern der 0-Zyklen $Z_0(V, k)$ vom Typus (α, A) , d. h. bez. α ist. *E. Lamprecht.*

Lang, Serge et Jean-Pierre Serre: Sur les revêtements non ramifiés des variétés algébriques. Amer. J. Math. 79, 319—330 (1957); Errata. Ibid. 81, 279—280 (1959).

Im Anschluß an obige Untersuchungen und unter Benutzung der dort beschriebenen (separablen) unverzweigten Überdeckungen normaler Varietäten V über einem beliebigen Grundkörper k zeigen Verff. unter anderem: 1. Ist $f: U \rightarrow V \times W$ eine unverzweigte Überdeckung und ist V vollständig, so existieren zwei unverzweigte Überdeckungen V' von V und W' von W , so daß U Quotient von $V' \times W'$ ist. — 2. Jede unverzweigte Überdeckung einer abelschen Varietät ist eine separable Isogenie. — 3. Eine vollständige normale Varietät besitzt jeweils nur eine endliche Anzahl unverzweigter Überdeckungen von vorgegebenem Grad. *E. Lamprecht.*

Lang, Serge: On the Lefschetz principle. Ann. of Math., II. Ser. 64, 326—327 (1956).

Verf. zeigt am Beispiel eines Satzes über die Charakterisierung aller unverzweigten abelschen Überdeckungen einer singularitätenfreien vollständigen Kurve C , wie man in Umkehrung eines Prinzips von Lefschetz gewisse Sätze über algebraische Varietäten durch Parameterspezialisierung auf Varietäten über Galoisfeldern beweisen kann. *E. Lamprecht.*

Nagata, Masayoshi: A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains. I. Amer. J. Math. 78, 78—116 (1956).

Verf. entwickelt in vorliegender Arbeit die Grundzüge einer algebraischen Theorie (irreduzibler) algebraischer Mannigfaltigkeiten über Dedekindschen Ringen (= Integritätsbereiche mit ZPI-Satz). Es sei I ein solcher Dedekindscher Ring (die Spezialfälle $I = \text{Körper}$ oder $I = \text{spezieller diskreter Bewertungsring}$ sind mit eingeschlossen), der zudem die Endlichkeitsbedingung für ganze Erweiterungen erfüllt (= eingeschränkter Fall), d. h. jede ganze Erweiterung I' von I , deren Quotientenkörper endlich-algebraisch über dem von I ist, ist ein endlicher I -Modul; diese Zusatzvoraussetzung wird an einigen Stellen nicht benötigt. — Kap. 1. Nach Herleitung einer Verallgemeinerung des Normalisierungssatzes betrachtet Verf. affine Ringe \mathfrak{o} über I (= über I endlich-erzeugbare Integritätsbereiche) und Funktionenkörper L über I (= Quotientenkörper von affinen Ringen über I). Ein Ring P heiße eine Lokalität (= spot) über dem Grundring I , wenn ein affiner Ring \mathfrak{o} über I und ein Primideal \mathfrak{p} von \mathfrak{o} existiert, so daß $P = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ist; ein Teilring B von P heißt Basisring, wenn P Lokalität über B ist, B ein Bewertungsring oder Körper ist, P dominiert B und wenn der Restklassenkörper von P endlich-algebraisch über dem von B ist. Die hier eingeführten Lokalitäten sind leichte Verallgemeinerungen der geometrischen Stellenringe und haben weitgehend analoge Eigenschaften: Summe von Rang und Corang eines Primideals ist gleich dem Rang von P (entsprechendes gilt für affine Ringe); eine Lokalität P ist analytisch unverzweigt; die vollständige Hülle eines normalen P ist ein normaler Ring; der abgeleitete normale Ring eines P ist endlicher P -Modul (entsprechendes gilt für affine Ringe). — Kap. 2. Ein Bewertungsring oder Körper, der Quotientenring von I ist, heißt eine Grundstelle (= ground place) von I ; ein Bewertungsring \mathfrak{v} eines Funktionenkörpers L über I , der eine Grundstelle dominiert, heißt eine Stelle (= place) von L über I . Zwei Lokalitäten P und P' von L über I korrespondieren, wenn es eine Stelle \mathfrak{v} von L über I gibt, die P und P' dominiert; Kriterium für das Korrespondieren zweier Lokalitäten. Ein affines Modell von L über I ist die Gesamtheit der Lokalitäten eines affinen Ringes \mathfrak{o} für L über I ; ein Modell M von L über I ist die Vereinigungsmenge der Lokalitäten endlich vieler affiner Ringe von L über I , falls niemals zwei Lokalitäten von M korrespondieren; ein Modell heißt vollständig, wenn jede Stelle von L über I mindestens eine Lokalität aus M dominiert; die Exi-

stenz und Vollständigkeit eines zu einem affinen Ring zugehörigen projektiven Modells wird nachgewiesen. Ein quasi-lokaler (d. h. nicht notwendig noetherscher) Ring P heißt Spezialisierung eines ebensolchen Ringes P' , wenn P' Quotientenring von P ist; Eigenschaften von Spezialisierungen von Lokalitäten und Stellen. Verf. definiert die Verbindung ($=$ join) $J(P, P')$ bzw. $J(M, M')$ von Lokalitäten bzw. Modellen mit eventuell verschiedenen Funktionenkörpern und zeigt, daß sich die Modelleigenschaft (einschließlich Affinität bzw. Projektivität bzw. Vollständigkeit auf $J(M, M')$ überträgt; entsprechendes gilt für die abgeleiteten normalen Modelle bei endlich-algebraischen Erweiterungen des Funktionenkörpers. Die Gesamtheit der Lokalitäten eines Modells M , die aus einem festen $P \in M$ durch Spezialisierung hervorgehen, heißt der geometrische Ort $M(P)$ von P in M ; eine Teilmenge E von M heißt irreduzibel, wenn ein $P \in M$ existiert, so daß $E \subseteq M(P)$ und $E \not\subseteq \bigcup_i M(P_i)$ für endlich viele $P_i \in M(P)$, $P_i \neq P$; P heißt dann erzeugende Lokalität von E . Nennt man eine Teilmenge F von M abgeschlossen, falls mit $P \in F$ auch $M(P) \subseteq F$ ist und falls F mit jeder irreduziblen Menge E auch deren erzeugende Lokalität enthält, so wird durch die Familie der abgeschlossenen Mengen F die Zariski-Topologie auf M erklärt; bei affinen Modellen ist diese wie üblich charakterisiert; ebenso gelten die anderen dem Körperfall entsprechenden Eigenschaften. — Verf. führt induzierte Modelle (entsprechend Teilmannigfaltigkeiten), insbesondere solche, die durch Primideale \mathfrak{p} von I induziert sind, und reduzierte (lokale) Modelle ein. Schließlich wird für $I = \text{Körper}$ die Äquivalenz des Modellbegriffs mit dem der abstrakten Mannigfaltigkeit im Sinne von A. Weil nachgewiesen.

E. Lamprecht.

Nagata, Masayoshi: A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains. II. Amer. J. Math. 80, 382—420 (1958).

In Fortführung der im vorstehenden Referat geschilderten Untersuchungen (die Bezeichnungen seien wie dort gewählt) gibt Verf. einige Ergebnisse über separabel-erzeugbare Erweiterungen und reguläre Stellenringe an, wobei hier der nicht eingeschränkte Fall betrachtet wird. — Kap. 3. Nach einigen Bemerkungen über Tensorprodukte von Ringen $\mathfrak{o} \otimes_I \mathfrak{o}'$ führt Verf. lokale Tensorprodukte $\mathfrak{o} \times_I \mathfrak{o}'$ ($\mathfrak{o}, \mathfrak{o}' = \text{semilokale Ringe, die } I \text{ enthalten; } \mathfrak{o} \times_I \mathfrak{o}' = \mathfrak{t}_S$, wobei $\mathfrak{t} = \mathfrak{o} \otimes_I \mathfrak{o}'$ und S der Durchschnitt der Komplemente der Primteiler von $\mathfrak{p} \mathfrak{t} + \mathfrak{p}' \mathfrak{t}$ ist, und \mathfrak{p} bzw. \mathfrak{p}' alle maximalen Ideale von \mathfrak{o} bzw. \mathfrak{o}' durchlaufen) und vollständige Tensorprodukte $\mathfrak{o} \otimes_I \mathfrak{o}'$ ein (vollständige Hülle von $\mathfrak{o} \times_I \mathfrak{o}'/n$, wobei n das J -Radikal von $\mathfrak{o} \times_I \mathfrak{o}'$ ist). Ein Integritätsbereich \mathfrak{o} heißt separabel-erzeugbar über I bzw. reguläre Erweiterung von I , wenn zwischen den zugehörigen Quotientenkörpern die entsprechende Beziehung besteht; falls I ein Dedekindscher Ring ist, gelten hierfür zum Körperfall formal analoge Kriterien. Neben einem Normalisierungssatz zeigt Verf., daß bei Reduktion nach fast allen \mathfrak{p} von I die separable Erzeugbarkeit, die Regularität von \mathfrak{o} über I , sowie die absolute Irreduzibilität von Polynomen erhalten bleibt (vgl. auch Shimura, dies. Zbl. 65, 367). Neben einer Verallgemeinerung eines Lemmas von Zariski über reguläre Erweiterungen werden Bedingungen angegeben, unter denen das Tensorprodukt von normalen Ringen wieder normal ist. — Kap. 4. Ringerweiterungen regulärer und normaler Stellenringe, quadratische Transformationen, Quotientenringe regulärer Stellenringe. Ein regulärer Stellenring \mathfrak{r} mit dem Semi-Grundring I heißt unverzweigt über I , wenn entweder $I/I \not\subseteq \mathfrak{r}$ oder wenn ein Primelement von $I_{(\mathfrak{m} \cap I)}$ nicht in \mathfrak{m}^2 liegt ($\mathfrak{m} = \text{maximales Ideal von } \mathfrak{r}$); ist zusätzlich die Restklassenkörpererweiterung separabel-erzeugbar, so heißt \mathfrak{r} stark unverzweigt über I ; die Unverzweigtheit überträgt sich auf Quotientenringe $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p}}$. Reguläre Stellenringe \mathfrak{o} sind ZPE-Ringe, wenn entweder der Rang $r \leq 2$ ist oder wenn \mathfrak{o} (absolut) unverzweigt ist oder wenn \mathfrak{o} stark unverzweigt über einem Semi-Grundring ist. Ferner zeigt Verf.:

Wenn jeder reguläre Stellenring vom Rang 3 ZPE-Ring ist, so ist jeder reguläre Stellenring ein ZPE-Ring. — Im Anhang 1 zeigt Verf., daß für jede einfache Lokalität P und jedes Primideal \mathfrak{p} von P im eingeschränkten Fall $P_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer Stellenring ist. Anhang 2 enthält einige Bemerkungen zum nicht eingeschränkten Fall.

E. Lamprecht.

Zahlentheorie:

Lambek, J. and L. Moser: On some two way classifications of integers. Canadian math. Bull. 2, 85—89 (1959).

Mittels erzeugender Funktionen (geometrische Reihe, unendliche Produkte) wird 0, 1, 2, ... in zwei Klassen

$$(1) \quad \begin{array}{cccccccccccc} A_v = 0, & \overset{\uparrow}{3}, & \overset{\uparrow}{5}, & \overset{\uparrow}{6}, & \overset{\uparrow}{9}, & 10, & 12, & \overset{\uparrow}{15}, & \dots & \left(\begin{array}{l} \downarrow \uparrow \text{ Wachstums-} \\ \text{pfeile des Ref.} \end{array} \right) \\ B_v = 1, & 2, & 4, & 7, & 8, & 11, & 13, & 14, & \dots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

nach folgenden weiteren drei äquivalenten Vorschriften zerlegt: 1. Die (2) $A_\mu + A_\nu$ und $B_\mu + B_\nu$ ($\mu \neq \nu$) sollen die gleichen Zahlen in gleicher Vielfachheit sein. 2. Für $2^k \leq n < 2^{k+1}$ sollen n und $n - 2^k$ in verschiedenen Klassen liegen. 3. Die Quersumme der Binärzahlen A_v sei gerade, die der Binärzahlen B_v ungerade (Bem.: Hieraus die einfache Erzeugung: $\overset{A_v}{B_v}$ sind 2 Zahlen $n, n + 1$; n und $2n$ liegen in der gleichen Klasse). Hinzugefügt sei 4. 0, 1, 2, ... wird wie oben in (1) fortlaufend in Paaren $\begin{smallmatrix} n \\ n+1 \end{smallmatrix}$ bzw. $\begin{smallmatrix} n+1 \\ n \end{smallmatrix}$ derart geschrieben, daß die auf die ersten 2^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) Paare folgenden 2^k Paare das umgekehrte Wachstum (Pfeile) zeigen. Diese Abschnitte weisen somit abwechselnd symmetrisches und antisymmetrisches Wachstumsverhalten auf. — Im Produktfall $C_\mu C_\nu$ und $D_\mu D_\nu$ statt (2) lautet die Klasseneinteilung von 1, 2, 3, ...

$$(3) \quad \begin{array}{cccccccc} C_v = 1, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 15, & \dots \\ D_v = 2, & 3, & 4, & 5, & 7, & 9, & 11, & \dots \end{array}$$

mit der Regel: $C_v = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ hat eine gerade Summe von Quersummen der Binärzahlen r_1, \dots, r_k , und D_v eine ungerade (p_k prim). — Als einzigen finiten Fall gibt es bei der Addition 0, 1, 2, ..., $2^k - 1$ ($k = 2, 3, 4, \dots$). Beim Produkt gibt es jedoch nur den infiniten Fall (3). *I. Paasche.*

Carlitz, L.: A special higher congruence. Elemente Math. 15, 75—76 (1960).

Beziehungen zwischen den Lösungen von $x^{p+2} + ax^p + bx + c \equiv 0 \pmod{p^2}$ und $x^2 + (a+b)x + c \equiv 0 \pmod{p}$.

Rokowska, B. et A. Schinzel: Sur un problème de M. Erdős. Elemente Math. 15, 84—85 (1960).

P. Erdős a posé le problème suivant: existe-t-il un nombre premier $p > 5$ tel que les résidus mod p des nombres $2!, 3!, \dots, (p-1)!$ sont tous distincts? Le but de cette note est de démontrer que dans ce dernier cas 1. aucun des nombres $2!, 3!, \dots, (p-1)!$ n'est congruent mod p au nombre $-(\frac{1}{2}(p-1))!$. 2. $p \equiv 5 \pmod{8}$.

Hanneken, C. B.: Irreducible congruences over $GF(p)$. Proc. Amer. math. Soc. 10, 18—26 (1959).

In the paper: An invariant investigation of irreducible binary modular forms [Trans. Amer. math. Soc. 12, 1—18 (1911)], L. E. Dickson gives a classification of the irreducible binary modular forms under the group of all binary linear homogeneous transformations of determinant unity in $GF(p^n)$. Author considers irreducible m -ic congruences

$$C_m(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m \equiv 0 \pmod{p}$$

belonging to $GF(p)$ under the group of transformations $z = (az' + b)/(cz' + d)$, with coefficients in $GF(p)$. A classification under the subgroup of transformations

with determinant a square follows from Dickson's results. Using these and the invariants π_m the author finds theorems on the number of conjugate sets of irreducible congruences and the number of congruences in each conjugate set. These numbers are given for $m = 2, 3, \dots, 8$.
J. H. van Lint.

Skolem, Th., S. Chowla and D. J. Lewis: The Diophantine equation $2^{n+2} - 7 = x^2$ and related problems. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 663—669 (1959).

Mit Hilfe der p -adischen Methode von Skolem wird gezeigt, daß $2^{n+2} - 7 = x^2$ genau 5 ganzzahlige Lösungen hat. Verff. haben übersehen, daß dasselbe Resultat bereits 1956 in anderer Form von A. Browkin-A. Schinzel (dies. Zbl. **70**, 271) bewiesen wurde.
B. Stolt.

Golubiew, W.: On twin numbers. Prace mat. **2**, 352—354, russ. und engl. Zusammenfassung 354 (1958) [Polnisch].

The article contains information on the problem of twin numbers. (The author's summary).
A. Schinzel.

Kuhn, P.: Über ein Problem in der Theorie der Primzahlen. Ark. Mat. **4**, 1—14 (1960).

Verf. gibt einen elementaren Beweis einer Vermutung von Lehmer aus dem Jahre 1900, die von Landau unter Verwendung funktionentheoretischer Hilfsmittel im Jahre 1909 bewiesen wurde. Das Theorem lautet: Es seien verschiedene zu k teilerfremde Restklassen $ky + l_i$, $i = 1, 2, \dots, \lambda$, gegeben. Es sei $\eta = \lambda/\varphi(k)$, $\theta(1) = 1$, und für $n > 1$, $\theta(n) = 1$ oder 0 je nachdem alle Primzahlen von n einer jener λ Klassen angehören oder nicht. Dann existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \leq x} \theta(n) x^{-1} \log^{1-\eta} x$

und ist > 0 . Im ersten und schwierigsten Abschnitt des Beweises wird gezeigt, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n \leq x} \theta(n) n^{-1} \log^n x = B_0$, wobei B_0 eine positive Konstante ist. Aus diesem Resultat folgt dann das Theorem ziemlich leicht im zweiten Abschnitt, indem man den Primzahlsatz für die arithmetischen Progressionen verwendet.

S. Selberg.

Blij, F. van der: Simultaneous representation of integers by a quadratic and a linear form. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. **7**, 109—114 (1959).

Verf. betrachtet erneut (vgl. dies. Zbl. **32**, 12) das diophantische Gleichungssystem in n Variablen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*) $x'Sx = \alpha$, $x'a = \beta$, S ganzzahlige positiv-definite symmetrische Matrix, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ primitiver Vektor. Bekanntlich ist die Anzahl der Lösungen von (*) gleich der Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch eine definite quadratische Form in $n - 1$ Variablen, wobei die Lösungen noch gewisse Kongruenzbedingungen erfüllen. Dieser Zusammenhang führt, vermittels der zugehörigen „singular series“, zu geeigneten Definitionen von Geschlecht und Klasse in bezug auf Systeme (*). Verf. gibt lediglich eine Skizze.

H. Braun.

Lomadse, G.: Über die Darstellung der Zahlen durch einige quaternäre quadratische Formen. Acta arithmetica **5**, 125—170 (1959).

Es bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Darstellungen von $n > 0$ durch die Form $a(x_1^2 + x_2^2) + a'(x_3^2 + x_4^2)$. Sei ϱ die zu $r(n)$ gehörige singuläre Reihe und

$$\Theta(\tau) = 1 + \sum_{M=1, M \equiv 0(4aa')}^{\infty} \varrho(M) e\left(\frac{\tau M}{4aa'}\right).$$

Es wird gezeigt, daß Θ eine ganze Modulform der Stufe $4aa'$ und der Dimension -2 ist. In einigen Fällen kann man Beziehungen zwischen Θ und bestimmten Thetafunktionen mit Charakteristiken $\theta_{\rho h}$ finden, indem man zeigt, daß eine Kombination dieser Funktionen eine Thetafunktion ist, die zu viel Nullstellen in ihrem Fundamentalebereich hat, d. h. identisch Null ist. Die Rechnungen sind lang aber elementar. Auf diese Weise zeigt Verf. z. B.

$$\theta_{00}^2(\tau; 0, 2) \theta_{00}^2(\tau; 0, 10) = \Theta(\tau; 5) + \frac{8}{3} \theta_{21}^2(\tau; 0, 10) \theta_{61}^2(\tau; 0, 10)$$

und erhält so eine exakte Formel für $r(n)$ im Falle $a = 1, a' = 5$. Die Rechnungen werden auch durchgeführt für $a = 1, a' = 6, 7, 9, 10$ und $a = 2, a' = 5$. Die Methode ist von Kloosterman [Proc. London math. Soc., II. Ser. 25, 143—173 (1926)]. Die Formeln für $a = 1, a' = 5, 6, 7$ stimmen mit den Kloostermanschen überein. Statt Jacobischen Funktionen werden aber Thetafunktionen gebraucht wie es auch Streiefkerk: Über die Anzahl der Lösungen der diophantischen Gleichung
$$u = \sum_{i=1}^s (A x_i^2 + B x_i + C) \quad (\text{Diss. Amsterdam 1943})$$
 gemacht hat. *J. H. van Lint*.

Ehrhart, E.: Sur les polygones et les polyèdres réguliers entiers. Enseignement math., II. Sér. 5, 81—85 (1959).

The author considers the existence of regular integral polygons and polyhedra; i. e., regular polygons and polyhedra whose vertices have integer coordinates. He shows that the only regular integral polygons in the plane are squares and the only ones in "space" are triangles and squares. Thus, there exist no regular integral dodecahedra nor icosahedra. Among other things he finds two "three parameter" families of integral cubes and asks if there are other such families. He relates the problems to certain diophantine systems. *J. P. Tull*.

Pommerenke, C.: Über die Gleichverteilung von Gitterpunkten auf m -dimensionalen Ellipsoiden. Acta arithmetica 5, 227—257 (1959).

Sei \mathcal{E} eine positiv definite symmetrische m -reihige Matrix mit ganzrationalen Elementen ($m \geq 4$). Sei H das Ellipsoid $\eta' \mathcal{E} \eta = 1$, auf dem die Metrik mit dem Bogenelement $ds^2 = (d\eta)' \mathcal{E} (d\eta)$ eingeführt wird. Sei weiter Δ ein Bereich auf H , im Jordanschen Sinne meßbar mit dem Flächeninhalt D . E sei der Flächeninhalt von H . Es bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $q' \mathcal{E} q = n$ und $r(\Delta, n)$ die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung mit $q/\sqrt{n} \in \Delta$. Verf. beweist den Satz: Wenn $m \geq 5$ und n unter der Einschränkung $r(n) \neq 0$ gegen ∞ strebt, gilt $r(\Delta, n)/r(n) \rightarrow D/E$. Zum Beweis wird $r(\Delta, n)$ approximiert durch $Dr(n)/E + \sum a_{k\nu}$ wo die $a_{k\nu}$ Ausdrücke der Form $n^{-k/2} \sum_{q' \mathcal{E} q = n} Y_k(\eta)$ sind. Darin ist $Y_k(\eta) = X_k(\mathfrak{I}\eta)$; $\mathcal{E} = \mathfrak{I}' \mathfrak{I}$, X_k = Kugelfunktion k -ten Grades. Durch einen Differentiationsprozeß (vgl. Schoenberg, dies. Zbl. 20, 202) werden aus den der Matrix \mathcal{E} zugeordneten Thetafunktionen Spitzenformen abgeleitet, die die $a_{k\nu}$ als Koeffizienten haben. Für die $a_{k\nu}$ wird dann die Abschätzung von Rankin (dies. Zbl. 21, 392) benutzt. Mit Hilfe der bekannten Abschätzung für $r(n)$ folgt der Satz. *J. H. van Lint*.

Mahler, K.: An arithmetic property of groups of linear transformations. Acta arithmetica 5, 197—203 (1959).

F sei eine Grenzkreisgruppe mit der reellen Achse als Grenzkreis und kompaktem Fundamentalbereich. Ein Orizykel ist ein Kreis (oder eine Gerade) in der oberen Halbebene, der die reelle Achse in genau einem Punkte berührt. Hedlund hat 1936 gezeigt, daß die Bilder eines Orizykels unter F in der oberen Halbebene überall dicht liegen (s. dies. Zbl. 15, 102). Verf. benutzt den Satz von Hedlund, um die folgende Aussage über quadratische Formen zu beweisen: Ist $f(u, v)$ eine positiv definite quadratische Form und sind $S_k: z \rightarrow (\alpha_k z + \beta_k)(\gamma_k z + \delta_k)^{-1}$, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ reell, $\alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$, die Transformationen von F , so liegen die Werte $f(\alpha_k, \gamma_k)$ auf der positiven reellen Achse überall dicht. *K.-B. Gundlach*.

Mulholland, H. P.: On the product of n complex homogeneous linear forms. J. London math. Soc. 35, 241—250 (1960).

Es bedeute $\mathcal{O}_\gamma(n)$ die Menge von $n \times n$ Matrizen A mit γn paarweise konjugiert-komplexen und $(1 - \gamma)n$ reellen Zeilen, wobei $|\det A| = 1$ gilt. Es bedeute ferner $L(A)$ die untere Grenze von $|x_1 x_2 \dots x_n|^{1/n}$ für ganze, nicht sämtlich verschwindende u_1, u_2, \dots, u_n , wobei x_1, x_2, \dots, x_n n lineare Formen in u_1, u_2, \dots, u_n sind mit der

Koeffizientenmatrix A . Es sei jetzt $M_\gamma(n)$ die obere Grenze von $L(A)$ für A aus $\mathcal{C}_\gamma(n)$. Das Hauptresultat (Theorem 2) gibt eine obere Schranke für $M_\gamma(n)$ als Funktion von n und γ , und daraus

$$(1) \quad \mathcal{M}_c = \limsup_{n \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow c} M_\gamma(n) \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{2-3c} \frac{1}{e^{3/2}} \leq \frac{2}{\pi^{1/2} e^{3/2}}.$$

Nach einem Minkowskischen Gedanken läßt sich hieraus

$$(2) \quad d_c = \liminf_{n \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow c} D_n^{1/n} \geq \frac{1}{\mathcal{M}_c^2} \geq \left(\frac{1}{4} \pi \right)^{3c-2} e^3 \geq \frac{1}{4} \pi e^3$$

gewinnen, wobei D_n den kleinsten Absolutbetrag der Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers n -ten Grades mit γn komplexen und $(1-\gamma)n$ reellen Konjugierten bedeutet. Die Arbeit ist eine Verallgemeinerung einer Arbeit von C. A. Rogers über das Produkt von n reellen linearen Formen (dies. Zbl. 34, 316) auf den vorliegenden Fall. Als Hauptinstrument des Beweises wird eine obere Abschätzung von

$$\left\{ \prod_{\sigma \in \Sigma} |z_\sigma - z_\sigma| \right\}^{1/m(m-1)} \left| \frac{\sum |z_\sigma|}{m} \right|$$

für m komplexe Zahlen z_σ ($\sigma = 1, \dots, m$) gegeben. (Theorem 1). Diese stellt eine Verallgemeinerung einer von Rogers für reelle z_σ gegebenen Abschätzung desselben Ausdrucks dar, wird aber mit völlig anderen Hilfsmitteln bewiesen. Dabei wird eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 84, 95) sowie die Theorie des logarithmischen Potentials herangezogen. Das Theorem 2 ergibt sich, wie bei Rogers, aus der Kombination von Theorem 1 mit der Methode von Blichfeldt (dies. Zbl. 13, 345 und 21, 388). Die gleichmäßige obere Schranke für \mathcal{M}_c in (1) ist besser als diejenige von Blichfeldt, $(\pi e)^{-1/2}$, und noch eine kleine Verbesserung von (1) wird gegeben.

O. S. Içen.

Gel'fond, A. O.: Über das Problem der Approximation von algebraischen Zahlen durch rationale. Mat. Prosvesčenie 2, 35—50 (1957) [Russisch].

This expository article in the Russian journal for mathematical education gives a very clear introduction to the theory of algebraic and transcendental numbers and their rational approximations. Contents: 1. Algebraic numbers and number fields. 2. Real numbers as the limits of convergent sequences of rational numbers; their field property, and the derived complex field. The existence of transcendental numbers. 3. The approximation of real numbers by rational numbers, studied by means of continued fractions. Hurwitz's theorem. 4. The convergents of the continued fraction for α as the "best" approximations of α . Quadratic irrationals. 5. Liouville's inequality for algebraic numbers. 6. The theorems of Thue, Siegel, Dyson-Gel'fond, and Roth. 7. The connection of Thue's theorem to binary Diophantine equations.

K. Mahler.

Lawton, B.: A note on well distributed sequences. Proc. Amer. math. Soc. 10, 891—893 (1959).

Let $\{x\} = x - [x]$ denote the fractional part of x . If s_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) is any sequence of real numbers, and $0 \leq a < b \leq 1$, let $N(n, t, a, b)$ be the number of those s_k for which $n+1 \leq k \leq n+t$, $a \leq \{s_k\} \leq b$. The sequence is called well distributed (mod 1) (G. M. Petersen, this Zbl. 72, 283) if $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} N(n, t, a, b) = b - a$ uniformly in n for all a and b . In analogy to classical theorems by H. Weyl [Math. Ann. 77, 313—352 (1916)], the author proves: (1) If the sequence $s_{k+m} - s_k$ is well distributed (mod 1) for each m , then also the sequence s_k is so. — (2) Let at least one of $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \dots, \alpha_1$ be irrational. Then the sequence $s_k = \sum_{\sigma=0}^r \alpha_\sigma k^\sigma$ is well distributed (mod 1).

K. Mahler.

Analysis.

Mengenlehre:

Sedmak, Viktor: Sur les partitions des ensembles. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 12, 17—19 (1957).

Unter einer Partition $r(S)$ der Menge S werde ein System disjunkter Teilmengen X_i mit $\bigcup_i X_i = S$ verstanden. Seien \aleph_α Partitionen $r_i(S)$ ($0 \leq i < \omega_\alpha$) einer Menge S mit $kS \geq \aleph_\alpha$ gegeben, wobei $k r_i(S) = \aleph_\alpha$ sei (kM = Mächtigkeit der Menge M). Von De Groot wurde die Frage aufgeworfen, ob es unter diesen Voraussetzungen immer möglich sei, Mengen $X_i \in r_i(S)$, $0 \leq i < \omega_\alpha$, so auszuwählen, daß noch $k(S - \bigcup_i X_i) \geq \aleph_\alpha$ bleibt? — Verf. zeigt, daß im Fall $\alpha = 0$ die Frage zu bejahen ist, sogar unter der zusätzlichen Forderung, daß auch $k \bigcup_i X_i \geq \aleph_\alpha$ sein soll.

W. Neumer.

Zakon, Elias: On common multiples of transfinite numbers. Canadian math. Bull. 3, 31—33 (1960).

Im Anschluß an eine Bemerkung in H. Bachmanns „Transfinite Zahlen“ (dies. Zbl. 65, 35), S. 81 werden hier einige Sätze über gemeinsame rechtsseitige Vielfache von Ordinalzahlen aufgestellt: so ist z. B., wenn α und β ($\alpha \geq \beta > 0$) ein gemeinsames rechtsseitiges Vielfaches haben, das kleinste solche von der Form $c\alpha = \alpha + c_1$ mit endlichen c und c_1 .

H. Hornich.

Michael, E.: A class of partially ordered sets. Amer. math. Monthly 67, 448—449 (1960).

Einige einfache Bemerkungen über (teilweise) geordnete Mengen, welche die Minimalbedingung (absteigende Kettenbedingung) erfüllen und keine unendlichen, total ungeordneten Teilmengen besitzen.

G. Bruns.

Kurepa, G.: On a new reciprocity, distribution and duality law. Pacific J. Math. 7, 1125—1143 (1957).

Sei E eine beliebige Menge, \mathfrak{M} ein System von Teilmengen von E und f eine (eindeutige) Abbildung von E in die Potenzmenge einer beliebigen Menge. Es wird die Operation $\mathfrak{M} \rightarrow \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \bigcap_x f(x) = (\mathfrak{M}, \bigcup, f)$ ($x \in M \in \mathfrak{M}$) untersucht, wobei $\bigcup \in \{\bigcup, \bigcap\}$, $\bigcup' = \bigcap$ und $\bigcap' = \bigcup$ ist. Bei Vorgabe eines weiteren Systems \mathfrak{N} von Teilmengen von E gilt $(\mathfrak{M}, \bigcap, f)' = (\mathfrak{N}, \bigcap, f')$ (\dots' Komplement) genau dann für alle f , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: (j): wenn $M \in \mathfrak{M}$ und $N \in \mathfrak{N}$, so $M \cap N \neq \emptyset$; (k): wenn $X \subseteq E$ und für alle $M \in \mathfrak{M}$ stets $X \cap M \neq \emptyset$ gilt, so enthält \mathfrak{N} eine Teilmenge von X als Element. Dabei ist (j) mit der Inklusion \supseteq und (k) mit der Inklusion \subseteq gleichbedeutend, und jede dieser beiden Bedingungen ist symmetrisch. Es ergeben sich nun sehr allgemeine Formulierungen der im Titel genannten Gesetze, wenn man das zitierte Resultat auf die folgenden Spezialfälle anwendet: E (teilweise) geordnete Menge, \mathfrak{M} System aller maximalen Ketten aus E , \mathfrak{N} System aller maximalen Antiketten aus E , die sich mit jeder maximalen Kette schneiden. Und: \mathfrak{M} System aller maximalen Antiketten aus E , \mathfrak{N} System aller maximalen Ketten aus E , die sich mit jeder maximalen Antikette schneiden. In beiden Fällen ist die Bedingung (j) automatisch erfüllt, und für das Erfülltsein von (k) werden einfache hinreichende Kriterien angegeben. Dabei wird dem Fall, daß E ein Baum (d. h. jeder Hauptanfang aus E wohlgeordnet) ist, besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

G. Bruns.

Novotný, Miroslav: Über quasi-geordnete Mengen. Czechosl. math. J. 9 (84), 327—333 (1959).

„In der Arbeit werden zwei verschiedene Arten von \aleph_n -universellen Mengen für quasi-geordnete Mengen konstruiert. Unter einer m -universellen Menge wird hier eine Menge mit einer binären Relation verstanden, die zu jeder quasi-geordneten

Menge, deren Mächtigkeit höchstens gleich m ist, eine isomorphe Teilmenge enthält.“ (Aus der Einleitung des Verf.) 1. Die Mengen vom Typus $\aleph_\nu \oplus \aleph_{\nu+2}$ sind \aleph_ν -universell. Dabei wird die Potenz ${}^X X$ nach Birkhoff [Lattice Theory, rev. Ed. (1948; dies. Zbl. 33, 101), p. 9] definiert, ist also die konstruierte universelle Menge selbst nicht mehr quasi-geordnet. 2. Die Menge $F(\omega_{\nu+2}, \aleph_\nu)$ aller Abbildungen von $\omega_{\nu+2}$ in eine Menge der Mächtigkeit \aleph_ν mit der Teilfolge-Relation ist \aleph_ν -universell.
G. Bruns.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Mickle, Earl J.: On a closure property of measurable sets. Proc. Amer. math. Soc. 9, 688—689 (1958).

Es sei $u|x$ eine nicht negative, reelle Maßfunktion über dem (Voll-)Verband x der Teilmengen einer Grundmenge X ; also $u(\emptyset) = 0$; $u(E') \leq u(E'')$ für $E' \subset E''$; $u(E) \leq \sum u(E_\nu)$, wenn $E = \bigcup E_\nu$. Es sei $m(u) \subset x$ der σ -Verband aller u -meßbaren Mengen. Jedem Teilsystem t von x sei ein Teilsystem $s(t) \subset x$ zugeordnet mit $t \subset s(t)$ und mit $s(t') \subset s(t'')$ für $t' \subset t''$. — Verf. zeigt: Gilt $s(m(u)) = m(u)$ für jedes endliche reguläre $u|x$ (bei festem x), dann gilt $s(m(u)) = m(u)$ überhaupt für jedes $u|x$ (bei diesem x). — Der Beweis ist einfach. Als Spezialfall ergibt sich der bekannte Satz: Ist s die Suslinsche Operation (A) [vgl. z. B. S. Saks, Theory of the integral (Warschau-New York 1937; dies. Zbl. 17, 300), S. 47], so gilt $s(m(u)) = m(u)$ für jedes u ; man braucht nämlich nach obigem nur den viel leichter zu behandelnden [vgl. Saks, a. a. O., S. 48, 2. Absatz (Kleingedrucktes)] Fall regulärer u zu erledigen.

Otto Haupt.

Mickle, E. J. and T. Radó: A uniqueness theorem for Haar measure. Trans. Amer. Math. Soc. 93, 429—508 (1959).

The authors discuss uniqueness of Haar measure in any separable metric space X . For any point $x \in X$ and $r > 0$, $c(x, r)$ denotes the set of all points of X whose distance from x does not exceed r . It is assumed that X possesses a family $H = \{h\}$ of homeomorphisms h of X onto itself satisfying the condition (c) for any pair x_1, x_2 of points of X there are positive constants l, L, R and an element $h \in H$ such that $h(x_1) = x_2$ and $c(x_2, lr) \subset h[c(x_1, r)] \subset c(x_2, Lr)$ for all $0 < r < R$. By a Haar measure it is meant a measure m on the family of the Borel subsets of X such that $m[h(B)] = m(B)$ for all Borel subsets of X and all $h \in H$. A measure m is said to be non trivial if $m(G) > 0$ for some bounded open set $G \subset X$. The following main theorem is proved: Let m_1, m_2 be Haar nontrivial measures in X relative to the same family H of homeomorphisms satisfying (c). Assume that for every bounded set $E \subset X$ there are finite positive constants $k(E), K(E)$ such that $m_2[c(x, 5r)] \leq K(E) m_2[c(x, r)]$ for all $x \in E$, and $0 < r < k(E)$. Then there is a constant g such that $m_1(B) = g m_2(B)$ for every Borel set $B \subset X$. This uniqueness theorem for Haar measures is more general than usual and does not involve the existence of an invariant distance. An application is made to the case, which has motivated the present research, where X is the space of all oriented straight lines in E_3 . For the proof of the main theorem a number of density theorems are proved and the following covering theorem is of interest by itself: Let σ, A be outer Carathéodory measures in X such that for every bounded set $E \subset X$ there are constants $k(E), K(E)$ with $\sigma[c(x, 5r)] < K(E) \sigma[c(x, r)]$. Let B be a Borel subset of X and F a Borel covering of B such that for every $x \in B$ there exists a set $S_x \in F$ with $x \in S_x$ and whose upper A -density with respect to σ at x is positive. Then, there exists a sequence S_i of sets $S_i \in F$ such that $\sigma[(B - \bigcup S_i)] = 0$.
L. Cesari.

Pi Calleja, Pedro: Über die konstruktive Bestimmung des Haarschen Maßes in lokalkompakten metrischen Räumen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 19, 5—17 (1959) [Spanisch].

This is essentially an expository paper on Haar measure on a locally compact group. In particular, the author discusses the construction given in S. Banach's note (S. Saks, *Theory of the integral*, this Zbl. 17, 300) and makes various remarks.
C. Ionescu Tulcea.

Silverman, E.: A miniature theory of Lebesgue area. *Amer. math. Monthly* 67, 424—430 (1960).

In the present paper the author considers positively regular Weierstrass-type line integrals over a rectifiable curve and shows that their main properties, as existence, representation, and lower semicontinuity, can be elegantly obtained by the same process which is used for the usual Jordan length. Then some of the typical arguments of Lebesgue area theory are rephrased, with simplifications, in this one-dimensional situation.
L. Cesari.

Král, Josef: On curvilinear integrals in the plane. *Czechosl. math. J.* 7 (82), 584—597, engl. Zusammenfassung 597—598 (1957) [Russisch].

Angenommen, daß $V_0(a, b)$ das System aller Funktionen $f = f_1 + i f_2$ sei, wobei $f_j(t)$ ($j = 1, 2$) reelle, stetige Funktionen mit beschränkter Variation auf dem Intervall $\langle a, b \rangle$ sind und $f(a) = f(b)$ ist, und daß $v = [v_1, v_2]$ ein stetiger Vektor auf der Menge $f(\langle a, b \rangle)$ ist. Der Verf. setzt $\int_f (v_1 dx + v_2 dy) = \int_a^b v_1(f_1(t)) df_1(t) + \int_a^b v_2(f_2(t)) df_2(t)$, und $\text{ind}_f z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta - z}^1 d\zeta$, $z \notin f(\langle a, b \rangle)$; für jedes Quadrat K bezeichnet er mit H_K eine Funktion aus $V_0(a, b)$, so daß $H_K(t)$ im positiven Sinne den Rand von K durchläuft, wenn t das Intervall $\langle a, b \rangle$ beschreibt. Folgender Satz wird bewiesen: Es seien: $f^k \in V_0(a_k, b_k)$, $k = 1, \dots, m$; $C = \bigcup_1^m f^k(\langle a_k, b_k \rangle)$;

$\omega(z) = \sum_1^m \text{ind}_{f^k} z$, $z \notin C$; $G_p = \{z | z \notin C, \omega(z) = p\}$; $G = \bigcup_{p \neq 0} G_p$; v ein stetiger Vektor auf $G \cup C$ und γ eine Funktion auf G , so daß für jedes $K \subset G$, $\int_K \gamma d\mu = \int_{H_K} (v_1 dx + v_2 dy)$ (μ — das ebene Lebesguesche Maß). Wenn die Integrale $\int_{G_p} \gamma d\mu$, $p \neq 0$, existieren, so besteht die Beziehung: $\sum_{k=1}^m \int_{f^k} (v_1 dx + v_2 dy) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{p \geq l} \left(\int_{G_p} \gamma d\mu - \int_{G_{-p}} \gamma d\mu \right) \right)$. Man kann die rechte Seite durch die Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} p \left(\int_{G_p} \gamma d\mu - \int_{G_{-p}} \gamma d\mu \right)$ — wenn sie konvergiert — bzw. durch das Integral $\int_G \omega \gamma d\mu$ — wenn es im Sinne von Lebesgue existiert, ersetzen. Ähnliche Betrachtungen werden für die Integration komplexer Funktionen angestellt. Im besonderen erhält man den Satz von Cauchy.
C. Andreian Cazacu.

Zíték, František: Über die Burkill'schen Integrale, die von einem Parameter abhängen. *Časopis Mat.* 84, 165—174, russ. und deutsche Zusammenfassung 174—176 (1959) [Tschechisch].

In der Arbeit werden Sätze über Burkill'sche Integrale, welche von einem Parameter abhängen, bewiesen. Es seien hier einige von ihnen formuliert, wobei stets K ein gegebenes halboffenes Intervall, \mathfrak{K} das System aller halboffenen Intervalle in K , X eine Menge reeller Zahlen, f eine Funktion auf $\mathfrak{K} \times X$ und $F(K, x) = \int_K f(I, x)$ (wenn es existiert) bezeichnet. Satz 5: Es sei f stetig in x_0 , und $F(K, x)$ konvergiere gleichmäßig in einer Umgebung von x_0 . Dann ist $F(K, x_0)$ stetig in x_0 . Satz 7: Es

existerie $f'(I, x)$ für alle $I \in \mathfrak{K}$ und $x \in X$, $F(K, x_0)$ konvergiere mindestens für ein $x_0 \in X$, $\int_K f'(I, x)$ konvergiere gleichmäßig in X . Dann konvergiert $F(K, x)$ gleichmäßig in X und $\frac{d}{dx} F(K, x) = \int_K f'(x)$. Satz 8: Es sei f stetig in $X = [c, d]$,

$F(K, x)$ konvergiere gleichmäßig in X . Dann gilt $\int_K \int_c^y f(I, x) dx = \int_c^y F(K, x) dx$.

M. Jiřina.

O'Keefe, Jeremiah: Singularities of Hadamard's finite part of improper integrals in the distributions of Schwartz. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 6, 65—82 (1957).

L'A. rappelle la définition de la partie finie (p. f.) d'une intégrale divergente

$$\text{p. f. } \int_a^b (x-a)^{-r-\mu} A(x) dx, \quad r > 0 \text{ entier, } 0 < \mu < 1,$$

$A(x) \in C^r$ au voisinage de $x = a$ et l'envisage comme prolongement analytique de

$$F(s) = \int_a^b A(x) (x-a)^{s-1} dx;$$

il considère ensuite le cas où $A(x)$ est remplacé par $A(x) \log(x-a)$. Il rappelle les propriétés fondamentales des pf: invariance par rapport à un homéomorphisme $x = x(t)$, indéfiniment différentiable; dérivation sous le signe d'intégration par rapport à a (pour ces questions et les suivantes, cf. F. Bureau, ce Zbl. 64, 92). Il montre comment les résultats précédents peuvent être interprétés dans la théorie des distributions de L. Schwartz et dans celle de l'intégrale de Riemann-Liouville, d'après M. Riesz. Il utilise les résultats précédents pour obtenir des généralisations de formules classiques, habituellement démontrées en utilisant le prolongement analytique. Citons l'intégrale infinie de Weber et la première intégrale (finie) de Sonine. L'A. considère ensuite dans l'espace euclidien R^k , les pseudo-fonctions radiales p. f. r^s et p. f. $r^s \log r$, $r^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2$ et en introduisant des facteurs de convergence, obtient diverses relations de récurrence. Enfin, il étend les résultats précédents à l'espace de Lorentz avec la métrique $ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^{k-1} dx_i^2$.

F. J. Bureau.

Shukla, U. K.: On points of non-symmetrical differentiability of a continuous function. III. Ganita 8, 81—104 (1957).

In Weiterführung vorangegangener Arbeiten des Verf. zum gleichen Thema (dies. Zbl. 45, 335; 53, 227) wird in der vorliegenden Note die Existenz und Konstruierbarkeit stetiger Funktionen nachgewiesen, welche auf überall dichten Punktmenge nicht symmetrisch differenzierbar sind. Der Aufbau der im Beweis verwendeten arithmetischen Hilfsfunktionen erfordert viele Fallunterscheidungen.

W. Maier.

Shamir, E.: On the existence of continuous nowhere differentiable functions. Bull. Res. Council Israel, Sect. F 7, 77—82 (1958).

Una funzione $f(x)$, definita sull'asse reale, dicesi differenziabile in x_0 rispetto all'insieme S (con x_0 punto d'accumulazione per S) se il rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ converge ad un limite finito quando $x \rightarrow x_0$ su S . Se β é un numero tale che $0 < \beta < 1$, l'insieme S dicesi „geometric (β) “ in x se, per ogni s maggiore di x e tale che $s \in S$ (chiusura di S) esiste almeno un $t \in S$ tale che $x < t < s$ e tale inoltre che $\frac{t-x}{s-x} \geq \beta$. L'A., date queste definizioni, dimostra che, indicato, per ogni

x , con S_x un insieme che sia „geometric (β) “ in x , esiste una funzione continua in tutti i punti dell'asse reale, la quale è nondifferenziabile in ogni fissato x rispetto ad S_x . L'A. fa anche notare che la condizione per S_x di essere „geometric (β) “ non è necessaria per la validità del teorema. Da ultimo, l'A. fa vedere che esiste una famiglia di successioni $\{t_n^x\}$, $0 \leq x \leq 1$, tale che: $t_n^x \rightarrow x$ e tale inoltre che, per ogni funzione continua $f(x)$ esiste almeno un punto x_0 in corrispondenza al quale la f è differenziabile rispetto all'insieme $\{t_n^{x_0}\}$. L. de Vito.

Iosifescu, Marius: Sur les fonctions continues dont les ensembles de niveau sont au plus dénombrables. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. **3**, 439—441 (1958).

L'A. mostra con un esempio che il teorema di A. Marchaud, secondo il quale ogni funzione reale f , continua, avente insiemi di livello finiti, è quasi ovunque derivabile (questo Zbl. **7**, 30), cessa di esser vero se si ammette che ciascuno degli insiemi di livello di f sia al più numerabile. Il teorema citato di A. Marchaud è valido anche per le funzioni che godono della proprietà di Darboux e sono inoltre tali che ogni punto x , che non appartenga ad un insieme di misura nulla, sia punto isolato dell'insieme di livello relativo al valore $f(x)$ (S. Marcus, questo Zbl. **77**, 273). L'A., a questo proposito, porta un esempio di funzione verificante la proprietà di Darboux, avente ciascuno dei suoi insiemi di livello al più numerabile, la quale tuttavia è discontinua in ogni punto. L. de Vito.

Albuquerque, J.: Sur les fonctions implicites définies par système d'équations. Univ. Losbaio, Revista Fac. Ci., II. Ser. A **6**, 269—280 (1957—1958).

L'A. dimostra il ben noto teorema del Dini sulle funzioni implicite, in ipotesi più generali di quelle classiche. Si indichi con $f_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$, una n -upla di funzioni definite in un aperto di S_{m+n} e si supponga che $f_i(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Allora, se le f_i sono dotate di derivate prime continue in questo aperto e se esiste una permutazione degli indici $1, \dots, n$: i_1, \dots, i_n tale che $\frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_1} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial y_2} \dots \frac{\partial f_{i_n}}{\partial y_n} \neq 0$, il sistema $f_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$, $i = 1, \dots, n$, è risolubile rispetto alle y_1, \dots, y_n in un intorno di $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$. Le soluzioni di tale sistema: $y_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, n$, risultano continue in un intorno di (a_1, \dots, a_m) e sono tali che $y_i(a_1, \dots, a_m) = b_i$, $i = 1, \dots, n$. Inoltre, l'intorno sudetto di (a_1, \dots, a_m) può esser preso in modo tale che l' n -upla di funzioni $y_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, n$, sia l'unica soluzione del sistema $f_i = 0$ in quell'intorno. L'A. arriva a provare la tesi facende vedere l'esistenza di n numeri k_1, k_2, \dots, k_n tali che $f_i(x_1, \dots, x_m, b_1 + k_1, \dots, b_n + k_n) f_i(x_1, \dots, x_m, b_1 - k_1, \dots, b_n - k_n) < 0$, per ogni (x_1, \dots, x_m) contenuto in un intorno di (a_1, \dots, a_m) . L. de Vito.

Opial, Z.: Sur une inégalité. Ann. Polon. math. **8**, 29—32 (1960).

The author proves that for any function $x(t)$, $0 \leq t \leq h$, of class C^1 , with $x(0) = x(h) = 0$, $x(t) > 0$ for $0 < t < h$, the inequality holds

$$(*) \quad \int_0^h |x(t) x'(t)| dt < \frac{h}{4} \int_0^h x'^2(t) dt.$$

The coefficient $h/4$ cannot be replaced by a smaller one. The sign $=$ in $(*)$ holds only for functions of the form $C x_0(t)$, $C > 0$, $x_0(t) = 2t/h$, $0 \leq t \leq h/2$, $x_0(t) = 2 - 2t/h$, $h/2 \leq t \leq h$, which are not of class C^1 . L. Cesari.

Olech, C.: A simple proof of a certain result of Z. Opial. Ann. Polon. math. **8**, 61—63 (1960).

The author gives a simple proof of the inequality of the paper reviewed above. The proof is based exclusively on Schwarz' inequality. L. Cesari.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

● Szegő, Gabor: **Orthogonal polynomials.** (American Mathematical Society. Coll. Publ. Vol. 23.) Revised ed. New York City: American Mathematical Society 1959. VIII, 421 p.

C'est la seconde édition de la monographie parue sous le même titre en 1939. Par rapport à la première édition la seconde n'a augmenté que de 20 pages. L'ouvrage est consacré aussi bien à la théorie générale des polynômes orthogonaux qu'à l'étude détaillée de différentes classes spéciales de ces fonctions, comme les polynômes classiques de Jacobi, de Legendre, de Laguerre et de Hermite, des polynômes de Poisson-Charlier et de Krawtchouk jouant un rôle dans le calcul de probabilité et les polynômes introduit en 1949 par Pollaczek constituant une généralisation de certains polynômes classiques. Le livre est divisé, comme dans la première édition, en 16 chapitres suivants: I. Préliminaires, où l'A. rappelle quelques résultats de l'analyse concernant les polynômes (ordinaires et trigonométriques), l'approximation, les opérations linéaires, les intégrales d'une equation différentielle linéaire etc. II. Définition des polynômes orthogonaux, leur différentes représentations, formules importantes et exemples principaux. III. Propriétés générales des polynômes orthogonaux, p. e. une propriété de minimum, la distribution des zéros des polynômes, certaines formules de recurrence et la relation avec les fractions continues. IV. Polynômes de Jacobi. V. Polynômes de Laguerre et Hermite. VI. Zéros des polynômes orthogonaux. VII. Inégalités. VIII. Propriétés asymptotiques des polynômes classiques. IX. Problèmes du developpement des fonctions analytiques ou „arbitraires“ en séries des polynômes classiques. X. Représentation des fonctions positives ce qui constitue une extension du théorème de Fejér sur la représentation des polynômes trigonométriques nonnégatifs. XI. Polynômes orthogonaux dans le cercle unité. XII. Propriétés asymptotiques des polynômes orthogonaux généraux. XIII. Problèmes de developpement liés aux polynômes orthogonaux généraux. XIV. Problèmes de l'interpolation liés aux polynômes classiques. XV. Quadrature mécanique. XVI. Polynômes orthogonaux sur une courbe arbitraire. Ces chapitres sont suivis par 84 Problèmes et Exercices (dans la première édition il'y en a 60), par un Appendice (seulement dans la seconde édition) intitulé „Sur un cas singulier des polynômes orthogonaux“, consacré aux polynômes de Pollaczek, et par une bibliographie détaillée. Le livre écrit par l'A. qui a contribué beaucoup au developpement de la théorie des polynômes orthogonaux contient une grande richesse de problèmes et de résultats plus anciens et tout nouveaux. Néanmoins l'A. écrit dans la préface: „No claim is made for completeness . . . An attempt has been made to indicate the main and characteristic methods and to point out the relation of these to some general ideas in modern analysis. As a rule, preference has been given to those topics to which we were able to make some new, though modest, contributions, or which we could present in a new setting“.

F. Leja.

Geronimus (Heronimus), Ja. L. (J. L.): **On certain estimates in the theory of Töplitz forms and orthogonal polynomials.** Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 25—27 (1957) [Russisch].

Verf. macht einige Bemerkungen und gibt einige Resultate ohne Beweis an, die im Umkreis seiner in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 36, 175; 56, 103) zusammenfassend dargestellten Untersuchungen liegen. Er verschärft z. B. Sätze früherer Arbeiten (dies. Zbl. 50, 71; 70, 63).

L. Schmetterer.

Sikkema, P. C.: **Über den Grad der Approximation mit Bernstein-Polynomen.** Numerische Math. 1, 221—239 (1959).

Es sei $B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$ das Bernstein-Polynom n -ter Ordnung der in $[0, 1]$ stetigen Funktion $f(x)$. Ferner sei α die untere Grenze aller K ,

für welche

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(x)| \leq K \omega(n^{-1/2})$$

gilt, bei beliebiger Wahl von f und $n = 1, 2, \dots$. Hier ist ω der Stetigkeitsmodul von f . Verf. verschärft Ergebnisse von Popoviciu (dies. Zbl. 10, 295) und Lorentz (dies. Zbl. 51, 50), indem er zeigt: $1 \leq \kappa \leq 1,093785$, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(x)|}{\omega(n^{-1/2})} \leq 1 + \frac{1}{e^2 \sqrt{2} \pi}.$$

Der recht umfangreiche Beweis stützt sich auf einige neue Identitäten in Verbindung mit Bernstein-Polynomen und verwandten Größen. Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden. G. Meinardus.

Whitney, Hassler: On bounded functions with bounded n -th differences. Proc. Amer. math. Soc. 10, 480—481 (1959).

Zu jeder positiven ganzen Zahl n gibt es eine Zahl L_n derart, daß für jede in irgend einem Intervall definierte und in einem Teilintervall beschränkte Funktion $f(x)$ ein Polynom $P(x)$ höchstens vom Grad $n-1$ existiert, für welches

$$|f(x) - P(x)| \leq L_n \sup_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(y + i h)^{|$$

ist. Dieses Theorem hat Verf. früher (dies. Zbl. 77, 69) mit Beschränkung auf stetige Funktionen $f(x)$ bewiesen. Er gibt jetzt die Modifikationen an, die man an seinem früheren Beweis vornehmen muß, um das allgemeinere Theorem zu erhalten. O. Perron.

Ganzburg, I. M.: A generalization of some results obtained by S. M. Nikolsky and A. F. Timan. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 727—730 (1957) [Russisch].

Bezeichnung siehe dies. Zbl. 42, 70. Der Verf. erweitert frühere Ergebnisse von Timan, dies. Zbl. 1, c. Bei sonst gleichen Voraussetzungen tritt an Stelle von $S_n(x)$

$\sigma_{n,k}(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=n-k}^n S_\nu(x)$, $0 \leq k \leq n$. Man erhält denselben asymptotischen Aus-

druck für $E(x)$, doch ist $\log n$ durch $\log \frac{n+1}{k+1}$ zu ersetzen. Das O -Glieder gilt nicht nur gleichmäßig für x in $[-1, 1]$, sondern auch noch gleichmäßig in k für $0 < x < 1$ und gleichmäßig für alle k in $0 \leq k \leq n$, $\eta, \eta < 1$, für $\alpha = 1$. L. Schmetterer.

Melzak, Z. A.: Existence of certain analytic homeomorphisms. Canadian math. Bull. 2, 71—75 (1959).

Sia G lo spazio degli omeomorfismi che conservano l'ordinamento e che trasformano l'intervallo $(0, 1)$ in sè stesso. L'A. dimostra il seguente Teorema: Siano $\{X_i\}$, $\{Y_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) due successioni di insiemi numerabili, densi in $(0, 1)$ e disgiunti due a due. Esiste in G una funzione analitica $f(x)$ tale che $f(X_i) = Y_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Questo risultato generalizza un teorema di Franklin [Trans. Amer. math. Soc. 27, 91—100 (1925)]. Il metodo di cui l'A. si serve è una modifica di quello di Franklin. Dal teorema di Franklin si deducono vari corollari di cui ci limitiamo a segnalare il seguente: Ogni funzione continua in G può essere uniformemente approssimata da funzioni analitiche $f(x)$ tali che $f(X_i) = Y_i$. L. Giuliano.

Krylov, V. I.: Signs of coefficients in Cotes' quadrature formula. Doklady Akad. Nauk BSSR 3, 435—439 (1959) [Russisch].

Gilt für jedes Polynom f nicht höheren als n -ten Grades die Darstellung

$$(*) \quad \int_0^1 p(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{k}{n}\right),$$

wobei die Gewichtsfunktion $p(x)$ eine beliebige summierbare und nicht identisch verschwindende Funktion bedeutet, so ist bekannt, daß für eine konstante Gewichts-

funktion $p(x) = 1$ für $n \geq 10$ unter den Koeffizienten A_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) stets auch negative auftreten. Die Frage, ob für eine beliebige Gewichtsfunktion $p(x)$ eine Zahl $N = N(p)$ existiert, so daß für $n \geq N$ unter den Koeffizienten A_k ($k = 0, 1, \dots, n$) nicht alle dasselbe Vorzeichen haben, ist in voller Allgemeinheit noch nicht beantwortet. Verf. weist darauf hin, daß aus den Untersuchungen von P. O. Kuzmin, Über die Theorie mechanischer Quadraturen [Izvestija Leningradsk. politechn. Inst. 33 (1931)] und I. V. Ouspensky, [Bull. Amer. math. Soc. 31, 145—156 (1925)] und der dort angegebenen asymptotischen Darstellung der Koeffizienten unter der zusätzlichen Voraussetzung der Existenz von $p'(0)$ und $p'(1)$ und der Gültigkeit von $p^2(0) + p^2(1) > 0$ die Existenz eines solchen $N(p)$ folgt und untersucht den Fragenkomplex für die spezielle Gewichtsfunktion $p(x) = x^\beta(1-x)^\alpha$ und zeigt, daß in diesem Falle die Anzahl s der in (*) verschwindenden Koeffizienten A_k den Ungleichungen $s \leq [\frac{1}{2}(n+1)]$ und $n-s \geq [\frac{1}{2}(n+2)]$ genügt, und daß unter den Koeffizienten A_k stets negative auftreten, wenn n einem der beiden folgenden Ungleichungssysteme genügt:

$$1. \text{ für } \beta \geq 0: \quad \frac{1}{n} \geq 2[\mu(\alpha+3) + 1 + \sqrt{4\mu^2(\alpha+3)^2 + 1 - 4\mu\beta}]^{-1}$$

$$2. \text{ für } -1 < \beta < 0:$$

$$m \geq \frac{1}{2}[(\sqrt{5}-1)\alpha + 2\sqrt{5}], \quad \frac{1}{n} \geq [\mu(\alpha+3)\sqrt{\mu^2(\alpha+3)^2 - \mu(\alpha+\beta+3)}]^{-1},$$

wobei $m = [n/2]$ und $\mu = m(m+\alpha+\beta+2)/[(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)]$ bedeuten. ($[a]$ ist der ganzzahlige Anteil von a). G. Feldmann

Talalan, A. A.: Über bezüglich Umordnung universelle Reihen nach Basen des Raumes L_p . Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 28, 145—150 (1959) [Russisch].

Alle im folgenden vorkommenden Funktionen seien in $[0, 1]$ erklärt und meßbar. Eine Reihe $\sum f_n(x)$ von f. ü. endlichen Funktionen f_n heißt universell bezüglich Umordnung und Maßkonvergenz, wenn es zu jedem f eine Umordnung $\sum f_{v_k}(x)$ der Reihe gibt, die dem Maß nach gegen f konvergiert. Entsprechende Definitionen gelten für f. ü. Konvergenz bzw. f. ü. T -Summierbarkeit sowie für Universalität bezüglich Teilreihen $\sum f_{n_k}(x)$ (wo $n_1 < n_2 < \dots$); außerdem kann man die Klasse der zugelassenen Funktionen f einschränken, etwa nur f. ü. endliche f betrachten. Satz 1: Bilden die $\varphi_n(x)$ eine normierte Basis in $L_p[0, 1]$ (wo $p > 1$), so gibt es eine Reihe $\sum a_n \varphi_n(x)$ mit $a_n \rightarrow 0$, die sowohl bezüglich Umordnung als auch bezüglich Teilreihen jeweils im Sinne der Maßkonvergenz universell ist. Satz 2: Bilden die $\chi_n(x)$ das Orthonormalsystem von Haar, so gibt es eine Reihe $\sum a_n \chi_n(x)$, die bezüglich Teilreihen und f. ü. Konvergenz in der Klasse der f. endlichen Funktionen universell ist. — Drei weitere Sätze behandeln Beziehungen zwischen verschiedenen Universalitätsbegriffen. K. Zeller.

Morgenthaler, George W.: On Walsh-Fourier series. Trans. Amer. math. Soc. 84, 472—507 (1957).

Paley, Pine und Yano exhibited some of the basic similarities and differences between the trigonometric system and the Walsh system. In the present paper, the author extends the comparison of the trigonometric and the Walsh series formed by the above mentioned authors. In particular, the analogues of theorems of Rogosinski, Marcinkiewicz-Zygmund and lacunary series concerning the trigonometric system are established. G. Sunouchi.

• **Tolstov, G. P.:** Fourier-Reihen. [Rjady Fur'e]. 2. verb. Aufl. (Physikalisch-mathematische Bibliothek des Ingenieurs). Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1960. 390 S. R. 11,55 [Russisch].

Vgl. die Besprechung der 1. Auflage in diesem Zbl. 44, 73.

Darsow, W.: On boundedness of trigonometric series. J. London math. Soc. 35, 237—238 (1960).

Verf. beweist: Ist $s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ nach unten beschränkt für jedes x einer Menge E positiven Maßes, so ist $s_n(x) = O(n^c)$ ($n \rightarrow \infty$) für eine Konstante $1 < c < 2$ und fast jedes $x \in E$. Ist E speziell ein Intervall, so folgt hieraus mit Abel- und Cesàrosummierung, daß $s_n(x)$ auch beschränkt ist nach oben für fast jedes $x \in E$. G. Goes.

Katayama, Miyoko: Fourier series. VII: Uniform convergence factors of Fourier series. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **13**, 121—129 (1957).

J. Karamata (cf. this Zbl. **70**, 113) gave a necessary and sufficient condition that $\{\lambda_n\}$ be a sequence of uniform convergence factors of Fourier series of all continuous functions. The author follows this idea and gives a necessary and sufficient condition that $\{\lambda_n\}$ be a sequence of uniform convergence factors of Fourier series of all bounded measurable functions, L_p -integrable functions, L -integrable functions and Fourier-Stieltjes series respectively. The author's argument in p. 125 is somewhat elliptical, but the theorems are valid. G. Sunouchi.

Katayama, Miyoko: Fourier Series. XIII: Transformation of Fourier series. Proc. Japan. Acad. **33**, 75—78 (1957).

J. Karamata and M. Tomić (cf. this Zbl. **66**, 315) proved a uniform summability factors theorem concerning Fourier series of all continuous functions. The author follows their idea and gives a necessary and sufficient condition that the Fourier series of all functions belonging to L_p ($p \geq 1$) be uniformly summable by an infinite matrix method. G. Sunouchi.

Hirokawa, Hiroshi: Further remarks on the paper "Uniform convergence of some trigonometrical series", Tôhoku math. Journ. **6**, 162—173 (1954). Tôhoku math. J., II. Ser. **9**, 110—112 (1957).

The author gives a condition which does not always imply Riemann summability and proves that a theorem of Obreschkoff (this Zbl. **27**, 207), which asserts that $|C, p|$ implies (R, p) , is best possible. (Cf. this Zbl. **58**, 56.) G. Sunouchi.

Matsumoto, Kishi: A sufficient condition for the absolute Riesz summability of a Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. **9**, 222—233 (1957).

A theorem is proved on the absolute summability of Fourier series by Riesz's typical means of type $\exp \{(\log w)^\Delta\}$, $\Delta \geq 1$, which is an improvement of a result proved in different stages by Mohanty and Misra (this Zbl. **57**, 300) and Pati (this Zbl. **80**, 50). K. Chandrasekharan.

Sinha, S. R.: On the absolute Riesz summability of Fourier series, its conjugate series and their derived series. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A **24**, 155—175 (1958).

Absolute summability of Fourier and related series by Riesz's typical means of type $\exp \{(\log w)^\Delta\}$ for $\Delta > 1$, has been considered by many authors, for instance Mohanty and Misra (this Zbl. **57**, 300), Matsumoto and Pati (this Zbl. **80**, 50, and above review). Pati, in particular, considered the case in which $\Delta = 1 + 1/\alpha$, where α is a positive integer. The present paper considers the case $\Delta = 1 + \beta/\alpha$, where $\beta \geq 0$. In some of the results, however, the author needs the further restriction that $0 < \beta \leq 1$. K. Chandrasekharan.

Shapiro, Victor L.: Uniqueness of multiple trigonometric series. Ann. of Math., II. Ser. **66**, 467—480 (1957).

Let T_n denote the n -dimensional torus $\{-\pi < x_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, n\}$ and m a lattice-point in n -dimensional euclidean space. Let $\sum_m a_m \exp \{i(m, x)\}$ be a multiple trigonometric series with complex coefficients a_m . Its Abel mean is defined as $\sum_m a_m \exp \{i(m, x) - |m|t\}$ for $t > 0$. Let $f^*(x)$ and $f_*(x)$ denote the limit superior, and limit inferior, of the Abel mean as $t \rightarrow 0$. The author proves the following theorems. I. If $f^*(x)$ and $f_*(x)$ are finite for all x , $\bar{a}_m = a_{-m}$, $\sum_{R-1 < |m| \leq R} |a_m| = o(R)$ as $R \rightarrow \infty$, and $f_*(x) \geq A(x)$, where $A(x) \in L^1$ on T_n , then $f_*(x) \in L^1$

on T_n , with $\sum_m a_m \exp \{i(m, x)\}$ as its Fourier series. II. If $f^*(x)$ and $f_*(x)$ are finite for all x in T_n except one point; $f^*(x), f_*(x) \in L^1$ on T_n , and $\sum_{R-1 < |m| \leq R} |a_m| = o(R)$ as $R \rightarrow \infty$, then $\sum_m a_m \exp \{i(m, x)\}$ is the Fourier series of $f_*(x)$. It is interesting to note that while theorem I is a multi-dimensional analogue of a theorem of Verblunsky [Proc. London math. Soc., II. Ser. 33, 287—327 (1932); this Zbl. 6, 53], the second theorem is false in one dimension.

K. Chandrasekharan.

Spezielle Funktionen:

Aissen, M. I.: Cyclically ordered sets. Canadian J. Math. 9, 406—412 (1957).

Verf. gibt einen allgemeinen Satz über zyklisch geordnete Mengen, der klassische Trennungssätze über die Nullstellen aufeinanderfolgender Polynome eines Orthonogalsystems oder aufeinanderfolgender Besselfunktionen umfaßt. Bezeichnet man endlich viele Mengen E_1, E_2, \dots, E_k reeller Zahlen als zyklisch geordnet, wenn (1) $E_\lambda \cap E_\mu = \emptyset$ für $\lambda \neq \mu$, (2) $Z(E_\lambda \cap I) \leq Z(E_\mu \cap I) + 1$ für alle λ, μ und jedes reelle Intervall I gilt, wobei $Z(A)$ die Anzahl der Elemente von A (die auch ∞ sein darf) bedeutet, so besagt der Satz: Es sei $\{f_n(x)\}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), eine Folge im offenen Intervall (a, b) stetiger Funktionen von x , für die bei festem $k > 1$ $f_{n+k}(x) = a_n(x) f_{n+k-1}(x) - b_n(x) f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) mit stetigen $a_n(x) > 0$, $b_n(x) > 0$ gilt; es sei für die Menge F_n der Nullstellen von $f_n(x)$ in (a, b) die Anzahl $Z(F_n) \leq \left[\frac{n}{k} \right] \equiv \mu(n)$, und es sei ferner $\lim_{x \rightarrow b^-} \operatorname{sgn} f_n(x) = +1$, $\lim_{x \rightarrow a^+} \operatorname{sgn} f_n(x) = (-1)^{\mu(n)}$. Ist dann E_n die Menge der ungeraden Nullstellen von $f_n(x)$ in (a, b) , d. h. der Nullstellen ξ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sgn} f_n(\xi + h) \operatorname{sgn} f_n(\xi - h) = -1$, so gelten die Aussagen:

(a) $\operatorname{Max} \{E_n\} > \operatorname{Max} \{E_m\}$ für $n > m \geq k$; (b) $Z(E_n) = \mu(n)$; (c) $E_n, E_{n+1}, \dots, E_{n+k}$ sind für $n > 0, 1, 2, \dots$ zyklisch geordnet. — Es werden Anwendungen dieses Satzes gegeben. Ist z. B. $\{p_n(x)\}$ eine Folge von Polynomen, die in einem zu $x = 0$ symmetrischen Intervall bez. einer geraden, nicht negativen Gewichtsfunktion orthonormal sind, und bedeutet P_n die Menge der positiven Nullstellen von $p_n(x)$, so sind P_n, P_{n+1}, P_{n+2} stets zyklisch geordnet.

F. Lösch.

Tschauner, Johann: Über einen Zusammenhang zwischen den Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen. Math. Z. 73, 457—459 (1960).

Verf. leitet für die erzeugende Funktion der durch $\Gamma(1 + n + p + q)$ geteilten allgemeinen Kugelfunktionen $C_1 \cdot P_{n+p}^q(x) + C_2 \cdot Q_{n+p}^q(x)$ (C_1, C_2 Konstanten; P_{n+p}^q, Q_{n+p}^q Kugelfunktionen 1. bzw. 2. Art) eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung her, die durch passende Substitution in eine inhomogene Besselsche Differentialgleichung übergeführt und formal gelöst werden kann. Die sich dadurch ergebende Beziehung zwischen Kugel- und Zylinderfunktionen gestaltet sich für den Sonderfall $C_1 = 1; C_2 = 0; p = q = m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) besonders übersichtlich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^m(x)}{(n+m)!} t^n = (-1)^m e^{xt} J_m(\sqrt{1-x^2} t). \quad W. Gerisch.$$

Bhonsle, B. R.: On some results involving Jacobi polynomials. Bull. Calcutta math. Soc. 50, 159—164 (1958).

Verf. dehnt eine von N. G. Shabde [Proc. Benares math. Soc. 4, 3—8 (1943)] mitgeteilte, von Wrinch herstammende Integralformel für $F(x) Q_n(x)$ unter Anwendung der Entwicklung von Brafeman (dies. Zbl. 44, 76) für das Produkt zweier Jacobischer Polynome $P_k^{(\alpha, \beta)}(t + \varrho) P_k^{(\alpha, \beta)}(t - \varrho)$, ($1) \varrho = (1 - 2xt + t^2)^{1/2}$ auf die Jacobische Funktion $Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ aus und zeigt:

$$F(x) Q_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2} (x-1)^{-\alpha} (x+1)^{-\beta} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-t)^{\alpha} (1+t)^{\beta} F(t) P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{x-t} dt,$$

wo $|x| > 1$ und $F(x)$ ein Polynom in x vom Grade $\leq n$ ist. Ferner werden eine Integraldarstellung für $x^{n+m} Q_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($\alpha > -1$, $\beta > -1$) und die Auswertung von $\left[\left(\frac{d}{dx} \right)^r P_k^{(\alpha, \beta)}(t + \varrho) P_k^{(\alpha, \beta)}(t - \varrho) \right]_{x=\pm 1}$ und der Integrale

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_k^{(\alpha, \beta)}(t + \varrho) P_k^{(\alpha, \beta)}(t - \varrho) dx, \\ & \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\sigma P_k^{(\alpha, \beta)}(t + \varrho) P_k^{(\alpha, \beta)}(t - \varrho) P_k^{(\alpha, \sigma)}(x) dx, \\ & \int_{-1}^{+1} (1-x)^\sigma (1+x)^\beta P_k^{(\alpha, \beta)}(t - \varrho) P_k^{(\alpha, \beta)}(t + \varrho) P_m^{(\sigma, \beta)}(x) dx \end{aligned}$$

(ϱ aus (1)) gegeben.

O. Volk.

Palas, Frank J.: A Rodrigues' formula. Amer. math. Monthly 66, 402—404 (1959).

Für $k = 1, 2, 3, \dots$ ($k = 1$ Laguerre) werden durch $(1-t)^{-1} \exp(x^k[1-(1-t)^{-k}])$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} T_{kn}(x) t^n$ Polynome $T_{kn}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \frac{x^{kp}}{p!} \sum_{r=0}^p (-1)^r \binom{p}{r} \prod_{v=1}^n (kr + v)$ vom
 genauen Grad kn erzeugt, die der Formel $T_{kn}(x) = \frac{e^{x^k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x^k})$ genü-
 gen. Ferner gilt $\int_0^{\infty} e^{-x^k} x^s T_{kn}(x) dx = \frac{(-1)^n}{k} \binom{s}{n} \Gamma\left(\frac{s+1}{k}\right)$ ($s, n = 0, 1, 2, \dots$).

Die Unterscheidung von $s < n$ und $s \geq n$ ist nicht notwendig wegen $\binom{s}{n} = 0$
 für $s < n$. Auch eine Rekursionsformel und Differentialgleichungen für die $T_{kn}(x)$
 werden hergeleitet. — In Theorem 2 muß es heißen $M(s, n) = n! \int_0^{\infty}$. I. Paasche.

Carlitz, L.: Multiplication formulas for products of Bernoulli and Euler polynomials. Pacific J. Math. 9, 661—666 (1959); Errata. Ibid. 10, 1479 (1961).

Über die durch $\bar{B}_m(x) = B_m(x)$ ($0 \leq x \leq 1$); $\bar{B}_m(x+1) = \bar{B}_m(x)$ ($x \geq 0$)
 definierten Bernoullischen Funktionen ($B_m(x)$ = Bernoullische Polynome) beweist
 Verf. den Satz 1: Es sei $n \geq 1$ und $m_1, \dots, m_n \geq 1$; a_1, \dots, a_n seien positive
 ganze Zahlen, die paarweise relativ prim sind; $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{kA-1} \bar{B}_{m_1}\left(x_1 + \frac{r}{a_1 k}\right) \bar{B}_{m_2}\left(x_2 + \frac{r}{a_2 k}\right) \dots \bar{B}_{m_n}\left(x_n + \frac{r}{a_n k}\right) \\ & = C \sum_{r=0}^{k-1} \bar{B}_{m_1}\left(a_1 x_1 + \frac{r}{k}\right) \bar{B}_{m_2}\left(a_2 x_2 + \frac{r}{k}\right) \dots \bar{B}_{m_n}\left(a_n x_n + \frac{r}{k}\right) \end{aligned}$$

mit $C = a_1^{1-m_1} a_2^{1-m_2} \dots a_n^{1-m_n}$. Satz 2 bringt eine ähnliche Aussage über die
 Eulerschen Funktionen $E_m(x)$. Diese Aussage wird in Satz 3 verallgemeinert
 durch die Einführung der „Eulerschen“ Polynome $\Phi_m(x, \varrho)$, die durch

$$\frac{1-\varrho}{1-\varrho e^t} e^{xt} = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(x, \varrho) \frac{t^m}{m!} \quad (\varrho \neq 1)$$

definiert werden. Speziell gilt $\Phi_m(x, -1) = E_m(x)$.

G. Hoheisel.

Adrian, P.: Die Bezeichnungsweise der Bernoullischen Zahlen. Mitt. Verein.
 schweiz. Versicherungsmath. 59, 199—206 (1959).

Den bekannten fünf Bezeichnungen wird eine naheliegende sechste hinzugefügt, die manches für sich hat:

	1	1/2	1/6	0	-1/30	0	1/42	0	-1/30
Bernoulli, Euler				A	B	C	D		
Schlömilch			B_1	B_2	$-B_3$	B_4	B_5	B_6	$-B_7$
Saalschütz, Encykl., Weber-Wellstein			B_1		$-B_2$	B_3			$-B_4$
Pascal-Rep., Teubner-Taschenbuch			B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
Nörlund	B_0	$-B_1$	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
Adrian	B_0	$\frac{1}{2} + B_1$	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8

Und zwar auf Grund arithmetischer Mittelbildung zwischen äußerem und innerem Treppenvolygon bei der Eulerschen Summenformel (die beiden gleichberechtigten

Polygone führen auf $B_1 = \frac{1}{2}$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$), oder mittels $x \cot x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{B_v}{v!} (\pm 2x)^v$.

Hierbei ist $B_1 = B_3 = B_5 = \dots = 0$ evident. — Bem.: Die für $v = 0, 1, 2, \dots$ in Nörlundscher Bezeichnung gültige einfache symbolische Formel $B_v = (-B - 1)^v$ würde bei Verf. $B_v = (B + 1)^v - \frac{1}{2} (v + 0)^{v-1}$ lauten, wofür er auch $B_v = (B \pm 1)^v - \frac{1}{2} (v + 0)^{v-1} (\pm 1)^v$ schreiben könnte. Von den drei Schlußsätzen zeigt nur der Kroneckersche Einheitswurzelatz mit 2^v -gliedriger Summe $\sum_{\pm} (\pm \varepsilon_1 \pm \dots \pm \varepsilon_v)^v = 2^{2v} (2^v - 1) B_v$ die Zweckmäßigkeit der Wahl $B_1 = 0$, nicht jedoch die ζ -Funktion und der Satz von v. Staudt und Clausen. *I. Paasche.*

Singh, V. N.: A further note on the partial sums of certain basic bilateral hypergeometric series. *Ganita* 8, 71—79 (1957).

Verf. gewinnt unter Benutzung einer bekannten Formel von Bailey eine Beziehung zwischen zwei abbrechenden Reihen vom Typ $_{10}P_{10}$ und leitet aus dieser durch geeignete Grenzübergänge weitere Transformationsformeln ab, z. B. eine Beziehung zwischen einer ${}_8P_8$ und einer ${}_4P_4$, beide einseitig abbrechend, und einer „well-poised“ ${}_4P_3$. *W. Hahn.*

Babister, A. W.: Generalized modified Struve functions. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* 10, 214—223 (1959).

Durch Integrale mit gradlinigem Integrationsweg oder durch gleichwertige Schleifenintegrale werden zwei verallgemeinerte Struve-Funktionen definiert, die sich als Partikularintegrale der inhomogenen konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung auffassen lassen. In der Bezeichnung der konfluenten hypergeometrischen Funktion hält sich der Verf. an die von Tricomi vorgeschlagene Bezeichnungsweise. *H. Buchholz.*

Oberhettinger, F.: On some expansions for Bessel integral functions. *J. Res. nat. Bur. Standards* 59, 197—201 (1958).

B. van der Pol [*Philos. Mag.*, VII. Ser. 8, 861—898 (1929)] und P. Humbert (dies. *Zbl.* 5, 399; 10, 301) haben die Besselsche Integralfunktion der Ordnung Null

$Ji_0(x) = - \int_x^{\infty} t^{-1} J_0(t) dt$ eingeführt und untersucht. Verf. betrachtet die mit $K_0(t)$, $Y_0(t)$, $H_0(t) - Y_0(t)$, $H_0(t) =$ Struvesche Funktion, analog gebildeten Integralfunktionen, für welche er zusammen mit den Integralfunktionen $\int_0^x (H_0(t) - Y_0(t)) dt$,

$\int_0^x (J_0(t) - L_0(t)) dt$, wo $L_0(t) = -i H_0(it)$, insbesondere asymptotische Entwicklungen gibt. Am Schluß der Arbeit befindet sich eine sehr übersichtliche Zusammenstellung der Bezeichnungen und Hilfsformeln. *O. Volk.*

Kumar, Ram: Certain infinite series expansions connected with generalized Hankel-transform. *Ganita* 8, 1—7 (1957).

Mi Hilfe der Bessel-Maitlandschen Funktionen $J_{\lambda}^{\mu}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r! \Gamma(1+\lambda+\mu r)}$ ($\mu > 0$) wurde die Hankelsche Transformation durch Agarwal 1950 verallgemeinert $\psi_{\lambda, \mu, \nu}(x) = \int_0^{\infty} (xy)^{\nu} J_{\lambda}^{\mu}(xy) g(y) dy$ (dies. Zbl. 40, 352). Folgende drei interessanten Reihenentwicklungen werden mit Berührung der Operatorenrechnung hergeleitet:

1. $\psi_{\lambda, \mu, \nu}(x) = s^{\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-s)^r}{r!} \psi_{\lambda+\mu r, \mu, \nu+r}(x),$
2. $\frac{G_0}{\Gamma(\lambda+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \psi_{\lambda+\mu r, \mu, \nu+r}(x) \quad \text{mit} \quad G_0 = \int_0^{\infty} y^{\nu} g(y) dy.$
3. $\psi_{\lambda, \mu, \nu}(x) = \frac{\Gamma(\lambda/\mu)}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda/\mu + r + 1)} \psi_{\lambda+\mu r-1, \mu, \nu+r}(x).$

An drei Beispielen wird darauf hingewiesen, daß vorige Ergebnisse zur Berechnung gewisser Integrale bzw. unendlichen Reihen geeignet sind. St. Fenyő.

Gurand, John: An inequality satisfied by the gamma function. Skand. Aktuarietidskr. 1956, 171—172 (1957).

Für alle reellen α, λ mit $\alpha + \lambda > 0, \lambda > 0; \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ gilt die Ungleichung

$$\Gamma^2(\lambda + \alpha) / \Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda + 2\alpha) < \lambda / (\alpha^2 + \lambda) \quad F. Wever.$$

Diananda, P. H.: Extensions of an inequality of H. S. Shapiro. Amer. math. Monthly 66, 489—491 (1959).

Gezeigt wird: Aus $n |m + 2$ oder $2m$ oder $2m + 1$ oder $2m + 2$ folgt $\sin \frac{r\pi}{n} \geq \sin(2m+1) \frac{r\pi}{n} \left(r = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \right)$, und aus letzterem folgt (1) $\sum_{\nu=1}^n \frac{x_{\nu}}{x_{\nu+1} + \dots + x_{\nu+m}} \geq \frac{n}{m}$ ($x_{n+j} = x_j > 0$ für alle j). Shapiro betrachtete $m = 2$, wobei (1) für $n = 1, \dots, 6$ richtig und für $n = 20$ falsch ist. Auch die allgemeinere Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{a_1 x_{\nu+1} + \dots + a_n x_{\nu+n}}{b_1 x_{\nu+1} + \dots + b_n x_{\nu+n}} \geq n \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n}$$

wird erwähnt, die bei positiven Zählern und Nennern und $\left(\sum_{\nu} a_{\nu} \omega_r^{\nu} \right) \left(\sum_{\nu} b_{\nu} \omega_r^{-\nu} \right) \leq - \left(\sum_{\nu} a_{\nu} \omega_r^{-\nu} \right) \left(\sum_{\nu} b_{\nu} \omega_r^{\nu} \right)$ mit $\omega_r = e^{2\pi i/n} \left(r = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \right)$ gilt. I. Paasche.

Funktionentheorie:

Callahan jr., Francis P.: An extremal problem for polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 10, 754—755 (1959).

Parmi les polynomes $P(z)$ du degré n remplissant les conditions $P(1) = 1, |P(z)| \leq 1$ pour $|z| = 1$, l'A. trouve un tel pour lequel l'intégrale $\int_0^{2\pi} |P(e^{i\varphi})|^2 d\varphi$ est la plus grande. F. Leja.

Rahman, Q. I.: Inequalities for polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 10, 800—806 (1959).

Soit $p(z)$ un polynome du degré n . On sait que si $\max_{|z|=1} |p(z)| = 1$, alors $\max_{|z|=q < 1} |p(z)| \geq q^n$. L'A. démontre entre autres que si $\max_{|z|=1} |p(z)| = 1$ et si tous les zéros de $p(z)$ sont situés dans le domaine $|z| \geq 1$ et au moins un d'eux est situé dans le domaine $|z| > 1$, alors il existe un nombre positif $\delta < 1$ tel que pour $1 - \delta < q < 1$ on a $\max_{|z|=q} |p(z)| > \frac{1}{2}(1 + q^n)$. F. Leja.

Akutowicz, Edwin J.: Sur l'approximation par certaines fonctions entières. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 1955—1957 (1960).

Let E_a be the class of functions of the form $\Phi(t) = \int e^{itz} d\mu(x)$ where μ is a complex valued measure whose support is contained in $[-a, a]$. If H is a Banach space of functions in $(-\infty, \infty)$ containing E_a , the author states three propositions asserting that the closure of E_a in H is H itself for two classes of spaces H . Let A be the subset of E_a consisting of functions Φ for which $\|\Phi/(1 + |t|)\| \leq 1$ and let for complex z , $b(z) = \sup_{\Phi \in A} |\Phi(z)|$. For H one can take the space L^p ($1 \leq p < \infty$) of functions defined in $(-\infty, \infty)$ with reference to a non-negative Borel measure on the line or one can take $H = C_\Omega$ of continuous functions $\psi(t)$ with $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{\Omega(t)} = 0$ where $\Omega(t)$ is a any given non-zero continuous function in $(-\infty, \infty)$, the norm being $\|\psi\| = \max_t |\psi(t)/\Omega(t)|$. For these spaces, $\bar{E}_a = H$ if and only if $b(z_0) = \infty$ for some non-real z_0 . Another equivalent condition is $\int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{b(t)}{1+t^2} dt = \infty$. When $p > 1$, an equivalent condition is $\inf \|\Phi/(t - z_0)\| = 0$ where z_0 is not real and the inferior is with respect to functions Φ for which $\Phi(z_0) = 1$.

V. Ganapathy Iyer.

Eweida, M. T.: On the three-point expansions. Bull. College Arts Sci., Baghdad **2**, 92—95 (1957).

$\{p_k\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), $\{q_\lambda\}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$) und $\{r_\mu\}$ ($\mu = 1, 2, 3, \dots$) seien drei monoton wachsende Folgen natürlicher Zahlen und a_ν ($\nu = 1, 2, 3$) drei paarweise voneinander verschiedene komplexe Zahlen. Es werden sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß es eine und nur eine Polynomfolge $\{u_n(z), v_n(z), w_n(z)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) mit folgenden Eigenschaften gibt: $u_n^{(s)}(a_1) = 1$, $s = p_n$ und $u_n^{(s)}(a_1) = 0$ für $s = p_k$, $k \neq n$. $u_n^{(s)}(a_2) = 0$ für $s = q_\lambda$, $\lambda \geq 1$ und $u_n^{(s)}(a_3) = 0$ für $s = r_\mu$, $\mu \geq 1$. $v_n^{(s)}(a_1) = 0$ für $s = p_k$, $k \geq 1$, $v_n^{(s)}(a_2) = 1$ für $s = q_n$ und $v_n^{(s)}(a_2) = 0$ für $s = q_\lambda$, $\lambda \neq n$. $v_n^{(s)}(a_3) = 0$ für $s = r_\mu$, $\mu \geq 1$ und analog im Falle $w_n(z)$.

E. Lammel.

Teghem, J.: Sur des extensions d'une méthode de prolongement analytique de Borel. Centre Belge Rech. math., Colloque sur la Théorie des Suites, Bruxelles du 18 au 20 déc. 1957, 87—95 (1958).

Gegenstand der Veröffentlichung sind verschiedene Verallgemeinerungen einer von Borel stammenden Methode der analytischen Fortsetzung, welche in ihrer ursprünglichen Form folgendermaßen lautet: Sei $\{f_n(z)\}$ eine Folge analytischer Funktionen, die alle in einem Mittag-Lefflerschen Sternbereich A regulär sind und dort gegen $(1 - z)^{-1}$ konvergieren; diese Konvergenz sei sogar gleichmäßig in jedem endlichen Teilbereich von A . Dann liegt $z = 1$ auf dem Rand von A . Allgemeiner sei $f_n(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(n)} u_v z^v$ eine durch die rechts stehenden Reihen definierte Folge analytischer Funktionen, deren Mittag-Leffler-Sterne bekannt seien. Dann kann man daraus auf den Stern der durch $\sum_{v=0}^{\infty} u_v z^v$ definierten Funktion $f(z)$ schließen und es gilt dort $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$. Liest man diese Gleichung von rechts nach links, so liefert das ein Summationsverfahren für eine vorgegebene Funktion $f(z)$. Die verschiedenen vom Verf. weiterhin genannten Verallgemeinerungen dieser Borelschen Methode geben Anlaß zu einer sehr großen Klasse von Summationsverfahren, in welcher insbesondere das Exponentialverfahren von Borel und das Verfahren von Euler-Knopp enthalten sind. Die Verallgemeinerungen beziehen sich insbesondere auf die Art der Regularitätsbereiche, welche weder mehr Sterne noch einfach zusammen-

hängend zu sein brauchen noch den Nullpunkt enthalten müssen. Vor allem wird über Arbeiten des Verf. und von P. Vermes berichtet. *St. Schottlaender.*

Blambert, M.: Quelques propriétés de répartition des singularités d'une série de Dirichlet générale en relation avec la nature de la suite des coefficients. Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A 2, 251—272 (1957).

Die Arbeit knüpft an klassische Resultate von E. Landau, M. Fekete, V. Bernstein u. a. über den Einfluß der Struktur der Koeffizientenfolge (a_n) einer Dirichletschen Reihe $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ auf die Singularitäten von $f(s)$ an. Unter Beschränkung auf die Klasse der Dirichletreihen mit meßbarer Exponentenfolge (λ_n) werden Verallgemeinerungen im Hinblick auf die Voraussetzungen über die Koeffizientenfolge (a_n) angestrebt. Verf. geht dabei von einem Satz von Cramér-Pólya-Bernstein (in etwas spezialisierter Form) aus, der einen Zusammenhang zwischen den Singularitäten von $f(s)$ und von $\psi(s) = \sum a_n \theta(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}$ herstellt, wo $\theta(z) = \Pi(1 - z^2/\lambda_{n_v}^2)$ und (λ_{n_v}) eine Teilfolge von (λ_n) ist. Für diesen Satz wird ein neuer Beweis gegeben, der an frühere Untersuchungen des Verf. [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 72, 199—235 (1955)] anschließt. Als Anwendungen des Satzes ergeben sich sodann Aussagen über die Singularitäten von $f(s)$, z. B.: Die Exponentenfolge (λ_n) der Dirichletreihe $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ mit endlicher Konvergenzabszisse sei meßbar mit der Dichte $D > 0$ und „regulär“ (d. h. $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\lim (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$). Es sei (λ_{n_v}) eine Teilfolge von (λ_n) mit der Dichte 0 und es erfülle die zu (a_{n_v}) komplementäre Teilfolge (a'_m) von (a_n) die Feketesche Voraussetzung, daß für alle $a'_m = |a'_m| e^{i\tau'_m}$ mit genügend großem m für ein τ aus $0 < \tau < \frac{1}{2}\pi$ die Ungleichung $|\tau'_m| < \tau$ gilt. Dann ist der reelle Punkt der Holomorphieachse von $f(s)$ singular. *F. Lösch.*

Verlan, Nives Maria e Fulvia Skof: Sulla permanenza della struttura lacunare attraverso il prolungamento analitico. Rivista Mat. Univ. Parma 8, 345—360 (1957).

Soit une série de Taylor $\sum a_k z^k$ de rayon de convergence un, présentant des lacunes d'Ostrowski: $a_m = 0$ pour $p_h \leq m \leq q_h$ ($h = 1, 2, 3, \dots$), $q_h/p_h \rightarrow \infty$; sa somme définit une fonction analytique $f(z)$ nécessairement uniforme. Le réf. a montré, que le développement de Taylor de $f(z)$ autour d'un point quelconque de son domaine d'existence peut s'écrire comme somme de deux séries, dont la première présente des lacunes d'Ostrowski: $b_m = 0$ pour $p'_h \leq m \leq q'_h$, $p_h < p'_h < q'_h < q_h$, ($h = 1, 2, 3, \dots$), $q'_h/p'_h \rightarrow \infty$, la seconde série ayant un rayon de convergence plus grand que la première. Les AA. établissent une théorème plus précis, le début des lacunes étant maintenant le même que dans la série initiale: $p'_h = p_h$. *G. Bourion.*

Komatu, Yûsaku: On convolution of power series. Kôdai math. Sem. Reports 10, 141—144 (1958).

Es sei \mathfrak{H} die Klasse der analytischen Funktionen $f(z)$, welche im Einheitskreis regulär sind, dort einen positiven Realteil besitzen und durch $f(0) = 1$ normiert sind. Unter diesen Voraussetzungen werden vier Kompositionssätze bewiesen, z. B. der folgende Satz: Gehören $f(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ zur Klasse \mathfrak{H} , so auch die komponierte Funktion

$$h(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n. \quad \text{St. Schottlaender.}$$

Komatu, Yûsaku: On convolution of Laurent series. Proc. Japan Acad. 34, 649—652 (1958).

Es werden Sätze folgender Art bewiesen: Gehören $f(z)$ und $g(z)$ einer gewissen Klasse \mathfrak{H} von analytischen Funktionen an und wird aus ihren Laurententwicklungen eine neue Laurentreihe „komponiert“, so gehört auch die durch die neue Laurentreihe definierte Funktion $h(z)$ dieser Klasse \mathfrak{H} an. *St. Schottlaender.*

Wilson, R.: On Hadamard composition with algebra e -logarithmic singularities. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 9, 68—72 (1958).

Werden die analytischen Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ durch die Reihen $\sum a_n z^n$ und $\sum b_n z^n$ definiert, so versteht man unter der Hadamardschen Komposition die durch die Reihe $\sum a_n b_n z^n$ definierte Funktion $h(z)$ und man weiß, daß deren Singularitäten höchstens in solchen Punkten liegen können, welche sich als Produkt $\alpha\beta$ einer Singularität α von $f(z)$ und einer Singularität β von $g(z)$ darstellen lassen. Auf die interessante Frage, wann ein solcher Punkt $\alpha\beta$ tatsächlich eine Singularität darstellt, hat Pólya geantwortet, daß dies z. B. der Fall ist, wenn $f(z)$ einen Pol α als einzige Singularität hat. Verf. beweist nun den Satz: Ist die einzige Singularität α von $f(z)$ eine algebraisch-logarithmische Singularität mit einem einzigen „dominierenden Glied“, so ist $\alpha\beta$ stets eine Singularität von $h(z)$, gleichgültig, welcher Art die Singularität β von $g(z)$ ist. Der Satz kann ausgedehnt werden auf den Fall abzählbar vieler Singularitäten α und β , von denen die α algebraisch-logarithmischer Natur sein müssen.

St. Schottlaender.

Buck, R. C.: Converse forms of the Hadamard product theorem. Duke math. J. 26, 133—136 (1959).

Sind $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen, so versteht man unter ihrem Hadamardschen Produkt die Potenzreihe $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ (bzw. die dadurch definierte analytische Funktion h). In der Literatur ist eine große Zahl von Sätzen bekannt, mit deren Hilfe man von Eigenschaften der Funktionen f und g auf Eigenschaften der Funktion h schließen kann; das bekannteste Beispiel ist hier natürlich der Hadamardsche Multiplikationssatz selbst. Unter „converse forms“ versteht der Verf. Sätze, welche es gestatten, von Eigenschaften des Hadamardschen Produktes h auf Eigenschaften der „Faktoren“ f und g zu schließen. Ohne einschränkende Voraussetzungen über die Klasse der als „Faktoren“ zulässige analytischen Funktionen sind, wie einfache Beispiele zeigen, keine sinnvollen Aussagen zu erwarten. Beschränkt man sich dagegen auf die Klasse \mathfrak{A} aller derjenigen analytischen Funktionen, deren Singularitäten (evtl. mit Ausnahme eines im Unendlichen gelegenen Poles) sämtlich in einer kompakten Teilmenge der offenen rechten Halbebene liegen, so erhält man z. B. die folgenden beiden Sätze: Satz 1: Sind f und g aus \mathfrak{A} und ist das Hadamardsche Produkt h ein Polynom, so ist entweder f oder g ein Polynom. Satz 2: Sind f und g aus \mathfrak{A} und ist h in der ganzen Ebene bis auf den Pol γ regulär, so sind f und g überall bis auf Pole α bzw. β regulär. Für diese Pole α und β gilt: $\alpha\beta = \gamma$ und Ordnung $(\alpha) + \text{Ordnung}(\beta) = \text{Ordnung}(\gamma) - 1$. Dieser zweite Satz kann noch verallgemeinert werden, indem als Singularität γ auch eine wesentliche Singularität von endlicher Ordnung zugelassen wird. Der Satz wird jedoch, wie ein Gegenbeispiel am Schluß der Note zeigt, falsch, wenn für γ beliebige isolierte (eindeutige) Singularitäten zugelassen werden.

St. Schottlaender.

Loewner, C. and E. Netanyahu: On some compositions of Hadamard type in classes of analytic functions. Bull. Amer. math. Soc. 65, 284—286 (1959).

Es sei \mathfrak{S} die Klasse der im Einheitskreis regulären und schlichten Funktionen, $f(z)$ und $g(z)$ seien zwei Funktionen aus \mathfrak{S} , dargestellt durch die Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_1 = 1$ und $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ mit $b_1 = 1$, und man bilde die Funktion $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \frac{z^n}{n}$. Es ist vermutet worden, daß unter diesen Voraussetzungen auch $h(z)$ wieder zur Klasse \mathfrak{S} gehören oder wenigstens im Einheitskreis eine nicht verschwindende Ableitung haben müßte. Verf. zeigen auf ganz elementare Weise, daß beide Vermutungen falsch sind.

St. Schottlaender.

Corput, J. G. van der: On the coefficients in certain asymptotic factorial expansions. IV—VII. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **62**, 329—337, 338—346, 347—356, 357—360 (1959).

As in the third paper of this series (this Zbl. 88, 283), the author writes $\psi_0(z, s) = \Gamma(z)/\Gamma(z + s)$, $\psi_1(z, s) = \Gamma(z - s)/\Gamma(z)$ and $\mu = 0$ or 1. We suppose that z belongs to \mathfrak{z} , an unbounded point set in the sector $-\pi + \varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon$, where $\varepsilon > 0$. The author proves: (1) If $f(z) \sim \sum_h A^h z^{-s-h}$ and $g(z) \sim \sum_h (-1)^h A_h z^{-s-h}$, then $f(z-1) \sim \sum_h a_h \psi_0(z, h+s)$ and $g(z) \sim \sum_h (-1)^h a_h \psi_1(z, h+s)$. (2) If $f(z) \sim \sum_m a_m \psi_\mu(z + \mu, m+s)$, then

$$f(z+1) - f(z) \sim - \sum_m (m+s) a_m \psi_\mu(z+u+\mu, m+s+1);$$

if also $\Re(s) > 1$, then $\sum_h f(z+h) \sim \sum_m \frac{a_m}{m+s-1} \psi_\mu(z+u-\mu, m+1)$. The author also finds recurrence relations between the coefficients in the asymptotic expansions of this kind for $f(z)$, $\Phi_l(z)$ and $\sum_l f(z+\alpha_l) \Phi_l(z+\alpha_l)$ and, later, shows when these relations may be of bounded length. Next he finds relations, under certain conditions, between asymptotic expansions of $f(z+\alpha)/f(z)$ and of $f(z)$. The author studies further a variety of linear relations between coefficients in asymptotic expansions and finally deduces as special cases results found by Riney and the reviewer. The four papers are packed with general results, necessarily requiring a fairly lengthy statement, and it is impossible to give a complete account of all these in a review.

E. M. Wright.

Riney, T. D.: Coefficients in certain asymptotic factorial expansions. *Proc. Amer. math. Soc.* **10**, 511—518 (1959).

$$\text{Let } 0 \leq p \leq q, \alpha = q+1-p, \beta = \sum_{j=0}^q \varrho_j - \sum_{i=1}^p \sigma_i + \frac{1}{2}(1-\alpha)$$

and

$$h(w) = (2\pi)^{(\alpha-1)/2} \alpha^{-\alpha w - \beta + \frac{1}{2}} \prod_{i=1}^p \Gamma(w + \sigma_i) \left/ \prod_{j=0}^q \Gamma(w + \varrho_j) \right.$$

For $M > 0$, $|\arg w| < \pi - \varepsilon$ and large $|w|$, it is known that

$$h(w) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{c_m}{\Gamma(\alpha w + \beta + m)} + O\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha w + \beta + M)} \right\}$$

and

$$\{h(w)\}^{-1} = \sum_{m=0}^{M-1} \gamma_m \Gamma(\alpha w + \beta - m) + O\{\Gamma(\alpha w + \beta + M)\}.$$

The author has found recurrence formulae for c_m (i) in terms of c_n ($0 \leq n \leq m$) and (ii) in terms of c_n ($m-q \leq n < m$). Van der Corput (cf. the above review) has found a formula for γ_m of the first kind and the author here presents a general method which produces formulae of the second kind for c_m and for γ_m . *E. M. Wright.*

Wiener, Norbert and Aurel Wintner: On the non-vanishing of Euler products. *Amer. J. Math.* **79**, 801—808 (1957).

Die Funktion $f(s)$, $s = \sigma + it$, sei für $\sigma > 1$ durch das Eulersche Produkt $f(s) = \prod_p (1 - \chi_p(p^s))^{-1}$ erklärt, wo p alle Primzahlen durchläuft und χ_p der Ungleichung $-1 \leq \chi_p \leq 1$ genügt. Für $\chi_p = 1$ ist $f(s) = \zeta(s)$. In den klassischen Beweisen des Primzahlsatzes von Hadamard und de la Vallée Poussin wird aus den Tatsachen, daß (1) $\zeta(s)$ für $s = 1 + it$ mit $t \geq 0$ regulär ist, und (2) $\zeta(s)$ in $s = 1$ einen Pol hat, geschlossen, daß $\zeta(s) \neq 0$ längs $\sigma = 1$ gilt. Verff. untersuchen, ob allgemeiner für jede Funktion $f(s)$ schon aus den schwächeren Voraussetzungen, daß (1') $f(s)$ längs $\sigma = 1$ meromorph ist, und (2') $f(s)$ in $s = 1$ einen Pol hat

geschlossen werden kann, daß $f(s) \neq 0$ längs $\sigma = 1$ gilt. Sie zeigen, daß dies zu bejahen ist und daß dabei sogar die Regularität von $f(s)$ in $s = 1 + it$ mit $t \geq 0$ folgt und zudem die Voraussetzung (2) überflüssig ist. Genauer wird also bewiesen, daß allein aus dem meromorphen Verhalten von $f(s)$ längs $\sigma = 1$ folgt, daß $f(s)$ in allen Punkten $s \neq 1$ von $\sigma = 1$ regulär und $\neq 0$ ist. *F. Lösch.*

Maschler, Michael: Analytic functions of the classes L^2 and l^2 and their kernel functions. *Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser.* 8, 163—177 (1959).

Soit $L^2(D)$ la classe de fonctions analytiques L^2 -intégrables dans un domaine D , $l^2(D)$ la sous-classe de ces fonctions de la classe $L^2(D)$ qui admettent une intégrale uniforme dans D et soit $h^2(D)$ l'ensemble de fonctions $h(z) \in L^2(D)$ remplissant la condition $\int_D l(z) \bar{h}(z) d\omega = 0$ pour chaque $l(z) \in l^2(D)$. L'A. démontre que si la frontière de D a au moins deux composants „not completely point-like“ dans le sens de Grötzsch (ce Zbl. 14, 166) alors il existe dans la classe $h^2(D)$ une fonction ne s'annulant pas dans D . Ce théorème est suivi par son application à l'étude des „kernel-functions“ de Bergman correspondant aux classes $L^2(D)$ et $l^2(D)$.

F. Leja.

Šaginjan, A. L.: Über eine Ungleichung in der Theorie der analytischen Funktionen und einige ihrer Anwendungen. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady*, 27, 257—262 (1958) [Russisch].

Folgende Resultate werden (ohne Beweis, aber unter Angabe eines benutzten Lemmas) angekündigt: 1. Es sei $f(z)$ eine im Einheitskreise holomorphe Funktion

und $\int_0^\varphi |\log |f(\varrho e^{i\varphi})|| d\varphi$ als Funktion von φ für ϱ nahe an 1 gleichgradig absolut stetig. Es sei E eine meßbare Menge auf einem Bogen, der $z = 0$ mit $|z| = 1$ verbindet; E habe mit jedem Kreis $|z| = r$ höchstens einen Punkt gemeinsam. $\omega(t)$ sei in $[0, 1]$ stetig, reell, monoton fallend; $\omega(0) = 1$, $\int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt < \infty$ ($t = |z|$). Dann

gilt (für eine gewisse Konstante a) die Ungleichung $|f(z)| <$

$$a \exp \left\{ (1-|z|) \int_E \omega(|z|) \log |f(z)| d|z| \right\} \left\{ 4 \int_E \frac{\omega(t)}{1-t} dt \right\} \exp \left\{ \frac{1}{\pi(1-|z|)} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi \right\}.$$

Korollar: Ist $\int_E \omega(|z|) \log |f(z)| d|z| = -\infty$, so folgt $f \equiv 0$. 2. Ist $f(z)$ im Einheitskreis beschränkt und $p(x)$ eine im Intervall $[0, 1)$ definierte reelle Funktion, so folgt aus $|f(x)| < e^{-p(x)/(1-x)}$ und $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = +\infty$ die Identität $f \equiv 0$. *P. Seibert.*

Srivastav, R. P.: On the mean value of integral functions and their derivatives. *Rivista Mat. Univ. Parma* 8, 361—369 (1957).

Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ ; soit $I(r)$ la valeur moyenne de $|f(z)|$ sur $|z| = r$; on définit de même $I^{(s)}(r)$ à partir de la dérivée s -ième de $f(z)$. L'A. établit quelques inégalités entre les fonctions $I(r)$, $I^{(1)}(r)$, $I^{(2)}(r)$, ... Il semble au Ref. que certains raisonnements (voir le lemme précédant le théorème 3) devraient être précisés. L'Article se termine par quelques considérations sur la valeur moyenne de $\log |f(z)|$ qui se rattachent très étroitement aux travaux de Shah. *J. Dufresnoy.*

Shankar, Hari: Note on a theorem of Shah. *Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser.* 8, 225—227 (1959).

Let f be a meromorphic function. Let $n(r, a)$ denote the number of zeros of $f - a$ in $|z| \leq r$ (when $a = \infty$, this denotes the number of poles). Let $N(r, a) = \int_0^r n(t, a) \frac{dt}{t}$. Let a_p , $p = 1, 2, \dots, q$, be q complex numbers (one of which may be infinity). Let $N(r)$ be the max of $N(r, a_p)$, $p = 1, 2, \dots, q$. Then the author

shows that $\liminf_{r \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^q \frac{n(r, a_p)}{N(r)} \leq q \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{\log r}$. Some corollaries are listed and it is shown that the result includes results due to Shah [J. Indian math. Soc., n. Ser. 5, 189—191 (1941)]; this Zbl. 61, 150). (Reviewer's note: the notation used by the author for $N(r)$ and its $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{\log r}$ seem to imply that these are attained for a fixed one of the numbers a_p as r varies in the former case and as p varies in the latter case. These implications are not warranted). *V. Ganapathy Iyer.*

Tanaka, Chuji: Note on the cluster sets of the meromorphic functions. Proc. Japan Acad. 35, 167—168 (1959).

Let D be a domain in a plane, z_0 be a non-isolated boundary point of D and $f(z)$ be meromorphic in D . Denote by \mathfrak{D}_r the set of values taken by $f(z)$ in $D \cap \{|z - z_0| < r\}$. Set $\bigcap_{r>0} \bar{\mathfrak{D}}_r = S_{z_0}^{(D)}$, $\bigcap_{r>0} \mathfrak{D}_r = R_{z_0}^{(D)}$ and denote the interior of $S_{z_0}^{(D)}$ by $O_{z_0}^{(D)}$. The following theorem is proved: If $O_{z_0}^{(D)}$ is not empty, $R_{z_0}^{(D)}$ contains a G_δ set $\bigcap_m O_m$, where each O_m is an open set everywhere dense in $O_{z_0}^{(D)}$. [Remark: This theorem is an immediate consequence of the definitions of $S_{z_0}^{(D)}$ and $R_{z_0}^{(D)}$. In fact, it is sufficient to take $\mathfrak{D}_{1/m} \cap O_{z_0}^{(D)}$ for O_m]. *M. Ohtsuka.*

Royster, W. C.: Functions having positive real part in an ellipse. Proc. Amer. math. Soc. 10, 266—269 (1959).

f sei holomorph in der Ellipse E mit den Brennpunkten $+1, -1$ und der Halbachsensumme R . Ist die Entwicklung von f nach den zugehörigen Tschebyscheff-Polynomen normiert: $f(z) = 1 + \sum_1^\infty a_n T_n(z)$, $z \in E$, und der Realteil von $f(z)$ für $z \in E$ stets positiv, so genügen die Koeffizienten $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ der Abschätzung $\alpha_n^2 (R^n + R^{-n})^2 + \beta_n^2 (R^n - R^{-n})^2 \leq 16$; zu jedem n gibt es eine Funktion, für deren n -ten Koeffizienten das Gleichheitszeichen gilt. *H. Tietz.*

Reza, F. M.: A multiplication theorem for positive real functions. Proc. Amer. math. Soc. 9, 496—499 (1958).

Unter einer positiv reellen Funktion versteht Verf. eine analytische Funktion $f(z)$ der (komplexen) Veränderlichen z , welche drei Bedingungen genügt: 1. $f(z)$ ist eindeutig und regulär in der Halbebene $\operatorname{Re} z \geq 0$ bis auf eventuelle Pole auf der imaginären Achse; 2. $f(z)$ ist reellwertig für reelle Werte von z ; 3. $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, falls $\operatorname{Re} z \geq 0$ ist. Die Note liefert einige Beiträge zur „Algebra“ dieser positiv-reellen Funktionen, z. B. den Satz: Sind f_1, f_2, \dots, f_n positiv reelle Funktionen, dann ist auch

$$f = \left(\prod_{k=1}^n (1 + f_k) - \prod_{k=1}^n (1 - f_k) \right) / \left(\prod_{k=1}^n (1 + f_k) + \prod_{k=1}^n (1 - f_k) \right)$$

eine positiv-reelle Funktion. Sätze dieser Art haben gewisse Anwendungen in der Theorie der elektrischen Netzwerke. *St. Schottlaender.*

Schiffer, M. M.: Applications of variational methods in the theory of conformal mapping. Proc. Sympos. appl. Math. 8, 93—113 (1959).

Soit D un domaine plan quelconque et $f(z)$ une fonction analytique univalente dans D . On peut distinguer dans ce travail trois parties. La partie initiale commence par deux théorèmes dont le premier assure un formalisme à varier la fonction $f(z)$ de manière qu'elle reste univalente dans D et le second, démontré ailleurs (ce Zbl. 19, 222), permet de caractériser les fonctions univalentes jouissant d'une propriété extrémale dans une famille compacte de fonctions univalentes dans D . La partie subséquente est consacrée à la variation de la fonction de Green $g(z, \zeta)$ du domaine D correspondant à une variation infinitésimale de la frontière C de D et la partie finale à la variation d'une valeur caractéristique λ du noyau $K(z, \zeta)$ de l'équation intégrale

de Fredholm $\varphi(z) = \frac{\lambda}{\pi} \int_C K(z, \zeta) \varphi(\zeta) ds_\zeta$ lorsqu'on fait varier la frontière (assez régulière) C de D . Chacune des parties est suivie par des exemples qui illustrent dans quels problèmes les méthodes de variation exposées peuvent être appliquées.

F. Leja.

Kühnau, Reiner: Berechnung einer Extremalfunktion der konformen Abbildung. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, math.-naturw. R. 9, 285—288 (1960).

Es sei B ein beliebiges schlichtes Gebiet und $z_k \in B$ ($k = 1, 2, 3, 4$), ferner $w = f(z)$ eine beliebige schlichte Abbildung von B mit $w_k = f(z_k)$. Grötzsch (Zbl. 7, 214) stellte und löste das Problem, den gesamten Wertevorrat des Doppelverhältnisses $\lambda = D(w_k)$ zu bestimmen, wenn f alle schlichten Abbildungen von B durchläuft: Bildet $\omega(\lambda)$ die elliptische Modulfläche auf $I(\omega) > 0$ ab, so erfüllen die Punkte $\omega(D(w_k))$ einen abgeschlossenen Kreis. Verf. gibt diesen explizit an für den Fall, daß $B: |z| > 1$ ist; Radius und Mittelpunkt werden durch Konstanten ausgedrückt, die durch Linienintegrale bestimmt werden müssen. Auch die Extremalfunktionen, für die $\omega(D(w_k))$ auf dem Kreisrand liegen, werden explizit angegeben.

D. Gaier.

Korickij (Koritsky), G. V.: Curvature of "level curves" in schlicht conformal mappings. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 653—654 (1957) [Russisch].

Let Σ denote the class of functions of the form $F(z) = z + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ which are regular and univalent in $|z| > 1$, and let Σ_p denote the subclass of Σ of functions of the form $F_p(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n-p-1}}$ which map $|z| > 1$ onto a domain having p -tuple rotational symmetry and star-shaped relative to $w = 0$. If K_ρ denotes the curvature of the level curve corresponding to $|z| = \rho > 1$, then $K_\rho \leq \rho(\rho^2 + 1)/(\rho^2 - 1)^2$ for functions of the class Σ , while

$$K_\rho \leq \rho[\rho^{2p} + 2(\rho - 1)\rho^p + 1]/(\rho^p - 1)^2(\rho^2 + 1)^{2/p}$$

for functions of the class Σ_p .

A. J. Lohwater.

Shah, Tao-shing: Goluzin's number $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ is the radius of superiority in subordination. Science Record, n. Ser. 1, 219—222 (1957).

It is shown that if $f(z)$ and $F(z)$ are regular in $|z| < 1$, and if $f(z)$ is subordinate to $F(z)$, where $F(z)$ is univalent, then $|f(z)| < |F(z)|$ in $0 < |z| < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, provided $\arg f'(0) = \arg F'(0)$ and $f \not\equiv F$. The number $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ is best possible.

A. J. Lohwater.

Shah, Tao-shing: On the radius of superiority in subordination. Science Record, n. Ser. 1, 329—333 (1957).

Under the hypotheses in the preceding paper, it is shown that $|f'(z)| < |F'(z)|$ in $0 < |z| < 3 - \sqrt{8}$, the number $3 - \sqrt{8}$ being best possible. *A. J. Lohwater.*

Stallmann, Friedemann: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. III. Math. Z. 68, 245—266 (1957).

Verf. schließt seine Untersuchungen (dies. Zbl. 47, 80; 55, 72; 79, 101) durch die Diskussion der Laméschen Differentialgleichung einschließlich ihrer Ausartung, der Mathieschen Gleichung, ab.

W. Haacke.

Rešetnjak (Reshetniak), Ju. G. (Ju. G.): A sufficient condition for Hölder continuity of a mapping. Soviet Math., Doklady 1, 76—78 (1960), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR 130, 507—509 (1960).

Let E^n be the n -dimensional Euclidean space and $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a point in E^n . A mapping $Y(X): E^n \rightarrow E^n$ is called a quasiconform (q -mapping) in an open domain $M \subset E^n$ with the coefficient of deformation q if (a) $Y(X)$ is a topological

mapping, (b) the vector-valued function $Y(X) = (y_1(X), \dots, y_n(X))$ possesses continuous first order derivatives and $\partial(y_1, \dots, y_n)/\partial(x_1, \dots, x_n) > 0$ for all $X \in M$, (c) For any $X \in M$ $Y(X)$ transforms an infinitely small sphere around X in an infinitely small ellipsoid the ratio of the greatest and the smallest diameter of which is $\leq q$. Theorem. A q -mapping of the open unit ball Q in Q satisfies the Hölder condition on any compact set $F \subset Q$ with the order and the coefficient depending on q and F only. This theorem is a consequence of a more general result which the author proves by considering a mapping $Y: M \rightarrow E^m$ where M is an open domain in E^n ($n \leq m$). He defines a class $I(k)$ ($0 < k < 1$) and then proves that if Y is in the class $I(k)$ then for any compact set $F \subset M$ $\|Y(X_1) - Y(X_2)\| \leq A \|X_1 - X_2\|^k$, $X_1, X_2 \in F$ where A depends on Y , the distance of F to the boundary of M and F only.

S. Kurepa.

Lavrent'ev (Lavrentiev), M. A. and B. V. Šabat (Shabat): The geometric properties of solutions of non-linear systems of partial differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 810—811 (1957) [Russisch].

Die Verff. untersuchen eine Klasse nichtlinearer Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung auf der Ebene. Für Lösungen dieser Systeme sollen alle topologischen Eigenschaften analytischer Funktionen gelten.

K. Maurin.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

● **Miller, Kenneth S.:** An introduction to the calculus of finite differences and difference equations. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1960. VIII, 167 p. \$ 4,50.

Inhalt: Kap. 1: Definitionen, Stirlingsche Zahlen, Newtonsche Interpolationsformel, unbestimmte und bestimmte „Summe“ (Umkehrung der Differenz). Kap. 2 und 3 behandeln solche Gegenstände, denen das Arbeiten mit Differenzenrechnung besonders angepaßt ist. Kap. 2: Unendliche Produkte mit Anwendungen auf die Gammafunktion. Kap. 3: Bernoullische Zahlen und Polynome, Euler-MacLaurinsche Formel und deren Anwendung zur Herleitung asymptotischer Entwicklungen, insbesondere der Stirlingschen Formel. Kap. 4: Theorie der linearen Differenzengleichungen im Reellen mit kontinuierlicher Variablen und variablen Koeffizienten. Jedem Kapitel ist eine große Anzahl von Aufgaben beigegeben, deren Ergebnisse Ergänzungen zu dem Stoff des Textes liefern.

G. Doetsch.

Hull, T. E. and W. A. J. Luxemburg: Numerical methods and existence theorems for ordinary differential equations. Numerische Math. 2, 30—41 (1960).

Die Verff. zeigen, daß man den Cauchy-Lipschitzschen Satz für die Existenz einer eindeutigen Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$ auf mannigfache Weisen durch Konstruktion einer Folge von „Näherungslösungen“ beweisen kann. Und zwar kann man in Verallgemeinerung des bekannten Eulerschen Polygonverfahrens $y_{n+1} - y_n = f(x_n, y_n)$ auch jedes andere Differenzenverfahren zur Konstruktion geeigneter Näherungslösungen verwenden, sofern das Verfahren nur „stabil“ und in erster Näherung mit der Differentialgleichung verträglich ist. An Stelle der üblichen Lipschitz-Bedingung kann auch die schwächere Osgoodsche Bedingung verwendet werden. Setzt man aber nur die Stetigkeit von $f(x, y)$ voraus, so erhält man auf die gleiche Weise auch den Existenzsatz von Peano. — Hervorzuheben ist die besonders einfache Formulierung des Begriffs der Stabilität eines Differenzenverfahrens.

H. Eltermann.

Nevanlinna, Rolf: Zur Theorie der Normalsysteme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 423—428 (1957).

Der Verf. beweist unter Verwendung der Cauchyschen Polygonmethode und eines bekannten Satzes von Osgood die folgende Verallgemeinerung des klassischen

Picard-Lindelöfschen Existenz- und Unitätssatzes: Die Vektorvariable y als Funktion einer reellen Variablen x sei Element eines mit einer Minkowski-Banach-Metrik gezeichneten linearen Raumes R_y^n der Dimension n ($\leq \infty$) ($|y|$ = Norm von y). Die Anfangswertaufgabe (x_0, y_0 gegeben) $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ genüge den Voraussetzungen: 1. Für $|x - x_0| \leq r_x$, $|y - y_0| \leq r_y$ mit passenden r_x, r_y sei $f(x, y) \in R_y^n$ eine stetige Funktion von x und y . 2. $|f|$ besitze dort die endliche obere Grenze $M = \sup |f|$ und o. B. d. A. sei $M r_x \leq r_y$ (evtl. r_x verkleinern!). 3. Das mit der Schwankung $\varphi(\varrho) = \sup |f(x, y_1) - f(x, y_2)|$ für $|x - x_0| \leq r_x$ und $|y_1 - y_2| \leq \varrho$ (y_1, y_2 beliebig) gebildete Integral $\int_0^{\varepsilon} \frac{d\varrho}{\varphi(\varrho)}$ ($\varepsilon > 0$ beliebig) sei divergent. Dann konvergieren die nach der Polygonmethode konstruierten Näherungen y_D bei unbeschränkter Verfeinerung der Intervallteilungen D des Intervalls $(x_0, x_0 + r_x)$ dort gegen eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung, und diese ist durch $y(x_0) = y_0$ eindeutig bestimmt. Ist mit konstantem C insbesondere $\varphi(\varrho) = C\varrho$, d. h. genügt f einer Lipschitzbedingung, dann gilt die Abschätzung $|y - y_D| \leq M \delta (\exp(3Cr_x) - 1)$ (δ = Länge des größten Intervalls aus D). Ähnliche Abschätzungen lassen sich für andere $\varphi(\varrho)$ gewinnen.

G. Bertram.

Filippov, A. F.: Über die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 6(90), 197—201 (1959) [Russisch].

Es wird folgender Satz bewiesen: Es sei A eine Menge von Punkten eines n -dimensionalen Raumes. Es sei $a = (a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(n-1)}) \in A$. Es sei weiter $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$, $n \geq 1$, in dem Intervall $J = \langle t_0, t_0 + T \rangle$, die durch die Anfangsbedingungen (2) $x(t_0) = a^{(0)}$, $x'(t_0) = a^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = a^{(n-1)}$ bestimmt ist. Damit die Lösung $x(t)$ in dem Intervall J von den Anfangsbedingungen stetig abhängt, ist notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt sind; 1. Durch die Anfangsbedingungen von der Form (2) wird die Lösung der Gleichung (1) in J eindeutig bestimmt. 2. Für eine beliebige abgeschlossene Menge $F \subseteq A$ gilt, daß alle Lösungen der Gleichung (1), deren Anfangsbedingungen a aus F sind, in J gleichgradig stetig sind. 3. Es sei $J_1 = \langle t_0, t_1 \rangle \subseteq J$. Jede Folge $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, von Lösungen von (1), deren Anfangsbedingungen $a_k \in A$, $k = 1, 2, \dots$, gegen $a \in A$ konvergieren, konvergiert in J gleichmäßig gegen die Lösung $x(t)$, die durch die Anfangsbedingungen a bestimmt ist. Man kann die Bedingung 2. durch folgende Bedingung ersetzen: 2a. Es existiert zu jeder Lösung $x(t)$ von (1) ein solches $\varepsilon > 0$, daß die Lösungen $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, von (1), deren Anfangsbedingungen $a_k \in A$, $k = 1, 2, \dots$, gegen die Anfangsbedingungen $a \in A$ der Lösung $x(t)$ konvergieren, in der abgeschlossenen ε -Umgebung der Lösung $x(t)$ gleichgradig stetig sind, oder genauer gesagt, sie sind gleichgradig stetig in solchen Intervallen $\langle t_0, t_k \rangle$, daß $|x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon$ für $t_0 \leq t \leq t_k$ gilt. Es wird auch gezeigt, daß die Bedingungen 1., 2a., 3. unabhängig sind.

M. Švec.

Iwano, Masahiro: Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier. I, II. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 44, 261—292 (1957); 47, 91—149 (1959).

Verf. betrachtet das Differentialgleichungssystem $x^{\sigma+1} dy_j/dx = \lambda_j(x) y_j + x^\sigma h_j(x, y_1, \dots, y_n)$, $j = 1, \dots, n$, wobei die Funktionen $h_j(x, y_1, \dots, y_n)$ in $\vartheta_0 < \arg x < \vartheta_1$, $|x| < r$, $|y_1| < s, \dots, |y_n| < s$, holomorph und die $\lambda_j(x)$ Polynome in x von einem Grad $\leq \sigma - 1$ sind, und fragt nach der Existenz formaler Lösungen und deren Konvergenz. Hierzu werden Methoden herangezogen, welche auf Hukuhara [dies. Zbl. 16, 305; 23, 228; Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ. A 2 125—137 (1942)] zurückgehen; die erhaltenen Resultate verschärfen frühere Resultate von Hukuhara und Malmquist (dies. Zbl. 25, 327, 328, 329). Die formalen Lösungen werden aus formalen Potenzreihen in den Variablen z_1, \dots, z_n mit in x

holomorphen Koeffizienten dadurch erhalten, daß für z_1, \dots, z_n gewisse Hilfsfunktionen von x (welche eine Reihe von willkürlichen Konstanten enthalten) substituiert werden. Das Problem ist, geeignete hinreichende Bedingungen dafür zu finden, daß diese Reihen konvergieren und eine Lösung des ursprünglichen Differentialgleichungssystems darstellen. Es läßt sich tatsächlich zeigen, daß die Reihen konvergieren und eine Lösung liefern, falls die Anfangswerte nicht zu groß sind und x auf ein geeignetes keilförmiges Gebiet (mit Spitze in $x = 0$) beschränkt wird; der sehr umfangreiche Beweis benötigt gewisse unangenehme Voraussetzungen, welche jedoch nicht nötig zu sein scheinen. Die einzelnen Resultate sind zu kompliziert und verwickelt, um hier in Kürze wiedergegeben zu werden. H. Röhr.

Korobejnik, Ju. F.: Über die analytischen Lösungen einer Gleichung unendlicher Ordnung mit polynomialen Koeffizienten. *Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat.* **3** (10), 130—146 (1959) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit der Gleichung

$$(1) \quad y + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) y^{(k)} = f(x),$$

wo $f(x)$ eine ganze Funktion und $P_k(x)$ ein Polynom höchstens $(k-1)$ -ten Grades:

$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i^k x^i$, ist. In diesem Falle nennt er die Gleichung (1) regulär. Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung von (1) wird in folgendem Sinne bewiesen: Es sei $|a_i^k| \leq A_i^k$, $i = 0, 1, \dots, k-1$; $k = 1, 2, \dots$. Es gibt zu der Folge $\{A_i^k\}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, $k = 1, 2, \dots$, eine Folge $\{A_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, für welche

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{A_k} \sum_{m=1}^{k-1} m! A_m \sum_{s=0}^m \frac{A_s^{k-m+s}}{(m-s)!} < 1, \quad (3) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{s-1} A_k}{A_s} < \infty, \quad (4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_0^k}{A_k} < \infty$$

gilt. Es sei S_A die Menge solcher Folgen $\{y_k\}$, $k = 0, 1, \dots$, daß $\sum_{k=0}^{\infty} A_k |y_k| < \infty$

und es sei K_A die Menge der Funktionen von der Form $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{k!} x^k$, wo

$\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \in S_A$. Wenn $f(x) \in K_A$, so hat die Gleichung (1) gerade eine Lösung in der Klasse K_A . Es gibt außerdem eine solche Zahl $D > 0$, daß $\sum_{k=0}^{\infty} A_k |y^{(k)}(0)| <$

$D \sum_{k=0}^{\infty} A_k |f^{(k)}(0)|$ ist. Es wird weiter eine Methode zum Aufsuchen einer ange-näherten Lösung von (1) und der Grad der Approximation gegeben. Zum Schluß zeigt Verf., daß die Regularität der Gleichung (1) für die Existenz und Eindeutigkeit in gewissem Sinne notwendig ist. M. Švec.

Knobloch, Hans-Wilhelm: Zusammenhänge zwischen konvergenten und asymptotischen Entwicklungen bei Lösungen linearer Differentialsysteme vom Range Eins. *Math. Ann.* **134**, 260—288 (1958).

In dem linearen System n -ter Ordnung $y' = yM$, y Zeilenvektor, soll die Systemmatrix $M = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{-j}$ für $|x| > R$ regulär sein. Weiter sollen n linear unabhängige Normalreihen der Form

$$v(x) = e^{\alpha x} x^{-\epsilon} \sum_{i=0}^m \log^i(x^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^{-j},$$

α Eigenwerte von A_0 , dem System genügen. Dabei wird für die Koeffizienten $|a_{ij}| < c^j j!$ gefordert. Zu jeder Normalreihe wird mit Hilfe abgebrochener Laplace-Integrale ein Zeilenvektor $l_v(x)$ konstruiert mit der Eigenschaft $l'_v(x) - l_v(x) M \equiv 0 \pmod{x^{-1}}$ oder $L'(M) - L(M) M \equiv 0 \pmod{x^{-1}}$, wenn $L(M)$ die mit l_{v_1}, \dots, l_{v_n}

gebildete Matrix ist. Diese ganze Funktion $L(M)$ wird durch Anhängen einer passenden Reihe, die nach Potenzen von x^{-1} fortschreitet, zu einer formalen Laurent-Reihe $X(M)$ erweitert. Die Zusatzreihe ist so gewählt, daß $X' - XM = 0$ gilt. Jede formale Laurent-Reihe Y , $Y' - YM = 0$, ist von der Form $Y = C X(M)$, C eine konstante Matrix. Ist das allgemeine Integral von $y' = yM$ eindeutig in $x = \infty$, dann sind die Normalreihen von der Form $e^{\alpha x} x^{\rho} P(x^{-1})$ mit ganzem ρ und konvergenter Reihe $P(x^{-1})$. Das ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Hoheisel. Die Anwendung der Ergebnisse auf ein Differentialsystem der Ordnung 2 vom Range 1 mit der Lösung $f = x^{k/p} F$, wobei F in der Umgebung von $x = \infty$ eindeutig ist, führt zu dem Resultat: Für genügend große n lassen sich die Cauchy-schen Integrale $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|z|=r} z^{-n-1} f(z^p) dz$ dadurch bestimmen, daß man die Funktionswerte $f(z^p)$ durch die jeweils gültigen asymptotischen Entwicklungen ersetzt, gliedweise integriert und dann gliedweise den Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ vollzieht. Damit lassen sich Behauptungen von L. Hopf begründen. L. Hopf hatte 1935 in einer Arbeit (dies. Zbl. 12, 256), die Verf. zu der vorliegenden Untersuchung angeregt hat, diese Behauptungen auf Grund von heuristischen Überlegungen angegeben.

H. Wittich.

Brodskij (Brodsky), M. S.: The inverse of a problem for systems of linear differential equations involving a parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 800—803 (1957) [Russisch].

In seguito delle idee di una sua nota precedente [Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 926—929 (1956)] si stabiliscono alcune condizioni sufficienti affinché si ripristinano univocamente i coefficienti $b_{ij}(x)$ del sistema

$$(1) \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{i}{\lambda} \sum_{j=1}^n b_{ij}(x) y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq x \leq l),$$

se vi si dà la matrice $W(\lambda) = W(l, \lambda)$, ove λ è un parametro complesso e $W(x, \lambda)$ ne è la matrice fondamentale delle soluzioni del sistema (1), e cioè

$$(2) \quad dW(x, \lambda)/dx = i \lambda^{-1} b(x) W(x, \lambda), \quad W(0, \lambda) \equiv I \quad [b(x) = \|b_{ij}(x)\|].$$

Si riproducono qui sotto gli enunciati dei seguenti teoremi, i cui dimostrazioni si eseguiscano tramite il metodo operativo, concernenti i sistemi normati (1), e cioè tali che $\sum_{i=1}^n b_{ii}(x) = 1$. Teorema I (4). Siano due sistemi differenziali normati

$$(3) \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{i}{\lambda} \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(1)}(x) y_j, \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{i}{\lambda} \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(2)}(x) y_j,$$

dati nell'intervallo $x \in [0, l]$, con le matrici dei coefficienti $b^{(1)}(x) = \|b_{ij}^{(1)}(x)\|$, $b^{(2)}(x) = \|b_{ij}^{(2)}(x)\|$ hermitiane non negative. Le funzioni $b_{ij}^{(1)}(x)$ posseggono derivate del primo ordine assolutamente continue, allorchè il rango della matrice $b^{(1)}(x)$ è uguale ad uno per ogni $x \in [0, l]$. Siano poi $W^{(1)}(x, \lambda)$ e $W^{(2)}(x, \lambda)$ le matrici fondamentali delle soluzioni di essi sistemi (3). Allora dall'identità $W^{(1)}(l, \lambda) \equiv W^{(2)}(l, \lambda)$ ne risulta $b_{ij}^{(1)}(x) \equiv b_{ij}^{(2)}(x)$. Teorema II (5). Siano per $x \in [0, l]$ dati due sistemi normati di equazioni differenziali (3) ove $b^{(2)}(x)$ è una matrice hermitiana non negativa con gli elementi sommabili e la matrice $b^{(1)}(x) = \xi^*(x) = \xi(x)$, $\xi(x) = -\|\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_n(x)\|$, ove il vettore $\xi(x)$ ne conserva un valore costante $\xi^{(i)}$ in ogni intervallo che ne fa parte di una suddivisione $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_p = l$. Si ha $b^{(1)}(x) = b^{(2)}(x)$ se $W^{(1)}(l, \lambda) \equiv W^{(2)}(l, \lambda)$ e se tra i vettori $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(p)}$ non vi sono due vettori vicini mutualmente ortogonali.

D. Mangeron.

Focke, Joachim: Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Sprungfunktionen. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, math.-naturw. R. 8, Festjahrgang 550-Jahrfeier, 867—870 (1959).

In der Arbeit werden implizite Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im Falle verschwindender Koeffizientendeterminante betrachtet. Für diese ist das Anfangswertproblem im allgemeinen unlösbar, obwohl es physikalisch durchaus sinnvoll sein kann. Verf. zeigte, daß solche Anfangswertprobleme sich durch Sprungfunktionen lösen lassen, wenn man das Differentialgleichungssystem im distributionstheoretischen Sinne auffaßt. Zur praktischen Herstellung der Lösung kann die Methode der Laplace-Transformation angewendet werden.

M. Greguš.

Wetterling, W.: Zum Einschließungssatz von Kryloff-Bogoliubov für allgemeine Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Numerische Math. 2, 18—21 (1960).

Verf. betrachtet die Eigenwertaufgabe $M[y] = \lambda N[y]$ mit

$$M[y] = \sum_{\nu=0}^m [f_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x)]^{(\nu)}, \quad N[y] = \sum_{\nu=0}^n [g_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x)]^{(\nu)},$$

wobei $n < m$ sei und f_{ν} , g_{ν} ν -mal stetig differenzierbar im Intervall $[a, b]$. Die Randbedingungen seien unabhängig und von der Gestalt $V_{\mu}[y] = 0$ ($\mu = 1, 2, \dots, 2m$) mit

$$V_{\mu}[y] = \sum_{\nu=0}^{2m-1} [\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b)].$$

Die Aufgabe sei selbstadjungiert, d. h. es sei für beliebige Vergleichsfunktionen u und v ($2m$ -mal stetig differenzierbare Funktionen, die den Randbedingungen genügen)

$$\int_a^b (u M[v] - v M[u]) dx = \int_a^b (u N[v] - v N[u]) dx = 0.$$

Verf. nimmt außerdem nur Definitheit im engeren Sinne an, d. h. daß für alle Vergleichsfunktionen u , außer $u \equiv 0$, $\int_a^b u M[u] dx > 0$ gilt. Die Aufgabe muß also

nicht volldefinit sein, d. h. $\int_a^b u N[u] dx > 0$ wird nicht verlangt. Er beweist dann den Satz: u_0 , u_1 , u_2 seien drei Vergleichsfunktionen, die in der Beziehung

$$M[u_k] - t N[u_k] = N[u_{k-1}] \quad (k = 1, 2)$$

zueinander stehen, wobei $[0, t]$ keinen Eigenwert enthält. Es sei

$$a_1 = \int_a^b u_1 N[u_0] dx, \quad a_2 = \int_a^b u_1 N[u_1] dx = \int_a^b u_2 N[u_0] dx, \quad a_3 = \int_a^b u_1 N[u_2] dx.$$

Dann liegt zwischen

$$t + \frac{a_2}{a_3} - \sqrt{\frac{a_1}{a_3} - \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2} \quad \text{und} \quad t + \frac{a_2}{a_3} + \sqrt{\frac{a_1}{a_3} - \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2}$$

mindestens ein Eigenwert der Aufgabe. Verf. wendet schließlich seinen Satz auf zwei Beispiele an, bei welchen die Aufgabe nicht volldefinit ist und wo folglich der klassische Einschließungssatz von Kryloff-Bogoliubov nicht benutzt werden kann.

N. Forbat.

Greguš, Michal: Über einige neue Randwertprobleme der Differentialgleichung dritter Ordnung. Czechosl. math. J. 7 (82), 41—47, deutsche Zusammenfassung 47 (1957) [Russisch].

Sia data l'equazione differenziale $(1) y''' + 2A(x, \lambda)y' + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)]y = 0$ dove λ è un parametro reale ed i coefficienti A , A' , b sono funzioni continue di (x, λ) per $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in (A_1, A_2)$; alla (1) si associ una delle seguenti condizioni ai limiti: 1. $y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0$; 2. $y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0$; 3. $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$; 4. $y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y(c, \lambda) = 0$; 5. $y(a, \lambda) =$

$y'(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$, essendo $a < b < c$. Supposto che $A(x, \lambda)$ sia positiva e, per ogni x , funzione crescente di λ e divergente a $+\infty$ quando $\lambda \rightarrow A_2$ e che $b(x, \lambda)$ sia non negativa e per ogni λ l'insieme delle x per cui $b(x, \lambda) = 0$ non abbia punti interni, l'A., valendosi di un teorema di oscillazione di G. Sansone (questo Zbl. 41, 420), prova che in corrispondenza a ciascuna delle condizioni 1.—5. esiste una successione di autovalori $\{\lambda_{v+p}\}$ ($p = 1, 2, \dots$) tali che le rispettive autosoluzioni $y_{v+p} = y(x, \lambda_{v+p})$ hanno $v + p$ zeri in (a, b) nel caso delle condizioni 1. e 2., in (b, c) nel caso delle condizioni 3. 4. e 5.

R. Conti.

Rofe-Beketov, F. S.: Über eine Randwertaufgabe für eine nichtlineare Differentialgleichung. Mat. Prosvesčenie 1, 149—154 (1957) [Russisch].

Es wird eine Lösung $y = y(x)$ der Randwertaufgabe $y'' = f(x, y)$; $y(a) = A$, $y(b) = B$ gesucht. Diese Randwertaufgabe hat mindestens eine Lösung unter folgenden Voraussetzungen: Für $x \in \langle a, b \rangle$ existieren zwei Funktionen $p(x) \geq q(x)$, für welche $p''(x) \leq f[x, p(x)]$, $q''(x) \geq f[x, q(x)]$, $p(a) \geq A \geq q(a)$, $p(b) \geq B \geq q(b)$ gilt; $p''(x)$, $q''(x)$ sind absolut integrierbar; im Gebiet $S: a \leq x \leq b$, $q(x) \leq y \leq p(x)$ ist die Funktion $f(x, y)$ stetig und nimmt in bezug auf y ab. Der Satz wird für die Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ bewiesen. Es wird gezeigt, daß die Funktionenfolge $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$y_n(x) = \int_0^x dt \int_0^t f[s, y_{n-1}(s)] ds - x \int_0^1 dt \int_0^t f[s, y_{n-1}(s)] ds, \quad n = 1, 2, \dots,$$

wobei entweder $y_0(x) = p(x)$ oder $y_0(x) = q(x)$ ist, im Intervall $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig gegen eine gesuchte Lösung konvergiert. Den Satz kann man auf eine Klasse gewisser Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung, für gewisse Typen von elliptischen Differentialgleichungen und für Integralgleichungen

$$y(x) = \int_a^b K[x, t, y(t)] dt \quad \text{verallgemeinern.}$$

M. Laitoch.

● **Nemytskii, V. V. and V. V. Stepanov:** Qualitative theory of differential equations. (Princeton Mathematical Series). New Jersey: Princeton University Press 1960. VIII, 523 p. \$ 12,50.

Si tratta della traduzione inglese, da tempo annunciata, di un'opera molto conosciuta nel mondo matematico nonostante l'ostacolo rappresentato dalla lingua. La presente traduzione è condotta sulla 2^a ediz. russa [notevolmente ampliata e riveduta, almeno nei primi capitoli, rispetto alla 1^a ediz. (questo Zbl. 41, 418)] ed è da considerarsi integrale e, in molte parti, addirittura letterale. Tuttavia l'esposizione del metodo delle superficie di sezione (Cap. IV, § 4) è una rielaborazione, notevolmente condensata, di quella che si trova nel testo originale (Cap. IV, § 5); inoltre è stato soppresso un esempio di A. G. Maier (questo Zbl. 29, 233; 30, 28) relativo alle traiettorie centrali. D'altro canto la parte dei sistemi dinamici è stata fatta precedere, molto opportunamente, da un ampio paragrafo dedicato alle principali proprietà degli spazi metrici in modo da eliminare la necessità di ricorrere altrove. Inoltre, a conclusione della prima parte, è stata inserita in appendice la traduzione di un rapporto di V. V. Nemyckij, pubblicato nel Vestnik Moskovsk. gosudarst. Univ. del 1952 (questo Zbl. 47, 83), inteso principalmente ad illustrare il lavoro svolto fino a tale data, dopo l'uscita della 2^a ediz. russa del trattato, nell'ambito del Seminario di teoria qualitativa delle equazioni differenziali presso l'Università di Mosca. Anche tale appendice appare utile per il notevole complesso di risultati e di problemi aperti ivi segnalati. Occorre anche dire che la traduzione, molto accurata, elimina molti dei purtroppo numerosi errori di stampa contenuti nell'originale ed usa un simbolismo che maggiormente si avvicina allo standard attuale. — Com'è noto (questo Zbl. 41, 418) il trattato, se pure non esplicitamente come nella presente traduzione, consta sostanzialmente di due parti distinte. La prima di queste riguarda

più propriamente la teoria qualitativa delle equazioni differenziali (Cap. I, Teoremi di esistenza e di continuità; Cap. II, Curve integrali nel piano e sul toro; Cap. III, Sistemi lineari e quasilineari in n dimensioni; Cap. IV, Studio dell'intorno delle soluzioni periodiche e singolari in n dimensioni); la seconda parte riguarda i sistemi dinamici in uno spazio metrico (Cap. V) e le teorie ergodiche (Cap. VI) e si deve interamente a V. V. Stepanov. L'iniziativa della presente pubblicazione, indubbiamente destinata ad accrescere l'interesse dei matematici verso teorie di importanza fondamentale, si deve ad S. Lefschetz che attraverso varie difficoltà ha potuto condurre a termine un'impresa tanto gravosa quanto utile valendosi dell'opera di D. Bushaw, J. McCarthy, A. Ross, R. Bass ed L. Markus. *R. Conti.*

Corduneanu, C.: Sur la notion de stabilité. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 497—500 (1957).

Verf. betont zuerst die Notwendigkeit von Stabilitätsuntersuchungen aus verschiedenen physikalischen Gründen und erwähnt die Definition der schwachen Stabilität (im Sinne von Ljapunov). Er weist auf gewisse Unzulänglichkeiten dieser Definition hin, die durch den Begriff der totalen Stabilität (Stabilität bei Dauerstörungen) überwunden werden. Des weiteren schlägt er vor, nur gewisse Lösungen zum Vergleich mit der Ausgangslösung zuzulassen, nämlich diejenigen, die einen physikalischen Sinn haben. Handelt es sich um n Differentialgleichungen 1. Ordnung mit der trivialen Lösung $x_1 = \dots = x_n = 0$, so werden zum Studium ihrer Stabilität nur solche Nachbarlösungen betrachtet, die eine gewisse Eigenschaft E (etwa Beschränktheit o. ä.) besitzen und bei denen einige Anfangskoordinaten $x_i(t_0)$; $i = 1, \dots, k \leq n$ Einschränkungen unterliegen. Es wird dann von „bedingter Stabilität“ gesprochen. Verf. demonstriert die Nützlichkeit seiner Überlegungen am Beispiel des linearen Systems mit veränderlichen Koeffizienten. *R. Reißig.*

Yoshizawa, Taro: Note on the equi-ultimate boundedness of solutions of $x' = F(t, x)$. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 31, 211—217 (1958).

Let $\dot{x} = F(t, x)$, x, F being n -vectors, F continuous in the half-space $t \geq 0$, $x \in R^n$ and locally Lipschitzian with respect to x . After a few lemmas relating different types of boundedness, the author proves: Theorem 1. A n. a. s. c. in order that the solutions be uniformly and ultimately bounded is that there exist two positive continuous functions $\varphi(t, x)$, $\psi(t, x)$ in $\tilde{A} = \{(t, x): t \geq 0, \|x\| \geq B_0 > 0\}$ satisfying: a) $\alpha(\|x\|) \leq \varphi(t, x) \leq \beta(\|x\|)$, α, β positive continuous, $\alpha(r) \rightarrow \infty$ as $r \rightarrow \infty$; b) $\gamma(\|x\|) \leq \psi(t, x)$, γ positive continuous; c) φ, ψ are locally Lipschitzian with respect to (t, x) ; d) $\varphi' \leq 0$; e) $\psi' \leq -\psi$ (where φ', ψ' represent, say, the upper right derivatives along the solutions). Theorem 2. A n. a. s. c. in order that the solutions be equi-ultimately bounded is that there exist in \tilde{A} a non-negative continuous function $\varphi(t, s)$ satisfying: a) $\alpha(\|x\|) \leq \varphi(t, x)$; b) φ is locally Lipschitzian with respect to (t, x) ; c) $\varphi' \leq -\varphi$. *J. L. Massera.*

Nejmark (Neimark), Ju. I. (Ju. I.): Some cases of the dependence of periodical motions on parameters. Doklady Akad. Nauk SSSR 129, 736—739 (1959) [Russisch].

The paper is some successive part of the author's works in the range of dynamical topology (the method of "point transformations") and deals with the more interesting and technically valuable (for mechanics and automatic control) problem: the influence of parameters of some structural system on the shape of phase space trajectories of a periodical motion. The classical dynamical systems are considered (in connection: the autonomic system of differential equations of the first order with sufficiently smooth characteristics). By means of known conclusions drawn from the bifurcation theory of periodical motions in the parameter space several theorems are given which are concerned with the appearance of periodical motions with changing stability. Therefore the theorems are concerned with two cases of this change: 1. when a

root of the characteristic equation becomes -1 , 2 , when there appear two conjugate complex roots of this equation: $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$. All the theorems deal with non-plane problems. Let the point transformation T , depending upon the parameter $\mu \rightarrow 0$, be sufficiently many times continuously differentiable. Let $M^*(\mu)$ — a fixed point under this transformation — be stable for $\mu < 0$, unstable for $\mu > 0$, with disappearing stability for $\mu = 0$. To the first case: Let the number g_0 be determined by expanding T into a series for $\mu = 0$ in the neighbourhood of the fixed point (with accuracy to fourth order). Then the following cases are possible: a) if $g_0 > 0$, then $M^*(\mu)$ is unstable for $\mu = 0$, and (for μ increasing to zero) two double unstable fixed points $M_1^*(\mu)$, $M_2^*(\mu)$ merge into the point M^* . b) if $g_0 < 0$, then $M^*(\mu)$ is stable, and (for μ increasing from zero) from M^* emerge two double stable points M_1^* , M_2^* . Furthermore: If for $\mu = 0$ $g_0 > 0$, then the periodical motion Γ is unstable for $\mu = 0$, and for μ increasing to zero the other unstable periodical motion, with the period 2τ (where τ is the period of Γ for $\mu = 0$) passes to Γ . On the other hand: if $g_0 < 0$ then for $\mu = 0$ the periodical motion is stable and with μ increasing from zero this motion tends to an unstable motion and the other stable periodical motion with double period is separated. To the second case: Let the similar corresponding number in this case be \bar{g}_0 . Now for $g_0 > 0$ (in the paper erroneously $\bar{g}_0 < 0$) into the unstable ($\mu = 0$) fixed point M^* passes the invariant twodimensional unstable closed curve $\gamma^*(\mu)$ when μ increases to zero. For $\bar{g}_0 < 0$, on the contrary, the invariant twodimensional stable closed curve $\gamma^*(\mu)$ is separated from $M^*(\mu)$ (stable for $\mu = 0$) when μ increases from zero. In consequence: If for T with $\mu = 0$, $\bar{g}_0 > 0$, then the periodical motion Γ is unstable (in the critical case of conjugate characteristic exponents $i\varphi$ and $-i\varphi$), and for μ increasing to zero to this motion tends the unstable twodimensional torus composed of the phase space trajectories with Poincaré's index $\varphi/2\pi$. If $g_0 < 0$, then Γ is stable and for μ increasing from zero the stable twodimensional toroidal surface is separated. Moreover in the paper is shown that by the above methods it is possible to investigate the known case of separating the periodical motion from the stable focal-point-equilibrium regime.

J. Skowroński.

Zubov, V. I.: A new method of constructing stability regions for an automatic control system in the space occupied by the permissible values of the parameters. *Automat. Remote Control* **20**, 314—318 (1959), Übersetzung aus *Avtomat. Telemekh.* **20**, 331—334 (1959).

In der Differentialgleichung $\dot{x} = P x$ mögen die Elemente der Matrix P von gewissen Parametern abhängen. Verf. bringt das bekannte Stabilitätskriterium, das die Eigenwerte von P benutzt, in folgende Form: Die Ruhelage des Systems ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für positives k die Elemente der Matrix $((P - E)^{-1}(P + E))^k$ den Beträgen nach kleiner als eins sind (E die Einheitsmatrix). Er gewinnt mit Hilfe dieses Satzes Abschätzungen für den Stabilitätsbereich im Raum der Parameter.

W. Hahn.

Conti, Roberto: Sulla t_∞ -similitudine tra matrici e l'equivalenza asintotica dei sistemi differenziali lineari. *Rivista Mat. Univ. Parma* **8**, 43—47, (1957).

Using the terminology and notation of a previous paper [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **19**, 247—250 (1955); this Zbl. **67**, 314], the following theorems are proved: 2. Let (A): $\dot{y} = A(t)y$, (B): $\dot{x} = B(t)x$; if the system (A) is reducible and stable, if A and B are t_∞ -similar with a matrix T for which $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$ exists and is non-singular, then (A) and (B) are asymptotically equivalent. 3. The same result holds true if the assumption that (A) is reducible is replaced by: $A \in T$, $\dot{A} \in L^1$, p characteristic roots of $A(t)$ are simple and purely imaginary, the other $n - p$ roots have their real parts $\leq -a < 0$. J. L. Massera.

Livartovskij, I. V.: Einige Fragen der Stabilität eines Systems von Differentialgleichungen mit unstetigen rechten Seiten nach der linearen Approximation. Moskovsk. fiz.-techn. Inst., Issledovanija Mech. priklad. Mat., Trudy 3, 247—263 (1959) [Russisch].

Es sei $\dot{x} = P(t)x$ eine lineare Differentialgleichung. Die Elemente von $P(t)$ seien beschränkt und mögen an den Stellen t_i endliche Sprünge haben. Verf. betrachtet Lösungen $x(t)$, die an diesen Stellen unstetig sind, und zwar sei $x(t_i +) = S_i x(t_i -)$ mit vorgegebenem S_i . Er überträgt die Begriffe der Ljapunovschen Stabilitätstheorie (charakteristischer Exponent, reduzibel, regulär usw.) auf diesen unstetigen Fall; die charakteristischen Exponenten hängen dabei auch von der Folge der Matrizen S_i ab. — Verf. geht dann zu nichtlinearen Gleichungen $\dot{z} = f(z, t)$ über, deren rechte Seiten bezüglich t in bestimmter Weise unstetig sind und die lineare Gleichungen des anfangs betrachteten Typs als Gleichung der ersten Näherung zulassen. Für solche Gleichungen bleiben das bekannte Ljapunovsche Kriterium für Stabilität nach der ersten Näherung ($\dot{x} = P x$ reduzibel, alle charakteristischen Exponenten negativ) sowie die bekannten Folgerungen (exponentielle Stabilität, Existenz Ljapunovscher Funktionen) gültig.

W. Hahn.

Langenhop, C. E.: Note on almost periodic solutions of non-linear differential equations. J. Math. Physics 38, 126—129 (1959).

In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Farnell, Langenhop und Levinson (dies. Zbl. 42, 99) und durch eine analoge Iteration wird gezeigt, daß das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $dx/dt = A x + f(\lambda t, x) + k b(\omega t)$ für hinreichend kleine k stets Bohr-fastperiodische Lösungsvektoren x besitzt, falls folgende Voraussetzungen erfüllt sind: $x = (x_1, \dots, x_n)$, x_i komplex; A = konstante Matrix, für die die Realteile der charakteristischen Wurzeln $\neq 0$ sind; die Komponenten von $b(t)$ sind Bohr-f. p. (t reell); λ, k, ω reelle Konstante; die Komponenten von $f(t, x)$ sind bei festem x in t Bohr-f. p., $f(t, 0) = 0$, und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $|x| \leq \delta$, $|y| \leq \delta$ und bel. reelle t $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \varepsilon |x - y|$.

Ist zusätzlich noch $\int_0^t b(t) dt$ beschränkt [also ebenfalls f. p.], so gibt es auch schon für hinreichend kleine $k/(1 + |\omega|)$ Bohr-f. p. Lösungen — λ wieder unabhängig davon beliebig. Sind die Realteile der charakteristischen Wurzeln von A alle negativ, so ist diese f. p. Lösung (asymptotisch) stabil. [Das Lemma auf S. 127 erhält man dabei einfacher unter Heranziehung der Maasken Definition von f. p., $f(t, x)$ ist nämlich gleichgradig in $x \in S$ in t f. p., wie sofort aus (1.1) folgt.] Unter gewissen Voraussetzungen über g und $\partial g_i / \partial x_j$, die den obigen über f und A entsprechen, wird daraus die Existenz von f. p. Lösungen von $dy/dt = g(t, y) + k b(\omega t)$ für hinreichend kleine k (bzw. $\frac{k}{1 + |\omega|}$ bei beschränktem $\int_0^t b(t) dt$) abgeleitet, falls g in t die Periode T hat, b f. p. ist und $dy/dt = g(t, y)$ eine Lösung mit der Periode T besitzt.

H. Günzler.

Kuzmak, G. E.: Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations with variable coefficients. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 730—744 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 23, 515—526 (1959).

The author considers the equation $d^2y/dt^2 + f(\tau, y) dy/dt + F(\tau, y) = 0$, where ε is a small parameter, and $\tau = \varepsilon t$ (slow time), with the aim to determine the first terms of an asymptotic expansion in ε of the solutions. The device is used to consider $y = y(\tau, \omega)$ as a function of two variables τ, ω with $d\tau/dt = \varepsilon$, $d\omega/dt = \varphi(\tau)$, φ an unknown function. The partial differential equation so obtained is then investigated for solutions of the form $y_0(\tau, \omega) + \varepsilon y_1(\tau, \omega)$ by neglecting all terms of degree ≥ 2 in ε . The case where the corresponding equations in $y_0(\tau, \omega)$ and $y_1(\tau, \omega)$ can be

solved by means of functions y_0, y_1 both periodic in ω of period T independent of τ is studied in detail with the aim to give formulas ready for numerical computations.

L. Cesari.

Bedel'baev, A. K.: Einige Kriterien zur Unterscheidung der gefährlichen und ungefährlichen Stabilitätsgrenzen einer Klasse von Regelungssystemen. Akad. Nauk Kazach. SSR, Trudy Sekt. Mat. Mech. **1**, 50—61 (1958) [Russisch].

Verf. bezieht sich auf die Monographie von Lur'e „Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung“ (vgl. dies. 85, 345) und geht von dem dort aufgestellten kanonischen Gleichungssystem

$$\dot{x}_s = \varepsilon_s x_s + \varphi(\sigma) \quad (\varphi(\sigma) = c_2 \sigma^2 + c_3 \sigma^3); \quad s = 1, \dots, n$$

aus. Dabei ist die Größe σ eine gewisse Linearkombination der Variablen x_s . Verf. untersucht die Stabilität der trivialen Lösung $x_s = 0$ (der sog. ungestörten Bewegung) auf der Stabilitätsgrenze des linearen Systemteils, d. h. in einem kritischen Fall, wenn einige Wurzeln der charakteristischen Gleichung ε_s verschwinden oder rein imaginär sind, während die übrigen Wurzeln negative Realteile haben. Bekanntlich nennt man die Grenzabschnitte ungefährlich oder gefährlich, je nachdem ob in ihren Parameterpunkten die ungestörte Bewegung stabil oder instabil ist. Die Bestimmung der gefährlichen und ungefährlichen Stabilitätsgrenzen geschieht also durch die Lösung des Stabilitätsproblems in den kritischen Fällen, von denen Lur'e bereits diejenigen einer verschwindenden Wurzel (1.) und eines rein imaginären Wurzel-paares (2.) betrachtet hat, während sich Verf. in der vorliegenden Arbeit die komplizierteren Fälle zweier rein imaginärer Wurzel-paare (3.) und einer verschwindenden Wurzel sowie eines rein imaginären Wurzel-paares (4.) vornimmt. Dabei verwendet er eine Methode, die Malkin in dem Werk „Theorie der Stabilität einer Bewegung“ (dies. Zbl. 48, 328) vorgeschlagen hat. Mit dieser Methode wird zuerst das von Lur'e im Fall 2. auf anderem Wege erzielte Resultat erneut bewiesen. Dann geht Verf. zum Fall 3. über, in dem das Gleichungssystem die Gestalt annimmt: $\dot{x}_s = \varepsilon_s x_s + \varphi(\sigma)$ für $s = 1, \dots, n-4$; $\dot{z}_j = i \omega_j z_j + \varphi(\sigma)$, $\dot{y}_j = -i \omega_j y_j + \varphi(\sigma)$ für $j = 1, 2$. Er stellt nach der Malkinschen Vorschrift die unkritischen Variablen x_s als Potenzreihen in den kritischen Variablen y_j, z_j dar, berechnet die ersten Koeffizienten und geht mit diesen Entwicklungen in die Gleichungen für z_j, y_j , die mittels einer passenden Variablentransformation in eine bestimmte Gestalt gebracht werden, aus der man durch Übergang zu Polarkoordinaten die Antwort auf die Stabilitätsfrage unmittelbar erhält. In entsprechender Weise wird im Fall 4 verfahren, wo das Gleichungssystem $\dot{x}_s = \varepsilon_s x_s + \varphi(\sigma)$ für $s = 1, \dots, n-3$; $\dot{x} = \varphi(\sigma)$, $\dot{z}_1 = i \omega z_1 + \varphi(\sigma)$, $\dot{z}_2 = -i \omega z_2 + \varphi(\sigma)$ vorliegt. Aus dem Resultat des Verf. kann die Lur'esche Formel für den Fall 1 abgeleitet werden.

R. Reißig.

Bedel'baev, A. K.: Über die Stabilität der instationären Bewegungen einer Klasse von Regelsystemen. Akad. Nauk Kazach. SSR, Trudy Sekt. Mat. Mech. **1**, 151—159 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet nach Lur'e das Gleichungssystem der indirekten Regelung

$$\dot{\eta}_s = \sum_{k=1}^n b_{sk}(t) \eta_k + n_s(t) \xi \quad (s = 1, \dots, n); \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{s=1}^n j_s(t) \eta_s - \xi,$$

worin die Koeffizienten Funktionen der Zeit mit den erforderlichen Regularitätseigenschaften sind. Das System besitzt die triviale Lösung $\eta_s = 0, \xi = 0$, die die sog. ungestörte (instationäre) Bewegung der Regelstrecke beschreibt. Die Aufgabe besteht nun darin, hinreichende Bedingungen für die Stabilität der ungestörten Bewegung „im Großen“ aufzustellen, und zwar bei einer beliebigen Stellmotorcharakteristik $f(\sigma)$ aus einer Funktionsklasse mit gewissen sehr allgemeinen Eigenschaften. Zur Behandlung der Differentialgleichungen eliminiert Verf. die Stellgröße ξ und erhält dabei das System

$$(S) \quad \dot{\eta}_s = \sum_k p_{sk}(t) \eta_k - n_s(t) \sigma, \quad \dot{\sigma} = \sum_k p_k(t) \eta_k - \rho(t) \sigma - f(\sigma);$$

dann betrachtet er drei Fälle, die sich durch die Voraussetzungen über die Systemkoeffizienten voneinander unterscheiden, und wendet jedesmal die von ihm ausgearbeiteten Stabilitätskriterien, die in Form von Ungleichungen erscheinen, auf das Beispiel $n = 2$ an. 1. $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{sk}(t) = c_{sk}$, wobei die Gleichung $D(\varepsilon) = \det(c_{sk} \cdot \varepsilon \delta_{sk}) = 0$ nur Wurzeln mit negativen Realteilen zuläßt. Für das Hilffssystem $\dot{\eta}_s = \sum_k c_{sk} \eta_k$ wird eine Ljapunovsche Funktion als quadratische Form

$Q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta$ konstruiert, so daß $\dot{Q} = - \sum_s \eta_s^2$. Dann verwendet Verf. für das System (S) die Form $v = Q + \frac{1}{2} \sigma^2$ als Ljapunovsche Funktion und findet $-\dot{v} = v_1 + v_2 + \sigma f(\sigma)$; hier ist $\sigma f(\sigma) \geq 0$, v_1 unter einer gewissen Bedingung eine positiv-definite Form und v_2 eine Form, deren Koeffizienten für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 streben. Die genannte Bedingung ist demnach die gesuchte Stabilitätsbedingung. 2. $p_{sk}(t) = c_{sk} + \mu q_{sk}(t)$, wobei der Parameter $\mu > 0$ hinreichend klein sein soll. Verf. berechnet

$$-(\dot{v} + \sigma f(\sigma)) = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta}(t, \mu) \eta_\alpha \eta_\beta + \varrho \sigma^2 + \sigma \sum_\alpha g_\alpha \eta_\alpha$$

$$(h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \mu \sum_i \sigma_{\alpha i} q_{i\beta}, \quad g_\alpha = \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} n_\beta)$$

und gibt als Stabilitätskriterium die $n + 1$ Ungleichungen $d_{ss}(t, \mu) > 0$ an, wobei d_{ss} der s -te Hauptminor in der zum berechneten Ausdruck gehörigen Koeffizientendeterminante $d(t, \mu)$ ist. 3. Das abgekürzte System (S), das für $\sigma \equiv 0$ entsteht, besitze ein Fundamentalsystem $\eta_{sk}(t, t_0)$, für das $|\eta_{sk}(t, t_0)| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)}$, $t \geq t_0$. Dann existiert zu jeder vorgegebenen positiv-definiten Form $W(t, \eta_1, \dots, \eta_n)$ der geraden Ordnung m eine positiv-definite Form Q derselben Ordnung, so daß vermöge dieses Systems $\dot{Q} = -W$. Verf. wendet den allgemeinen Satz für $m = 2$ an, nimmt die quadratische Form $v = Q + \frac{1}{2} \sigma^2$ als Ljapunovsche Funktion und gibt als Stabilitätsbedingung die Ungleichung $\Delta(t) > 0$ an, wobei $\Delta(t)$ die Diskriminante der quadratischen Form $-(\dot{v} + \sigma f(\sigma)) > 0$ ist, deren Hauptminor n -ter Ordnung mit der Diskriminante von W übereinstimmt.

R. Reißig.

Zlámal, Miloš: Über die Differentialgleichung $\dot{y} + y = \dot{y}^2$. Czechosl. math. J. 7 (82), 26—39, russ. Zusammenfassung 39—40 (1957).

R. Bellman [Bull. Amer. math. Soc. 61, 192 (1955)] a posé les problèmes suivants: 1. l'équation (1) $y + y' = y'^2$ a-t-elle des solutions qui tendent vers zéro comme e^{-t} (pour $t \rightarrow +\infty$)? 2. quel est son type de stabilité? La réponse a été donnée par J. L. Massera (ce Zbl. 71, 308). Le présent travail entré dans la rédaction avant que le travail de J. L. Massera fût paru a été publié après. L'A. y donne une étude de la stabilité de l'équation (1) un peu moins complète que celle de J. L. Massera (les raisonnements sont différents, mais sont basés sur le même principe topologique). L'A. démontre aussi que les solutions de l'équation (1) vérifient une seule des équations (2) $y' = \sqrt{y' + y}$ et (3) $y' = -\sqrt{y' + y}$ dans leurs domaines d'existence saturés. Il n'existe qu'une seule solution de (2) qui tend vers zéro pour $t \rightarrow +\infty$.

Elle a pour développement asymptotique (4) $y(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}$ où $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = -88/3$. Il existe une infinité de solutions de (3) qui tendent vers zéro (mais ce ne sont pas toutes les solutions de (3)). L'A. démontre pour elles une formule asymptotique plus faible que la formule (4). On retrouve donc aussi — comme cas particulier — la réponse de J. L. Massera au premier problème de R. Bellman.

K. Tatarkiewicz.

Halanay (Chalanaj), A.: Einige qualitative Fragen in der Theorie der Differentialgleichungen mit retardiertem Argument. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 127—144 (1957) [Russisch].

Consider (1): $\dot{x} = f(t, x(t), x(t - \tau))$, $\tau > 0$, x, f vectors, and let $x(t; t_0, \varphi)$ be the solution defined for $t \geq t_0 - \tau$ by the initial condition $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, φ a given continuous function. § 2—5 of this paper are devoted to questions of existence of solutions and their dependence on the initial conditions; § 7 to the investigation of uniform stability and uniform asymptotic stability in the spirit of Ljapunov's second method; the latter results are very similar to those of N. N. Krasovskij [Priklad. Mat. Mech. 20, 315—327 (1956)]. Other theorems are: 5. if (1) is linear, i. e., $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau)$, uniform asymptotic stability implies exponential stability $[||x|| \leq k e^{-(\alpha t - t_0)} \sup ||\varphi||]$, with fixed k, α . 6. If (1) is quasi-linear periodic, $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + \mu f(t, x(t), x(t - \tau))$, A, B, f periodic in t with period ω , μ small, and if $x = 0$ is uniformly asymptotically stable solution of the system for $\mu = 0$, a periodic solution exists for sufficiently small μ , its period being the least integral multiple $k\omega > \tau$. 7. If f depends on μ and has period ω in t and if (1) has periodic solutions for $\mu = 0$ such that the corresponding variational equations have no periodic solutions, there are periodic solutions for sufficiently small μ . 10. If f is periodic in t , any bounded and uniformly stable solution of (1) is asymptotically almost-periodic.

J. L. Massera.

Halanay, Aristide: Solutions périodiques des systèmes linéaires à argument retardé. C. r. Acad. Sci., Paris 249, 2708—2709 (1959).

The author considers the system of differential equations $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + f(t)$ where $A(t), B(t), f(t)$ are periodic functions with period $\omega > \tau$. He shows that the system has one periodic solution of period ω , for all values of $f(t)$, if and only if the corresponding homogeneous system has no other periodic solutions except the trivial one.

T. Eweida.

Halanay, Aristide: Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires à argument retardé. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 797—798 (1960).

This paper is concerned with the system of differential equations $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + f(t)$ where $A(t), B(t), f(t)$ are periodic functions of t with period $\omega > \tau$. If the system admits a bounded solution, then it will also have a periodic solution.

T. Eweida.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Zerner, Martin: Sur le support de la solution d'un problème de Cauchy. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 802—804 (1960).

Soit X et Y deux espaces vectoriels réels à n -dimensions ($n \geq 3$), en dualité. L'ensemble $P = x + P_0$, x vecteur et P_0 sous-espace à p dimensions sera nommé un p -plan. Soit $a(\xi)$ un polynôme à n indéterminés, $h(\xi)$ sa partie principale, $V(h)$ la variété des points caractéristiques de h . On suppose que $a(\xi)$ est 1) irréductible et complet, 2) hyperbolique (voir L. Gårding, ce Zbl. 45, 202) et que 3) la variété des points singuliers de $V(h)$ est de dimension $\leq n - 3$. L'ensemble des ξ pour lesquels $a(\xi)$ est hyperbolique se décompose (v. L. Gårding, loc. cit.) en deux cônes convexes Γ_+ et Γ_- . Si $C(a)$ est défini par: $C(a) = \{x; V \xi, \xi \in \Gamma_+ \Rightarrow \langle \xi, x \rangle \leq 0\}$, $S(v)$ étant le support d'une distribution v , $E(v)$ est défini par: $E(v) = \{x; \exists y, y \in S(v), x - y \in C(a)\}$ et $I(v)$ est la partie de $E(v)$ pour laquelle $x - y$ ne rencontre pas la frontière de $C(a)$ alors, d'après Gårding (loc. cit.) l'équation $a(\partial/\partial x)u = v$ a une solution unique (distribution) telle que $S(u) \subset E(v)$. L'A. démontre que si $S(u)$ n'est pas compact alors tout $(n - 2)$ plan spatial qui rencontre $I(v)$ rencontre aussi $S(u)$ (on utilise un théorème de F. John, ce Zbl. 80, 304). Si l'on remplace 3) par 3'): Tous les facteurs irréductibles de h sont complets alors la propriété subsiste.

G. Gussi.

Heyda, James F.: A note concerning hyperbolic equations with constant coefficients. Quart. appl. Math. 18, 299—300 (1960).

Dobrescu-Purice, Lucia: Solutions singulières sur caractéristiques régulières, d'une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires du quatrième ordre. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. **10**, 183—218, russ. und französ. Zusammenfassung 214—217 (1959) [Rumänisch].

L'A. construit des solutions ayant une singularité algébrique ou algébro-logarithmique sur une variété caractéristique $G = 0$ d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre linéaire et à coefficients holomorphes, dont la forme caractéristique est le produit de deux facteurs quadratiques P et Q . Pour cette classe d'équations N. Théodoresco (voir ce Zbl. **18**, 403) a construit la solution élémentaire au sens de Hadamard en mettant d'abord l'équation sous forme invariante. Ce travail de N. Théodoresco est cité seulement dans l'introduction, mais certains calculs de l'A. s'obtiennent de ceux du travail cité en choisissant comme coordonnées des coordonnées cartésiennes (par ex.: les calculs figurant aux pages 185, 186, 187, les équations (6) et (7), à condition de poser $\mu G^{l-1} = P'$ dans la première et $\mu = P'$ dans la seconde, l'équation (8) qui se déduit en faisant $\mu = 0$, dans (7) et qui ne doit pas contenir le terme $2\mu Q$, comme dans les calculs suivants). Pour la convergence des séries obtenues on emploie la méthode de Hadamard et une extension, due à Perron d'un théorème de Poincaré (voir p. 200), idée qui a été utilisée pour la première fois dans le travail que l'A. mentionne seulement dans la bibliographie finale, au no. 7. A la fin, on considère le cas lorsque $G = 0$ est le conoïde caractéristique correspondant au facteur P , ce qui conduit en coordonnées cartésiennes à la solution élémentaire construite par N. Théodoresco et l'on examine encore un exemple particulier où l'A. ne remarque pas que la solution élémentaire obtenue est celle de Hadamard pour une certaine équation du second ordre, résultat connu aussi du travail mentionné de N. Théodoresco. J. Elianu.

Walter, Wolfgang: Über die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung. Math. Z. **67**, 361—376 (1957).

L'A. étudie le problème de Cauchy singulier pour l'équation d'Euler-Poisson-Darboux

$$(*) \quad L(u) = u_{tt} + k t^{-1} u_t - \Delta u = 0, \quad \Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n},$$

k réel, $u(0, x) = f(x)$, $u_t(0, x) = 0$. Si $f(x)$ est analytique, $u(t, x)$ peut être représentée explicitement par une série qui montre le rôle particulier, déjà indiqué par Weinstein, des valeurs initiales polyharmoniques. Après une étude des moyennes des fonctions localement sommables, l'A. donne pour $k \geq n - 1$ une démonstration de l'existence de la solution du problème (*) sous des conditions plus générales pour $f(x)$. Il montre ensuite que pour $k \neq 0$, la condition $u_t(0, x) = 0$ est réalisée d'elle-même et en déduit un théorème d'unicité. F. J. Bureau.

Rasulov, M. L.: Die Residuenmethode zur Lösung gemischter Probleme für Differentialgleichungen und eine Formel zur Entwicklung einer beliebigen Vektorfunktion nach den Fundamentalfunktionen einer Randwertaufgabe mit einem Parameter. Mat. Sbornik, n. Ser. **48** (90), 277—310 (1959) [Russisch].

Verf. verwendet die Residuenmethode zur Lösung gemischter Aufgaben für Differentialgleichungen, deren Koeffizienten nur Funktionen von x sind (s. Verf., dies. Zbl. **82**, 91). Zum Schluß zeigt er, daß diese Residuenmethode auch in dem Falle verwendbar ist, daß die Differentialgleichung die Glieder $\partial^{k+i} u / \partial x^k \partial t^i$, $k \neq 0$, $i \neq 0$ nicht enthält und die Koeffizienten bei der Ableitung nach t nur Funktionen von t , die Koeffizienten bei der Ableitung nach x nur Funktionen von x sind.

M. Švec.

Thomée, Vidar: Existence proofs for mixed problems for hyperbolic differential equations in two independent variables by means of the continuity method. Math. Scand. **6**, 5—32, S. 2 (1958).

Sia $C_m^i(V)$ ($i = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots$) l'insieme dei vettori reali $u = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$ differenziabili i volte con continuità nella chiusura \bar{V} di una regione semplicemente connessa V del piano x, t . Date le funzioni $\alpha_i \in C_1^1(V)$, $a_{ik} \in C_1^0(V)$, definiamo una trasformazione da $u \in C_n^1(\bar{V})$ in $L u \in C_n^0(V)$ dove $L u = (L_1 u, \dots, L_n u)$ è l'operatore lineare iperbolico definito da $L_i u = (D_t - \alpha_i D_x) u_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k$, ($i = 1, \dots, n$; $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$). La frontiera S di V sia regolare a tratti e detta $\nu = (\nu_\xi, \nu_\tau)$ la normale esterna ad S , sia S_i l'insieme dei punti di S nei quali i dei numeri $\nu_\tau - \alpha_k \nu_\xi$ ($k = 1, \dots, n$) risultano < 0 e sia $S_i^- [S_i^+]$ la chiusura del sottinsieme di S_i su cui $\nu_\xi < 0$ [> 0]. Supponiamo che a) $\cup S_i^-$, $\cup S_i^+$ abbiano distanza positiva; b) $\inf_S |\nu_\tau - \alpha_i \nu_\xi| > 0$, ($i = 1, \dots, n$); c) l'angolo interno tra due tangenti ad S in un punto comune a due S_i sia $< \pi$.

Sia $C_m^i(S_k)$ ($i = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots; k = 0, \dots, n$) l'insieme dei vettori reali $u = (u_1(s), \dots, u_m(s))$ differenziabili i volte con continuità rispetto all'arco s di S_k . Date le funzioni $l_{ik}^j \in C_1^1(S_i)$ definiamo una trasformazione da $u \in C_n^0(\bar{V})$ in $l_i u \in C_i^0(S_i)$ dove $l_i u = (l_{i1} u, \dots, l_{ii} u)$ è l'operatore al contorno definito da $l_{ik} u = \sum_{j=1}^n l_{ik}^j u_j$, ($k = 1, \dots, i$), supponendo che

$$\det \begin{pmatrix} l_{i1}^1 \dots l_{i1}^i \\ \dots \dots \dots \\ l_{ii}^1 \dots l_{ii}^i \end{pmatrix} \neq 0 \text{ su } S_i^-, \det \begin{pmatrix} l_{i1}^{n-i+1} \dots l_{i1}^n \\ \dots \dots \dots \\ l_{ii}^{n-i+1} \dots l_{ii}^n \end{pmatrix} \neq 0 \text{ su } S_i^+.$$

Con $\mathfrak{L} u = (L u, l_1 u, \dots, l_n u)$ si viene a definire un operatore lineare da $u \in C_n^1(\bar{V})$ in $\mathfrak{L} u \in C^0(\bar{V}, S)$, dove $C^0(\bar{V}, S)$ è la somma diretta $(C_n^0(\bar{V}), C_1^0(S_1), \dots, C_n^0(S_n))$. Se $F = (F_1, \dots, F_n) \in C_n^0(\bar{V})$, $f_i = (f_{i1}, \dots, f_{ii}) \in C_i^0(S_i)$ segue $\mathfrak{F} = (F, f_1, \dots, f_n) \in C^0(\bar{V}, S)$. Il problema trattato nella parte 2[^] del presente lavoro consiste nella ricerca di $u \in C_n^1(\bar{V})$ tali che $\mathfrak{L} u = \mathfrak{F}$. La soluzione viene ottenuta valendosi di precedenti risultati (questo Zbl. 78, 86) nella seguente forma „astratta“. Detta dV la misura euclidea in V , ds l'elemento d'arco su S si definisca la norma $\|u\|_1 = \left\{ \int_V \sum_{i=1}^n u_i^2 dV + \int_S \sum_{i=1}^n u_i^2 ds \right\}^{1/2}$ per ogni $u \in C_n^0(\bar{V})$ e sia \mathfrak{H}_1 lo spazio di Hilbert ottenuto completando $C_n^0(\bar{V})$ rispetto a tale norma. Analogamente sia \mathfrak{H}_2 il completa-

mento di $C^0(\bar{V}, S)$ rispetto alla norma $\|F\|_2 = \left\{ \int_V \sum_{i=1}^n F_i^2 dV + \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sum_{k=1}^i f_{ik}^2 ds \right\}^{1/2}$.

Allora \mathfrak{L} si può considerare come operatore da \mathfrak{H}_1 in \mathfrak{H}_2 con dominio $C_n^1(\bar{V})$ e immagine $\subseteq C^0(\bar{V}, S)$; sia $\bar{\mathfrak{L}}$ la chiusura di \mathfrak{L} . Il risultato fondamentale della parte 2[^] è costituito dal teorema: L'equazione $\bar{\mathfrak{L}} u = \mathfrak{F}$ ha una sola soluzione $u = \bar{\mathfrak{L}}^{-1} \mathfrak{F} \in \mathfrak{H}_1$ per ogni $\mathfrak{F} \in \mathfrak{H}_2$ e si ha $\|\bar{\mathfrak{L}}^{-1} \mathfrak{F}\|_1 \leq C \|\mathfrak{F}\|_2$ dove C è una costante indipendente da \mathfrak{F} . La parte 1[^] del lavoro è di carattere preliminare; la parte 3[^] tratta sempre in forma „astratta“ il problema misto per un'equazione iperbolica di ordine qualunque in due variabili.

R. Conti.

Budak, B. M.: On the straight line method for certain boundary problems involving systems of partial differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 187—190 (1957) [Russisch].

Considering operators in linear spaces of matrices built with special values of the functions $f(x, y)$ and $u(x, y)$ the author states an estimate of the deviation between the exact solution of a differential equation $L(u) = f$ and the corresponding diffe-

rence equation $L_n(u) = \Phi^{(n)}(f)$ and he applies his results in three problems, among which the Goursat equation and the telegraph equation. *E. M. Bruins.*

Murakami, Haruo: On non-linear partial differential equations of parabolic types. I, II, III. Proc. Japan Acad. **33**, 530—535, 616—621, 622—627 (1957).

I: L'équation du type parabolique

$$(E) \quad \partial^2 u / \partial x^2 - \partial u / \partial y = f(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)$$

est traité suivant l'idée de Tokui Satô [Compositio Math. **12**, 157—177 (1954)], en utilisant l'opérateur \square introduit par B. Pini (ce Zbl. **81**, 314) et défini par

$$\square u = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{2} \pi r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{u(x + \sqrt{2} r \sin \theta \sqrt{\log \operatorname{cosec}^2 \theta}, y + r^2 \sin^2 \theta) - u(x, y)\} \cos \theta \sqrt{\log \operatorname{cosec}^2 \theta} d\theta.$$

Un ensemble dans le plan des x, y est appelé p -domaine si sa frontière se compose de quatre parties: base supérieure AD , située sur une droite $y = b$, base inférieure BC , située sur une droite $y = a$, et deux courbes $y = \lambda_1(y)$, $y = \lambda_2(y)$ telles que $\lambda_1(y) < \lambda_2(y)$ pour $a < y \leq b$. La base supérieure est désignée par \mathfrak{S} (les extrémités exclus) tandis que la réunion des autres trois parties de la frontière est désignée par \mathfrak{C} . Si λ_1 et λ_2 appartiennent à la classe C^1 , la lettre \mathfrak{Q} est employée au lieu de \mathfrak{C} . (\mathfrak{C} , \mathfrak{S}) représente l'intérieur du p -domaine fermé [\mathfrak{C} , \mathfrak{S}], tandis que (\mathfrak{C} , \mathfrak{S}) la réunion (\mathfrak{C} , \mathfrak{S}) \cup \mathfrak{S} . Ce premier mémoire vise à établir des théorèmes de comparaison c'est-à-dire des théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour que l'on ait $\omega(x, y) \geq u(x, y)$ pour $(x, y) \in (\mathfrak{C}, \mathfrak{S}]$, $u(x, y)$ désignant une solution telle que $\lim (\omega(x, y) - u(x, y)) \geq 0$ pour $(x, y) \in (\mathfrak{C}, \mathfrak{S}]$, $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \in \mathfrak{C}$. — II.: Les théorèmes de comparaison établis dans le premier mémoire permettent d'obtenir des conditions d'unicité de la solution qui est continue dans [\mathfrak{C} , \mathfrak{S}] et prend des valeurs données sur \mathfrak{C} . L'A. remarque ensuite que si le second membre f est indépendante de $\partial_y u$ et satisfait à la condition

$$(Lk) \quad f(x, y, u_1, p) - f(x, y, u_2, p) > -k(u_1 - u_2)$$

pour $(x, y) \in (\mathfrak{Q}, \mathfrak{S}]$, $u_1 > u_2$, on peut étendre à l'aide des théorèmes de comparaison les théorèmes d'existence de B. Pini au cas où f est quasi bornée par rapport à u c'est-à-dire bornée pour u appartenant à un ensemble compact quelconque. Les théorèmes de Harnack concernant les fonctions harmoniques peuvent s'étendre aussi aux solutions de l'équation (E) sous la même hypothèse relative à f . Ensuite les notions de fonctions quasi supérieures, fonctions majorantes etc. relatives à une équation différentielle ordinaire sont étendues relativement au domaine [\mathfrak{C} , \mathfrak{S}] pour (E), où f est supposée indépendante de $\partial_x u, \partial_y u$. — III.: A l'aide des résultats des deux mémoires précédents, le théorème d'existence est étendu au domaine (\mathfrak{C} , \mathfrak{S}], en supposant f indépendante de $\partial_x u, \partial_y u$. La notion de barrière peut aussi s'étendre à l'équation (E). L'existence de barrière en chaque point du domaine (\mathfrak{C} , \mathfrak{S}) entraîne la régularité du domaine relativement au problème aux limites correspondant.

M. Hukuhara.

Murakami, Haruo: On the regularity of domains for parabolic equations. Proc. Japan Acad. **34**, 347—348 (1958).

Si G est un domaine régulier pour l'équation de Laplace, $G \times (0, \infty)$ est un domaine régulier pour l'équation $\square u = f(x, y, u)$, qui est traitée dans un des mémoires du même A. (v. le rapport précédent). C'est la réciproque d'une proposition de W. Fulks (ce Zbl. **71**, 316).

M. Hukuhara.

Murakami, Haruo: Relations between solutions of parabolic and elliptic differential equations. Proc. Japan Acad. **34**, 349—352 (1958).

Considérons deux équations: $\square u = f(x, t, u)$ et $\Delta v = \bar{f}(x, v)$, où Δ est le laplacien et \square l'opérateur de la chaleur (v. les deux rapports ci-dessus).

f et f sont supposées continues dans $D \times (-\infty, \infty)$ et $G \times (-\infty, \infty)$ respectivement, et quasi bornées et non décroissantes par rapport à u et v respectivement, où $D = G \times (0, \infty)$, G étant un domaine régulier pour l'équation de Laplace. Supposons en outre que $f(x, t, u)$ converge uniformément vers $f(x, u)$ sur $G \times U$ quelque grand que soit l'intervalle borné U . Soient $u(x, t)$ une solution de la première équation continue dans \bar{D} et $v(x)$ une solution de la deuxième équation continue dans \bar{G} . Si $u(x, t)$ converge uniformément vers $v(x)$ pour $t \rightarrow \infty$ sur la frontière Γ de G , $u(x, t)$ converge uniformément vers $v(x)$ pour $t \rightarrow \infty$ sur \bar{G} .

M. Hukuhara.

Sestini, Giorgio: Problemi di propagazione del calore con convezione forzata. *Rivista Mat. Univ. Parma* 8, 5—14 (1957).

Soient P un point variable de l'espace, S un domaine de cet espace et t le temps. L'A. considère l'équation de la propagation de la chaleur dans un milieu en mouvement avec une vitesse $v(P, t)$, à savoir

$$(1) \quad k \Delta U - v(P, t) \times \text{grad } U = U_t' + c(P, t) u + A(P, t),$$

la fonction inconnue $U(P, t)$ étant la température du milieu. On impose à cette fonction les conditions suivantes

$$(2) \quad U(P, 0) = f(P), \quad a \partial U / \partial n + b U = \varphi(P, t) \quad \text{pour } P \in F(S), \quad t > 0$$

($F(S)$ étant la frontière de S). Soit $W(P, t)$ la solution de l'équation (3) $k \Delta W - W_t' = 0$ satisfaisant aux conditions (4) $W(P, 0) = f(P)$, $a \partial W / \partial n + b W = \varphi(P, t)$ pour $P \in F(S)$, $t > 0$. L'A. appelle (3)—(4) le système réduit associé à (1)—(2). Lorsqu'on connaît la fonction de Green $G(P, Q; t, \tau)$ relative à (3)—(4), le problème (1)—(2) se ramène à une équation intégrale qui est résoluble par la méthode des approximations successives. L'A. fait attention sur la portée de cette méthode dans les applications physiques et fait observer que la fonction de Green G se calcule effectivement dans les cas les plus fréquents. Dans la partie finale du travail l'A. effectue des calculs relatifs à certains cas particuliers du problème.

M. Krzyżański.

Sestini, Giorgio: Sopra un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 12, 516—519 (1957).

Caricato, Gaetano: Sulla propagazione stazionaria del calore attraverso un involucro omogeneo limitato da due sfere non concentriche. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 16, 131—139 (1957).

Si applica una doppia disuguaglianza di Signorini (questo *Zbl.* 77, 406), che fornisce due limiti, per eccesso e per difetto, per la quantità di calore Q che, in regime stazionario, attraversa un involucro, al caso in cui l'involucro è limitato da due sfere σ_1 e σ_0 , non concentriche di centri C_1 e C_0 e raggi $R_1 > R_0$. Alcune considerazioni di carattere geometrico permettono di esplicitare, in questo caso, la doppia limitazione per Q . Viene considerato il caso di involucro di piccola eccentricità $e = |C_1 - C_0| / (R_1 - R_0)$.

G. Sestini.

Usol'cev, S. A: Lösung der Wärmeleitungsgleichung für einen einseitig unendlichen Stab mit unstetigem Koeffizienten. *Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR*, Ser. Mat. Mech. 6 (10), 82—86 (1957) [Russisch].

Viene risolto il problema della determinazione della temperatura in una sbarra semi-infinita, eterogenea, composta di n materiali diversi, ciascuno omogeneo, in contatto nei punti di ascissa x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), essendo assegnate le condizioni: $T(0, t) = f(t)$, $0 < t < \tau$, $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = 0$, $T(x, 0) = \varphi_i(x)$, per $x_{i-1} < x < x_i$ con $x_0 = 0$, e $T(x, 0) = \varphi_{n+1}(x)$, per $x > x_n$; $T(x_i + 0, t) = T(x_i - 0, t)$; $h_i T_x(x_i - 0, t) = h_{i+1} T_x(x_i + 0, t)$. Mediante la trasformazione integral-seno di Fourier, la ricercata soluzione dell'equazione $T_{xx} = T_t$, con $T = T_i$ per $x_{i-1} < x < x_i$ e $T = T_{n+1}$ per $x > x_n$, soddisfacente alle condizioni sopra specificate,

viene espressa in funzione di $T_x(x_1 + 0, t)$, che restano determinate, risolvendo un sistema di equazioni di Volterra di seconda specie non omogenee. *G. Sestini.*

Danilevskaja, V. I.: Näherungslösung des Problems über das stationäre Temperaturfeld in einer dünnen Schale von beliebiger Form. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 9, 157—158 (1957) [Russisch].

Considerata una piastra curva, sottile, di spessore costante $2h$, di cui indicheremo con σ_i ($i = 1, 2$) le due faccie e con σ il taglio laterale, se ne vuol determinare, in dipendenza di condizioni assegnate su σ_i e σ , lo stato termico in regime stazionario, supponendo che la temperatura T nella piastra vari con legge quadratica in funzione della distanza del punto considerato della superficie di mezzeria σ_0 della piastra. Riferiti i punti della piastra ad un sistema di coordinate curvilinee, costituite dalle linee di curvatura di σ_0 $u = \text{costante}$, $v = \text{costante}$ e dalle normali nei punti di σ_0 , su cui le distanze w saranno contate a partire da σ_0 nei due versi, si scrive in coordinate generali l'equazione di Laplace cui deve soddisfare la T , unitamente alle condizioni su σ_i e σ tutte del tipo $T_w = h(T - T_0)$, con h costante in generale diversa da condizione a condizione e T_0 temperatura nota del mezzo ambiente in contatto con il pezzo di superficie della piastra che interviene nella condizione. Precisata l'ipotesi di lastra sottile nel senso che possono trascurarsi i termini dipendenti da w , posto $T = p + q w + r w^2$, con p, q ed r funzioni di u e v , il problema è ricondotto a quello di determinare la funzione p , potendosi esprimere q ed r in funzione di p mediante le condizioni su σ_i . Viene trattato succintamente il caso di una piastra cilindrica.

G. Sestini.

Denčev (Denchev), R.: On the spectrum of an operator. Doklady Akad. Nauk SSSR 126, 259—262 (1959) [Russisch].

Let Ω be a domain in R^3 and S its boundary, let $W_2^{(1)}$ be the usual Sobolev's space of the functions (defined on Ω) with square integrable generalized derivatives and L be the operator (in $W_2^{(1)}$) $\Delta^{-1} \partial^2 / \partial z^2$ where

$$\Delta^{-1} u(x, y, z) = \int_{\Omega} G(x, y, z; x', y', z') u(x', y', z') dx' dy' dz',$$

G being the Green-function corresponding to Ω . In this note it is proved that if Ω is an ellipsoid or a cylinder generated by parallels to the z -axis then the spectrum of L is discrete.

C. Foiaş.

Denčev (Denchev), R.: On Dirichlet's problem for the wave equation. Doklady Akad. Nauk SSSR 127, 501—504 (1959) [Russisch].

Conserving the notations of the above review, let Ω be so that L have discrete spectrum and let $\{\lambda_n\}$ be the proper values of L . Then the solution of the Dirichlet problem ($u|_S = 0$) for $\partial^2 u / \partial z^2 - \partial^2 u / \partial x^2 - \partial^2 u / \partial y^2 = F$ is unique if and only if $\lambda_n \neq \frac{1}{2}$. It is also given a condition (on F) that insures the existence of this solution. As application, let $\Omega_{a,b,c} = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$; then (supposing f sufficiently regular) the complementary of the set of those (a, b, c) for which the former Dirichlet problem (for $\Omega_{a,b,c}$) has one (and only one) solution is of zero measure in $(R^+)^3$.

C. Foiaş.

Virabjan (Virabian), G. V.: Spectral equivalence of two operators. Doklady Akad. Nauk SSSR 128, 13—16 (1959) [Russisch].

Let A (resp. B) be the selfadjoint extension of the operator $A(v_x, v_y, v_z) = (w_x, w_y, w_z)$, $w_x = v_x + \partial P_0 / \partial y + i \partial P_1 / \partial x$, $w_y = v_y - \partial P_0 / \partial x + i \partial P_1 / \partial y$, $w_z = i \partial P_1 / \partial z$, $\Delta P_0 = \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$, $\Delta P_1 = i (\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y)$, $P_0|_r = P_1|_r = 0$ (resp. $\Delta^{-1} \partial^2 / \partial z^2$) defined in the Hilbert space H_A (resp. H_B) of the vectors (v_x, v_y, v_z) , with scalar product

$$((v_x, v_y, v_z), (w_x, w_y, w_z))_A = \iiint_{\Omega} (v_x \bar{w}_x + v_y \bar{w}_y + v_z \bar{w}_z) dx dy dz$$

(resp. functions u , with scalar product

$$(u, v)_B = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

where Ω is a bounded domain and Γ its boundary. The author's principal results are the following: (i) The spectra of A and B coincide, (ii) Excepting $\{0, 1\}$, the point-spectrum of A coincides with that of B . (iii) In the case of a continuous spec-

trum, to each function $u(\lambda) \in H_B$ such that $B(u(\lambda_2) - u(\lambda_1)) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda du(\lambda)$ (for

all real λ_1, λ_2) corresponds a $v(\lambda) \in H_A$ such that $A(v(\lambda_2) - v(\lambda_1)) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda dv(\lambda)$

(for all real λ_1, λ_2) and conversely. If $V = \{v\}$ (resp. $U = \{u\}$) are the images of these applications, then $\{v(\lambda); v \in V, \lambda \in (-\infty, +\infty)\}$ (resp. $\{u(\lambda); u \in U, \lambda \in (-\infty, +\infty)\}$) is dense in H_A (resp. H_B). C. Foiaş.

Lavruk, B. R.: On the index of a certain operator in a boundary problem for an elliptical system of second order linear differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 287—290 (1956) [Russisch].

Definitionen: $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_1^N a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^N a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a$ ist ein elliptisches System zweiter Ordnung mit hinreichend glatten Koeffizienten.

$$B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_1^N b_i(y) \frac{\partial}{\partial x_i} + b(y),$$

$a_{ik}(\cdot), a_i(\cdot), a(\cdot), b_i(\cdot), b$ sind $p \times p$ -Matrizen. Ω_N ein konvexes Gebiet mit glattem Rande $\partial\Omega_N$; $(n_i(y))_1^N$, ist die Normale im Punkte $y \in \partial\Omega_N$. Es wird wie üblich ein gekoppeltes Randwertaufgabenpaar

$$(R) \quad A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0$$

$$(R^+) \quad A^+\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow y} B^+\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0$$

untersucht. Es sei k [resp. k^+] die Dimension des Lösungsraumes der Aufgabe (R) [resp. (R⁺)]. Die Zahl $\kappa = k - k^+$ heißt Index der Aufgabe (R). Ergebnis. Mit Hilfe der von Lopatinskiĭ konstruierten Grundlösung (s. dies. Zbl. 45, 371; 52, 102) wird der folgende Satz ausgesprochen: Für hinreichend glatte Koeffizienten ist κ von den Koeffizienten a_i, a, b unabhängig. [Bemerkung des Ref.: Dieser Satz folgt unmittelbar aus Abschätzungen vom Typus Agmon-Schechter-Nirenberg-Douglis und einem allgemeinen Satze in einem Banachraum H , nach welchem der Index κ_{A+B} von $A + B$ gleich κ_A ist, falls die Störung B A -vollstetig ist, d. h. B ist vollstetig im Raume $D(A)$ (Definitionsgebiet von A) mit der Norm $\|u\|_{\text{df.}} \|Au\| + \|u\|$, wo $\|u\|$ die ursprüngliche Norm in H ist. Es sind bekanntlich für viele elliptische Randaufgaben Operatoren niedrigerer Ordnung als A eben A -vollstetig.]

K. Maurin.

Lavruk, B. R.: The index of a boundary problem operator for an elliptical system of second order linear differential equations, as dependent on the highest coefficients. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 970—972 (1958) [Russisch].

Es werden dieselben Definitionen wie im vorstehenden Referat benutzt. Es wird der folgende Satz bewiesen: Der Index κ der Randwertaufgabe (R) bleibt konstant bei (stetiger) Änderung der Koeffizienten a_{ik}, b_i , falls folgende vier Bedingungen bei dieser Variation erhalten bleiben 1. Das System $A(x, \partial/\partial x)u = 0$ ist elliptisch; 2. $\det\left(\sum_1^N b_i(y) n_i(y)\right) \neq 0, y \in \partial\Omega_N$; 3. (bzw. 3.⁺) Die Randaufgabe (R) (bzw. (R⁺)) läßt sich auf ein reguläres Integralgleichungssystem zurückführen. K. Maurin.

Lavruk, B. R.: The solubility condition in a certain boundary problem for an elliptical type of systems of second order linear differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **111**, 23—25 (1956) [Russisch].

Definitionen wie in den beiden vorstehenden Referaten. Es wird der folgende Satz bewiesen: Die Randwertaufgabe

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \quad x \in \Omega_N; \quad \lim_{x \rightarrow y \in \partial\Omega_N} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = f(y)$$

ist dann und nur dann lösbar, falls für jede Lösung v^+ der adjungierten (homogenen) Aufgabe $(R^+) \int_{\partial\Omega_N} (v^+(y), f(y)) dy = 0$ gilt (die sogenannte normale Auflösbarkeit).

K. Maurin.

Calabi, E.: Errata. Duke math. J. **26**, 706 (1959).

Berichtigung eines geringfügigen Versehens in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **79**, 118).

E. Kreyszig.

Satō, Tokui: Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$. II. Compositio math. **14**, 152—171 (1959).

L'A. continua le ricerche iniziate nella memoria I di uguale titolo [Compositio math. **12**, 157—177 (1954)]. Una funzione $z(x, y)$ è detta regolare in un campo D , se essa è continua in D assieme alle sue derivate $p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$. Inoltre, se $z(x, y)$ è continua nell'intorno di un punto (x, y) di D , è posto, per definizione

$$\underline{\Delta} z(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x + r \cos \vartheta, y + r \sin \vartheta) - z(x, y)\} d\vartheta$$

$$\bar{\Delta} z(x, y) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x + r \cos \vartheta, y + r \sin \vartheta) - z(x, y)\} d\vartheta$$

$$\Delta z(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x + r \cos \vartheta, y + r \sin \vartheta) - z(x, y)\} d\vartheta.$$

Nel n. 2, considerata l'equazione (1) $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$, sono date condizioni per l'esistenza della più grande e della più piccola soluzione della (1), regolari in un campo D e nulle sul contorno di D , sono studiate le proprietà di tali soluzioni, sono dati teoremi di confronto. Nel n. 3 è generalizzato il teorema di Harnack. Nel n. 4 è esteso il teorema di Perron; supposto che la funzione $f(x, y, z)$ sia definita per (x, y) in un campo D , e per ogni valore reale di z , e sia non decrescente rispetto a z , si considera l'equazione (2) $\Delta z = f(x, y, z)$; alla quale sono estesi i concetti di funzione maggiorante (minorante), funzione superiore (inferiore), funzione quasi-superiore (quasi-inferiore) della teoria delle equazioni differenziali ordinarie; sono poi studiate le proprietà delle soluzioni della (2), è costruita una soluzione della (2), regolare in D e assumente sul contorno di D valori continui assegnati. *M. Ciniquini-Cibrario.*

Davis, Robert B.: A reduction-of-order theorem. J. Math. Physics **36**, 164—166 (1957).

Verf. betrachtet in dem beschränkten Gebiet R (Rand B) die Lösung u_ε der Randwertaufgabe

$$L_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + a(x, y) u_\varepsilon = f(x, y) \text{ in } R, \quad u_\varepsilon^*(x, y) = b(x, y) \text{ auf } B,$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. Gehören in R die Funktionen a, b, f und die Parameterfunktionen für B der Klasse C^{VI} an und ist dort $a(x, y) < 0$, so ergibt sich mit $u_0(x, y) = f(x, y)/a(x, y)$ für $(x, y) \in R$ nahe B , daß $u_\varepsilon(x, y) = u_0(x, y) + \Psi(x, y) + w(x, y)$ gilt. Hierbei ist $\Psi(x, y) = e^{-g(x, y)/\varepsilon} h(x, y)$ (g, h beschränkt, unabhängig von ε , $g > 0$ in R , $g \equiv 0$ auf B , $h = b - u_0$ auf B) und $w = O(\varepsilon^2)$ gleichmäßig in $R + B$, $w \equiv 0$ auf B . — Die Betrachtungen sind naturgemäß wesentlich einfacher als die entsprechenden bei Levinson (vgl. dies. Zbl. **36**, 68), weil dort das Vorhandensein von Charakteristiken der „verkürzten“ Gleichung Komplikationen mit sich bringt. *K. Maruhn.*

Šaškin (Shashkin), Ju. A. (Yu. A.): On uniqueness in the inverse problem of potential theory. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 64—66 (1957) [Russisch].

Influenced by Novikov's paper (this Zbl. 18, 309) on the conditions under which two bodies coincide whenever they have the same outer Newtonian potentials, the author gives various conditions under which the outer logarithmic potentials of two planar domains will not coincide. For example, if the frontiers C_1 and C_2 of two different convex domains D_1 and D_2 lie in the annulus $R^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2R^2$, then the exterior logarithmic potentials of the domains cannot be made identical by "charging" them with masses having a positive density. The same conclusion will also hold if the boundaries of two distinct domains, both star-shaped relative to the origin, are given by equations $r = r_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, satisfying

$$|\log r_i(\varphi_1) - \log r_i(\varphi_2)| \leq K |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

where $K = \tan \frac{1}{8} \pi$.

A. J. Lohwater.

Eicker, Friedhelm: Über eine Rand- und Mittelwertaufgabe der Poissonschen Differentialgleichung. Z. angew. Math. Mech. 39, 279—284 (1959).

In einem zylindrischen, durch zwei Querschnitte begrenzten Gebiet beliebiger Grundfläche ist eine Poissonsche Differentialgleichung $\Delta \omega = f$ gegeben. Die Lösung soll am Rande nur von der Zylinderhöhe abhängen und auf den Deckflächen verschwinden. Außerdem soll ihr Mittelwert auf jedem Querschnitt des Zylinders verschwinden. Er wird gezeigt, daß das Problem eindeutig lösbar ist, wenn f stetig und zweimal nach z differenzierbar ist. Für das betrachtete und auch für allgemeinere Gebiete wird die Äquivalenz des Problems mit einer Integralgleichung 1. Art nachgewiesen.

A. van Heemert.

Šamanskij, V. E.: On harmonic functions in adjacent regions. Ukrain. mat. Žurn. 9, 329—343, engl. Zusammenfassung 343 (1957) [Russisch].

Let D_1 and D_2 be contiguous domains, i. e., $D_1 \cap D_2$ is empty and $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$ consists of an arc γ . Let u_1 and u_2 be harmonic in D_1 and D_2 respectively, and let u be harmonic (or piecewise harmonic) in the interior of $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ and have the same boundary values on the frontier of $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ as u_1 and u_2 . The object of the paper is to obtain estimates for the deviation of u_1 and u_2 from the function u . Estimates are obtained for the conjugate functions and for the solution of a Poisson equation.

A. J. Lohwater.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Litvinčuk, G. S.: Über Integralgleichungen mit mehrdeutigen Kernen. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 2 (9), 128—137 (1959) [Russisch].

L'A. étudie les équations intégrales (1) $\varphi(z) = f(z) + \lambda \int_C K(z, \tau) \varphi(\tau) d\tau$, K étant un noyau admettant des singularités logarithmiques ou polaro-logarithmiques; plus précisément $K(z, \tau)$ a la forme $K(z, \tau) = \sum_0^m F_k(z, \tau) \log^k \Delta(z, \tau)$.

Si $F_k(z, \tau)$ sont des fonctions analytiques uniformes de z , dans un domaine qui renferme C et continues de τ sur C , l'équation $\Delta(z, \tau) = 0$ détermine les lignes logarithmiques V_i du noyau. Soit (ω_0, ∞) une coupure unissant le point $\omega_0 \in V_i$ au point de l'infini; à l'aide de telles coupures le noyau est décomposé en branches uniformes. Au voisinage d'une ligne V_i la solution de (1) est bornée et a une discontinuité de première espèce. Si $F_k(z, \tau)$ sont des fonctions uniformes admettant des pôles, c'est-à-dire des fonctions ayant la forme $F_k(z, \tau) = G_k(z, \tau)/H_k(z, \tau)$, où les H_k ont des racines $z = R_{ki}(\tau)$. ($i = 1, \dots, p_k$), alors une ligne polaro-logarithmique du noyau est une ligne de discontinuités de première espèce de l'intégrale de (1). L'intégrale présente aussi des particularités intéressantes au voisinage de ω_0 . Un dernier

paragraphe de la Note est consacré à l'étude des intégrales de (1) au voisinage des lignes singulières des noyaux K donnés par $Q(z, \tau) K^n(z, \tau) = P(z, \tau)$, P et Q étant des fonctions analytiques uniformes.

A. Haimovici.

Vinokurov, V. R.: Über die Stabilität der Lösung eines Systems Volterrascher Integralgleichungen zweiter Art. II. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 2 (9) 50—58 (1959) [Russisch].

En continuant un de ses travaux antérieurs (ce Zbl. 83, 328), l'A. s'occupe des équations: (1) $y(x) = \int_a^x \{K(x, s) + H(x, s, y(s))\} y(s) ds$,

$$(2) \quad y(x) = f(x) + \int_a^x \{K(x, s) + H(x, s, y(s))\} y(s) ds,$$

$y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$; $H(x, s, y(s)) = (H_{ij})$, $K(x, s) = (K_{ij})$ et étudie les problèmes de stabilité, que voici: I. Si

$$\|y\| < \eta, \quad a \leq s \leq x < +\infty, \quad \|K(x, s) + H(x, s, y)\| \leq L(x, s)$$

et L est un noyau stable, alors la solution de (1) est stable. II. Si

$$\|y\| \leq \eta, \quad |H_{ij}| \leq L_{ij}(x, s) \varepsilon_{ij}(y), \quad \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \varepsilon_{ij}(y) = 0, \quad \int_a^x L_{ij}(x, s) ds \leq L,$$

et le noyau K est stable, alors la solution de (1) est stable. III. S'il existe une forme

$V(x, z^{(i)})$ de degré m par rapport aux $z^{(i)}$, telle que $V' = \frac{\partial V}{\partial x} + K_{ij}(x, x) \frac{\partial V}{\partial z^{(i)}}$ est négative définie, les coefficients de V étant des fonctions bornées de x et à dérivées bornées, si $|H_{ij}| \leq L_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)}(y)$, $\left| \frac{\partial H_{ij}}{\partial x} \right| \leq L_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)}(y)$, $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \varepsilon_{ij}^{(k)} = 0$

$|L_{ij}^{(1)}| \leq L_1$, $\int_a^x L_{ij}^{(2)}(x, s) ds \leq L_2$, $|K(x, x)| \leq K$, $\int_a^x \left| \frac{\partial K(x, s)}{\partial x} \right| ds \leq h$, alors la solution de (1) est stable. Le théorème 4 donne une condition suffisante d'instabilité

A. Haimovici.

Barbašin, E. A.: Über Bedingungen für die Erhaltung der Stabilitätseigenschaft der Lösungen von Integrodifferentialgleichungen. Izvestija vyss. učebn. Zaved. Mat. 1, 25—34 (1957) [Russisch].

Consider an integro-differential equation of the form

$$(1) \quad \varphi'_i(x, t) = \int_a^b K(x, s, \varphi(s, t)) ds + F(x, \varphi(x, t)),$$

where the functions K and F are defined for all values of x and s , $a \leq x \leq b$, $a \leq s \leq b$, $|\varphi| < h$, with $K(x, s, 0) = 0$, $F(x, 0) = 0$. In the first chapter of the present work the author proves a few lemmas referring to the estimate of the degree of the variation of a solution of (1) with the variations of $K(x, s, \varphi)$ and $F(x, \varphi)$. Next, the author shows that with sufficiently small variations of the functions K and F there is preserved the stability of the trivial solution of equation (1), i. e., that of $\varphi = 0$. The author introduces the following definition: The trivial solution, $\varphi = 0$, of equation (1) is called ε -stable, if it is possible to show that there exist such $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, that for $|\varphi(x, t_0)| < \delta$ there exists always $|\varphi(x, t)| < \varepsilon$ for $t > t_0$ and ε arbitrarily small. The author proves the following theorem: Suppose a trivial solution of equation (1) is uniformly stable in the asymptotic sense. Then for an arbitrary ε it is possible to show that this trivial solution is ε -stable. In the second chapter the author discusses the correlation between the integro-differential equation (1) and a system of differential equations of the type:

$$(2) \quad \varphi'_i(t) = \sum_{k=1}^n K_{ik}(\varphi_k) \Delta s + F_i(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n;$$

obviously, for n sufficiently large the system (2) approaches "in a sense" to equation (1). The author's task is to show that solutions of the system (2) approach "in a sense" a solution of (1). Moreover, it can be shown that adding some restrictions the properties of the stability of (1) are preserved, when equation (1) is transformed into the system (2). This is closely analogous to the well-known association of a linear integral equation with a system of linear algebraic equations in the Fredholm theory. The author offers some sort of an estimate of the difference between the solutions of (1) and (2). On the base of this estimate the author proves the theorem of the preservation of the properties of the stability of the solution $\varphi = 0$ of equation (1) when transformed into the system (2). The methodical approach to the proof is based upon the author's own results in one of his previous papers (E. A. Barbašin; this Zbl. 73, 334). In the case, the functions $K(x, s, \varphi)$, $F(x, \varphi)$ are linear in φ , one of the proved theorems can be referred to the results obtained previously by K. P. Persidskij: *Izvestija Akad. Nauk Kazachsk. SSR*, 1952, No. 116, Ser. Astron. Fiz. Mat. Mech. 1 (6), 64—76 (1952). *M. Z. v. Krzywoblocki*.

Valickij (Valitsky), Ju. N. (Y. N.): Functions analytical in respect to some integro-differential operators and their applications. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1959, 237—240, russ. und engl. Zusammenfassung 240 (1959) [Ukrainisch].

Auf Operatoren der Form

$$A[y] = \frac{1}{p(x)} y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x) y^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^x H_i(x, t) y^{(i)}(t) dt \equiv L[y] + H(y)$$

werden diejenigen Resultate des Ref. über L -analytische Funktionen (dies. Zbl. 84, 53) übertragen, die mit dem Fixpunkt $x = x_0$ zusammenhängen: Konstruktion der A -Basis von $q_m(x, x_0)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, für diesen Punkt, Definition der A -Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m q_m(x, x_0)$ für $|a_m| \leq C m!$ ($m = 1, 2, \dots$), die A -Analytizität ihrer Summe, der Eindeutigkeitssatz für solche Summen. Damit wird die Äquivalenz von A mit dem einfachsten Operator solchen Typs d^n/dx^n bewiesen. — Ferner erweist sich, daß der Operator $Sf(x) = \int_{x_0}^x S(x, t) f(t) dt$, der auf dem Abschnitt $x_0 \leq x \leq l$ die Lösung der Gleichung $Ay = f(x)$ für die Null-Anfangsdaten $y(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ im Punkt $x = x_0$ (der Cauchy-Greensche Operator für A) ergibt, vollständig durch die folgenden Bedingungen charakterisiert ist:

$$1. \quad S(x, x) = \dots = \frac{\partial^{n-2} S(x, t)}{\partial x^{n-2}} \Big|_{t=x} \equiv 0, \quad \frac{\partial^{n-1} S(x, t)}{\partial x^{n-1}} \Big|_{t=x} = p(x) \neq 0, \quad p(x) \text{ beschränkt};$$

2. es existiert die beschränkte Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{S(x, t)}{p(t)} \right)$, d. h. die Cauchy-Greensche Funktion $S(x, t)$ besitzt diese Eigenschaften, und umgekehrt kann man nach der Funktion $S(x, t)$ mit diesen Eigenschaften einen entsprechenden Operator der Form A konstruieren. Hieraus und aus der Äquivalenz von A mit d^n/dx^n ergibt sich die Äquivalenz von $S(x-t)$ mit $(x-t)^{n-1}/(n-1)!$, was eine Verallgemeinerung des sich auf den Fall $n=2$ beziehenden Resultats von L. A. Sachnovič (dies. Zbl. 79, 318) ist. *M. K. Fage (R. Ž. Mat. 1960, Nr. 468).*

Griffith, James L.: A note on the finite Fourier transform. *J. Austral. math. Soc.* 1, 95—98 (1959).

Une fonction entière de type exponentiel, $\in L^2$ sur l'axe réel, pouvant s'exprimer comme transformée de Fourier sur un intervalle fini, une application immédiate

des théorèmes abéliens et taubériens relatifs à la transformation de Laplace permet d'étudier le comportement de cette fonction aux bornes de l'intervalle.

H. Delavault.

Devinatz, A.: On infinitely differentiable positive definite functions. Proc. Amer. math. Soc. 8, 3—10 (1957).

In this paper a sufficient condition is given in order that an infinitely differentiable function defined in $(-\infty, \infty)$ be positive definite i. e. be representable in the form $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\alpha(t)$ where $d\alpha(t)$ is a bounded non-negative measure. In fact the following theorem is proved: Let f be an infinitely differentiable function in $(-a, b)$ where $a, b > 0$. If (i) $\{(-i)^k f^{(k)}(0)\}_0^{\infty}$ is a determined Hamburger moment sequence and (ii) for every non-negative integer m there exists an $M_m > 0$ such that for every $x \in (-a, b)$ and every set $\{\xi_k\}_0^n$ of complex numbers

$$\left| \sum_{k=0}^n \xi_k (-i)^k f^{(k+m)}(x) \right|^2 \leq M_m \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n \xi_r \bar{\xi}_s (-i)^{r+s} f^{(r+s)}(0),$$

then f can be uniquely extended into a positive definite function. An example is constructed to show that if the Hamburger sequence is not determined the theorem is no longer true. On the other hand (i) is not necessary for the validity of the above theorem.

J. A. Siddiqui.

Nečas, Jindřich: Une note sur la propriété caractéristique de la transformée de Laplace d'une fonction et sur certains espaces de Hilbert \bar{H}_{kl} dont la somme $\sum_{k=0, l=0}^{\infty} \bar{H}_{kl}$ est l'ensemble des transformées de Laplace de distributions. Časopis Mat. 83, 160—169, russ. und französ. Zusammenfassung 169—170 (1958) [Tschechisch].

The Laplace transform of distributions is considered. It is shown, that the set of all Laplace transforms is a countable sum of some Hilbert spaces. One of the main results is a necessary and sufficient condition that a function $F(p)$ [$F(p)$ analytic for $\operatorname{Re} p > l > 0$] be a Laplace transform of a function. The condition is as follows:

1.
$$\sup_{\sigma > l} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(\sigma + i\tau)}{\sigma + i\tau} \right|^2 d\sigma < \infty.$$

2. The integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$ is independent of x . 3. The function

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$$
 is absolutely continuous on every bounded interval $\langle \alpha, \beta \rangle$,

$\alpha > 0$. 4. The inequality $|\varphi(t)| < M e^{bt}$ is satisfied for some M and b . The use of stated theorems and of the Parseval equation to the existence and unicity theorems for boundary value problems is illustrated by an example, which seems to be a typical one.

R. Vyborný.

Narain, Roop: Certain rules of generalized Laplace transform. Ganita 8, 25—35 (1957).

Für die verallgemeinerte Laplace-Transformation

$$\varphi(s; k, m) = s \int_0^{\infty} (st)^{m-1/2} e^{-st/2} W_{k, m}(st) f(t) dt,$$

symbolisch $\varphi(s; k, m) = W[f(t); k, m]$, wird eine große Anzahl von Operationsregeln angegeben, wie z. B.

$$W[df(t)/dt; k, m] = s \varphi(s; k + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}).$$

Ferner werden einige W -Transformierte ausgerechnet und die Operationsregeln auf sie angewendet.

G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Koman, Milan: Bemerkung zu einer Definition der topologischen K -Lineale. Časopis Mat. 83, 156—158, russ. und dtsh. Zusammenfassung 159 (1958) [Tschechisch].

Ein Beispiel eines topologischen K -Lineals X mit den folgenden Eigenschaften wird angegeben: X ist ein normierter Vektorraum, in dem die Verbandsoperationen stetig sind, dagegen gilt in X der folgende Satz nicht: (T_2) zu jeder Umgebung von Null U gibt es eine Umgebung von Null V so daß aus $0 \leq a \leq b$, $b \in V$ auch $a \in U$ folgt. Es wird gezeigt, daß (T_2) äquivalent ist der Forderung (T_1) : die Zuordnung $x \rightarrow x_+$ ist gleichmäßig stetig. In X wird dann ein stetiges jedoch nicht reguläres Funktional konstruiert. Man sieht also, daß die Stetigkeit der Verbandsoperationen allein zur Erhaltung weiterer wichtigen Eigenschaften nicht genügt. *V. Pták.*

Bonsall, F. F.: The decomposition of continuous linear functionals into non-negative components. Proc. Univ. Durham philos. Soc., Ser. A 13, Nr. 2, 11 p. (1957).

Ein Resultat von Grosberg-Krein (dies. Zbl. 22, 359) über die Zerlegung von stetigen linearen Funktionalen auf einem normierten, halbgeordneten Raum wird auf lokalkonvexe, halbgeordnete Räume übertragen. Unter Verwendung einer Verschärfung des Hahn-Banachschen Fortsetzungssatzes (die aus der üblichen Form dieses Satzes hergeleitet wird) beweist Verf. die Äquivalenz der beiden folgenden Bedingungen: (A) Zu jeder Nullumgebung G gibt es eine Nullumgebung H , so daß jedes x mit $y \leq x \leq z$, $y, z \in H$, zu G gehört. (B) Zu jeder Nullumgebung G gibt es eine Nullumgebung H , so daß jedes lineare Funktional Φ , für das $|\Phi(x)| \leq 1$ auf G gilt, eine Zerlegung $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ mit nicht negativen linearen Funktionalen Φ_i besitzt, derart, daß $|\Phi_i(x)| \leq 1$ auf H gilt. Insbesondere folgt also aus (A) die Zerlegbarkeit jedes stetigen linearen Funktionalen in eine Differenz stetiger nicht-negativer linearer Funktionale. Ferner wird gezeigt, daß unter Voraussetzung der Bedingung (A) jede monotone, schwach gegen 0 konvergente Folge gegen 0 konvergiert (Vgl. auch das folgende Ref.) *H. G. Tillmann.*

Weston, J. D.: Convergence of monotonic sequences in vector spaces. J. London math. Soc. 32, 476—477 (1957).

Verf. gibt einen neuen, sehr einfachen Beweis des folgenden Resultates von F. F. Bonsall (vgl. vorstehendes Ref.): „In einem teilweise geordneten, lokalkonvexen Raum gelte: (A) Zu jeder Nullumgebung G gibt es eine Nullumgebung H , derart, daß mit $y, z \in H$ jedes x mit $y \leq x \leq z$ zu G gehört. Dann ist jede monotone, schwach konvergente Folge konvergent.“ *H. G. Tillmann.*

Rajkov, D. A.: Über eine Aufgabe zur Ermittlung der extremalen lokal konvexen Topologie. Moskovsk. gosudarst. ped. Inst. V. I. Lenin, učenye Zapiski 138, fiz.-mat. Fak. Nr. 3, 107—113 (1958) [Russisch].

Let (X, t) be a convex space and \mathfrak{C} a collection of compact convex subsets of (X, t) . Then there exists a unique convex topology k on X such that k is the finest of all convex topologies which coincide with t on each $C \in \mathfrak{C}$. The following theorem is proved: Let (X, t) be a convex space and let \mathfrak{C} be a collection of convex compact subsets of X which covers X . Denote by $(X_{\mathfrak{C}}^*, t^{\mathfrak{C}})$ the space of all linear forms on X which are continuous on each $C \in \mathfrak{C}$, in the topology of uniform convergence on the sets $C \in \mathfrak{C}$. Then 1. $X = (X_{\mathfrak{C}}^*, t^{\mathfrak{C}})'$ 2. the topology k of uniform convergence on compact subsets of $(X_{\mathfrak{C}}^*, t^{\mathfrak{C}})$ is the finest convex topology on X which coincides with t on each $C \in \mathfrak{C}$. 3. $(X_{\mathfrak{C}}^*, t^{\mathfrak{C}})$ is complete 4. $(X, k)' = X_{\mathfrak{C}}^*$. An application: Let (Z, u) be a convex space. Take for (X, t) the space Z' in the $\sigma(Z', Z)$ topology and for \mathfrak{C} the collection of all U° . As $(X_{\mathfrak{C}}^*, t^{\mathfrak{C}})$, we obtain the complete hull of (Z, u) and the theorem yields a well known characterization of the finest convex topology on Z' which coincides with the weak topology on all sets U° . *V. Pták.*

Klee jr., V. L. and R. G. Long: On a method of mapping due to Kadeč and Bernstein. Arch. der Math. 8, 280—285 (1957).

Proofs are given of several theorems of Bernstein and Kadeč connected with the problem whether all infinite-dimensional separable Banach spaces are homeomorphic. Let E be a Banach space; a sequence $x_n \in E$ is said to be a T -system provided it is linearly independent and fundamental in E and such that for each n and each $y \in E$ the linear span L_n of the first n x_i contains a unique point $P_n y$ nearest to y . If $P_n y = \sum t_i^n x_i$ and if $D_n y = |y - P_n y|$ we put $\delta_n y = (\text{Sign } t_r^n) P_n$ where r is the first of the indices $j > n$ such that $t_j^n \neq 0$. Theorem: For each y the sequence $d_n = \delta_n y$ is such that (1) $|d_n|$ converges monotonically to 0 (2) if $|d_n| = |d_{n-1}|$ then $d_n = d_{n-1}$. Conversely, for each sequence d_n satisfying (1) and (2) there is at least one y for which $\delta_n y = d_n$. If there is exactly one, the T -system is said to be a B -system. A T -system need not be a B -system. (For incomplete E the definition has to be slightly modified.) Theorem. Suppose E and F are two normed linear spaces with B -systems x_n and y_n such that for each $x \in E$ there exists an $y \in F$ such that $\delta_n x = \delta_n y$ and vice versa; y_n being a B -system y is uniquely determined by x . Then the mapping $x \rightarrow y$ is a homeomorphism of E onto F . Since any orthonormal basis in l_2 clearly is a B -system we obtain a corollary: if an infinite-dimensional Banach space admits a B -system then it is homeomorphic with l_2 .

V. Pták.

Fréchet, Maurice: L'espace des courbes est-il un espace de Banach? C. r. Acad. Sci., Paris 250, 248—249 (1960).

L'A. annonce que les deux problèmes posé ailleurs [Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 33—40 (1958)] sont liées étroitement; une réponse affirmative au second entraîne celle du premier. Le premier problème était: l'espace distancié Γ des courbes continues orientées est-il un espace de Banach? Le second problème était: l'espace Γ est-il homéomorphe à l'espace distancié C des fonctions continues sur $(0, 1)$?

A. van Heemert.

Day, Mahlon M.: On criteria of Kasahara and Blumenthal for inner-product spaces. Proc. Amer. math. Soc. 10, 92—100 (1959).

Die vorliegende Note (sie wurde der Gesellschaft bereits im November 1955 vorgelegt; ihr Erscheinen verzögerte sich durch unglückliche Umstände bis 1959) gibt verallgemeinerte Charakterisierungen des (nicht notwendig separablen) Hilbertraumes unter den Banachräumen und unter metrischen Räumen. Ihre wichtigsten Resultate scheinen die folgenden zu sein: Satz 1. Für jedes Punktepaar x, y mit $\|x\| = \|y\| = 1$ eines Banachraumes B gebe es reelle Zahlen λ, μ mit $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$, so daß

$$[\lambda + \mu - 2\mu\lambda] [\lambda\mu + (1-\lambda)(1-\mu)]$$

$$\sim \mu(1-\mu) \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 + \lambda(1-\lambda) \|\mu x - (1-\mu)y\|^2,$$

wobei \sim entweder $=$, \geq , oder \leq (jedoch nur eines dieser Symbole im ganzen Raum B) repräsentiert. Dann ist B ein Hilbertraum. Korollar 2 zu Satz 2: In einem vollständigen metrischen Raum M gebe es zu jedem Punktepaar p, r einen „Zwischenpunkt“ q mit pqr (d. h.: $pq + qr = pr$; $p \neq q \neq r$), so daß für jeden beliebigen weiteren Punkt s das Quadrupel p, q, r, s kongruent einem Quadrupel der euklidischen Ebene ist. Dann ist M ein Hilbertraum.

H. Lippmann.

Hirschfeld, R. A.: On best approximations in normed vector spaces. I, II. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. 6, 41—51, 99—107 (1958).

I. Verf. betrachtet folgende Approximationsaufgabe in einem linearen normierten Raum E . Für einen abgeschlossenen Unterraum $G \subset E$ und gegebenes Element $x \in E$ ist ein $y \in G$ mit $\|x - y\| = \inf_{g \in G} \|x - g\|$ gesucht. — Mindestens eine Lösung y existiert bei beliebigem x , falls 1. E ein reflexiver Banach-Raum (und G ab-

geschlossen) oder 2. E konjugierter Raum eines linearen normierten Raumes und G schwachabgeschlossen ist. Die Behauptung, daß bei beliebigem x und beliebigem (abgeschlossenem) G höchstens eine Lösung existiert, ist dann und nur dann richtig, wenn E streng normiert ist. — II. Jedem abgeschlossenen Unterraum G eines normierten linearen Raumes E wird ein „Operator der besten Approximation“ A_G zugeordnet. A_G ist definiert durch: $A_G x \in G$, $\|x - A_G x\| = \inf_{g \in G} \|x - g\|$, und zwar für alle x , für welche mindestens eine beste Approximation in G existiert. Die Abbildung $x \rightarrow A_G x$ ist im allgemeinen nichtlinear, nicht überall auf E definiert und nicht eindeutig (s. Teil I). Verf. charakterisiert den Hilbert-Raum als Raum E , in welchem die (bei endlich-dimensionalem G auf E definierten) Operatoren A_G bestimmte Eigenschaften haben. — Satz 1. Hat E eine Dimension ≥ 3 und gilt für jeden zweidimensionalen Unterraum G bei passender Wahl von $A_G x$: $\|A_G x\| \leq \|x\|$ ($x \in E$), so ist E ein (möglicherweise nicht separabler und nicht vollständiger) Hilbert-Raum. — Satz 2. Ist E streng normiert ($A_G x$ also eindeutig), hat E eine Dimension ≥ 3 und gilt für jeden eindimensionalen Unterraum G : $A_G(x + y) = A_G x + A_G y$ ($x, y \in E$), so ist E ebenfalls ein Hilbert-Raum.

J. Schröder.

Bessaga, C.: On the converse of the Banach "Fixed-point principle". Colloquium math. 7, 41—43 (1959).

Folgende Umkehrung des Banachschen Fixpunktsatzes wird bewiesen: Sei U eine Abbildung einer beliebigen Menge X in sich mit der Eigenschaft, daß jede der iterierten Abbildungen U^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) genau einen Fixpunkt besitzt. Dann existiert zu jeder der Bedingung $0 < K < 1$ genügenden Konstanten K eine vollständige Metrik ϱ von X so, daß U der Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten K genügt.

G. Bruns.

Stepanjuk, K. L.: Quelques généralisations du principe du point stationnaire. Ukrain. mat. Žurn. 9, 105—109, französ. Zusammenfassung 110 (1957) [Russisch].

The following modification of the Schauder fixed point theorem is proved: If M_1 is an infinitely dimensional convex bounded subset of a Banach space, $M = M_1 - (x_1, \dots, x_m)$, and A is a compact transformation of M into $\overline{M_1}$, then there exists a sequence $y_n \in M$ such that $y_n \rightarrow y_0$ and $A y_n \rightarrow y_0$. The author forgot to add the word "convex" in the formulation of the theorem. An application to the theory of integral equations is added.

R. Sikorski.

Faedo, Sandro: Un principio di esistenza nell'analisi lineare e sua applicazione alla dualità di alcune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 22, 434—437 (1957).

Soient V un ensemble abstrait, linéaire par rapport au corps des réels (complexes); B_1 et B_2 deux espaces de Banach réels (complexes); $M_1(v)$ et $M_2(v)$ deux transformations linéaires définies dans V et ayant leurs codomaines dans B_1 et B_2 respectivement. Soit encore $\Phi(u_1)$ une fonctionnelle linéaire et continue définie dans B_1 . On considère l'équation (*) $\Psi[M_2(v)] = \Phi[M_1(v)]$ en l'inconnue $\Psi(u_2)$ fonctionnelle linéaire et continue définie dans B_2 . D'après Fichera, la condition nécessaire et suffisante pour que (*) ait une solution quelle que soit Φ est qu'il existe une constante K telle que pour tout $v \in V$, (**) $\|M_1(v)\| \leq K \|M_2(v)\|$. Si (**) est vérifiée, il existe une solution Ψ de (*) vérifiant $\|\Psi\| \leq K \|\Phi\|$ et toute autre solution s'obtient en ajoutant à Ψ une fonctionnelle orthogonale au codomaine $M_2(V)$ de $M_2(v)$. Soient ω_i l'origine de l'espace de Banach B_i et V_i la variété linéaire des solutions de $M_i(v) = \omega_i$ ($i = 1, 2$); V_i peut éventuellement être vide. Si (**) est vérifiée, on a $V_2 \subset V_1$. L'A. examine le cas où l'on n'a pas $V_2 \subset V_1$ et montre que la condition nécessaire et

suffisante pour qu'il existe une solution Ψ de (*) est que pour toute Φ orthogonale à $M_1(V_2)$, il existe une constante K telle que pour tout $v_2 \in V_2$, on ait

$$\text{estr. inf.}_{v_2 \in V_2} \|M_1(v + v_2)\| \leq K \|M_2(v)\|.$$

Si cette condition est remplie, il existe une solution Ψ de (*), orthogonale à $M_2(V_1)$ vérifiant $\|\Psi\| \leq K \|\Phi\|$ et toute autre solution s'obtient en ajoutant à Ψ une fonctionnelle orthogonale à $M_2(V)$. L'A. complète ensuite d'une manière analogue, le principe général de dualité dû aussi à Fichera, d'après lequel si l'on connaît à priori une formule de majoration pour la solution d'un certain problème aux limites et si en outre une certaine condition de complétion est vérifiée, il existe une seconde formule de majoration à priori, duale de la première. F. J. Bureau.

• Friedrichs, K. O., H. N. Shapiro et al: Integration of functionals. New York University, Institute of Mathematical Sciences 1957. Chap. I—XV, p. B. 1—10, I—VIII, E. 1—3.

Dies ist eine Ausarbeitung von Vorträgen eines im Frühjahr 1955 im Institute of Mathematical Sciences in New York gehaltenen Seminars über die Integration reeller, auf Funktionenräumen, z. B. Hilbertschen Räumen, definierter Funktionen, insbesondere im Hinblick auf die Quantentheorie. Leiter des Seminars waren K. O. Friedrichs und H. N. Shapiro, und weitere Vorträge hielten J. Schwartz, T. Seidman und B. Wendroff. Die Ausarbeitung enthält u. a. Beweise und Erweiterungen vorher angekündigter Ergebnisse (dies. Zbl. 77, 313). — Unter einem Integrationsraum verstehen die Verff. ein System, das aus einem linearen Raum G und einer durch eine Relation $<$ teilweise geordneten Menge \mathfrak{R} von linearen Unterräumen von G besteht, wobei zu jedem Raum R aus \mathfrak{R} eine lineare „Projektion“ P_R von G auf R und ein abzählbar additives Maß m_R auf einem Borelschen Körper von Teilmengen von R vorliegen mögen und gewisse Verträglichkeitsbedingungen erfüllt seien. Eine auf G definierte reelle Funktion f heißt ein Zylinderfunktional, wenn ein Raum R aus \mathfrak{R} existiert, so daß $f(P_R x) = f(x)$ für jedes x aus G . Für solche Zylinderfunktionale lassen sich $I^{\mathfrak{R}}(f) = \int_R f(x) m_R(dx)$ und die Norm $I^{\mathfrak{R}}(|f|^\alpha)^{1/\alpha}$ mit $1 \leq \alpha$

definieren, soweit diese Integrale existieren; auf Grund der genannten Verträglichkeitsbedingungen hängen sie nicht von R ab. Durch Vervollständigung hinsichtlich der Norm, durch Hinzunahme „idealer“ Funktionale, entsteht der Raum $L_\alpha^{\mathfrak{R}}$. Ein Beispiel, das neben anderen ausführlich dargestellt wird, ergibt sich, wenn man für G einen Raum von Funktionen nimmt, die in einem festen Intervall \mathfrak{S} definiert sind. Jeder Zerlegung \mathfrak{P} von \mathfrak{S} in endlich viele Teilintervalle entspricht der lineare Raum R aller in den Komponenten von \mathfrak{P} konstanten Funktionen aus G , und die Projektion P_R besteht in der Mittelbildung über jede dieser Komponenten hinsichtlich des Lebesgueschen Maßes, also der Bildung einer bedingten Erwartung. Sind $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ die Längen der Intervalle von \mathfrak{P} , so ist n die Dimension von R und $m_R(d\Phi_1, \dots, d\Phi_n) = \pi^{-n/2} \prod_{\nu=1}^n \exp(-\Phi_\nu^2 \Delta_\nu) / \sqrt{\Delta_\nu} d\Phi_\nu$. — Die Zusammenhänge mit dem Wienerischen

Integral werden eingehend untersucht und die Integrale von „polynomischen“ Funktionalen berechnet. Weiter wird, ähnlich wie im genannten Beispiel, die Integration über Hilbertsche Räume definiert und dabei vor allem das Problem der Identifizierung „idealer“ Funktionale im obigen Sinne mit gewöhnlichen Funktionen auf G und das damit zusammenhängende Problem der Invarianz gegenüber dem gewählten System \mathfrak{R} endlichdimensionaler Unterräume von G behandelt. Das dieser Integration zugrunde liegende Maß auf G ist nicht abzählbar additiv, doch läßt sich ein gewisser „äußerer“ Hilbertscher Raum konstruieren, auf den das Maß in geeignetem Sinne zu einem abzählbar additiven Maß fortgesetzt werden kann. Anwendungen in der Quantentheorie der Felder und auf die Darstellung von Lösungen von Anfangswertproblemen nebst der Feynman-Kacschen Formel werden erörtert. Schließlich

wird die „kausale Theorie der Quantenmechanik“ von N. Wiener und A. Siegel beschrieben und ihre physikalische Deutung skeptisch kommentiert.

K. Krickeberg.

Edwards, R. E.: **Derivatives of vector-valued functions.** Mathematika, London 5, 58—61 (1958).

In this paper the author discusses the differentiation of functions defined on the real axis and with values in a separated locally convex space E . Such a function f is said to be locally Lipschitzian, if to each compact set K of the reals and to each continuous semi-norm p on E there exists a number $m \geq 0$ such that $p(f(t') - f(t'')) \leq m |t' - t''|$ for every $t', t'' \in K$. (The same definition is valid in the case of a scalar-valued function, p being taken to be now the absolute value.) To each element $x' \in E'$ (the topological dual of E) corresponds the scalar component $f_{x'} = x' \circ f$ of f . So the main theorem of the paper runs as follows: Let E be a quasi-complete separated locally convex space (i. e. a separated l. c. s. E such that bounded closed subsets of E are complete), and let f be a mapping from the reals into E , such that if p is an integer ≥ 0 , each scalar component of f admits a locally Lipschitzian p -th derivative. Then f has derivatives of order $\geq p$ in the sense of the initial topology of E , which are also locally Lipschitzian. Supposing the quasi-completeness for the space E the author proves the theorem, assuming the a priori existence of derivatives only for the scalar components of f and not the existence of any derivative of f with respect to the given topology of E . This is the main difference of the theorem from an analogous result of L. Schwartz (L. Schwartz, this Zbl. 42, 116). As the author remarks we have a strengthened conclusion in the above theorem if we replace the initial topology of E by the Mackey topology $\tau(E, E')$. Finally, a comparison of the theorem with Schwartz's result in the special case, where E is the Banach space of continuous real-valued functions on a compact space P is given. A. Mallios.

Bagley, R. W. and J. D. McKnight: **On Q -spaces and collections of closed sets with the countable intersection property.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 10, 233—235 (1959).

The authors consider the class of topological spaces in which each collection of closed sets with the countable intersection property is contained in a collection of closed sets that is maximal with respect to this property. They prove that if a normal space belonging to this class is a Q -space in the sense of Hewitt (this Zbl. 32, 286), then it is a Lindelöf space. Implicit in the proof is the fact that a collection of closed sets is maximal with respect to the countable intersection only if it is maximal with respect to the finite intersection property.

M. Jerison.

Isiwata, Takesi: **On locally Q -complete spaces. I.** Proc. Japan Acad. 35, 232—236 (1959).

Verf. nennt einen vollständig regulären Raum X lokal Q -vollständig, falls die von der Menge $C(X)$ aller stetigen reellen Funktionen erzeugte uniforme Struktur lokal vollständig ist. Es wird u. a. gezeigt, daß jede von den folgenden Bedingungen mit der lokalen Q -Vollständigkeit äquivalent ist: X ist in seiner „ Q -Hülle“ offen (die Q -Hülle νX besteht aus denjenigen Punkten $y \in \beta X$, auf welche jede Funktion $f \in C(X)$ stetig fortgesetzt werden kann); es gibt einen Q -Raum $Y \supset X$ derart, daß $Y - X$ einpunktig ist.

M. Katětov.

Isiwata, Takesi: **On locally Q -complete spaces. II.** Proc. Japan Acad. 35, 263—267 (1959).

Es sei X vollständig regulär, $\nu X - X \subset B \subset \beta X - X$, B kompakt. Mit $C_B(X)$ wird die Algebra derjenigen Funktionen $f \in C(X)$ bezeichnet, für die es eine offene Menge $G \subset \beta X$ gibt derart, daß $B \subset G$ und $f(x) = 0$ für jedes $x \in G$. Es wird, unter anderen Ergebnissen, der folgende Satz bewiesen: ist X lokal Q -vollständig (siehe das vorstehende Referat), so ist X mit dem Strukturraum (d. h. dem Raum aller maximalen Ideale) von $C_B(X)$ homöomorph (unter der natürlichen Korrespon-

denz zwischen Punkten von X und maximalen Idealen von $C_B(X)$). Dadurch werden einige Ergebnisse von M. E. Shanks [Bull. Amer. math. Soc. 57, 295 (1951); abstract Nr. 365] und T. Ishii (dies. Zbl. 80, 317) wesentlich verallgemeinert. *M. Katětov.*

Isiwata, Takesi: On ring homomorphisms of a ring of continuous functions. I, II. Proc. Japan Acad. 35, 268—272, 335—339 (1959).

I. Es werden Unteralgebren γ von $C(X)$ untersucht. Gibt es zu jeder homomorphen Abbildung φ von γ auf R (Algebra der reellen Zahlen) genau einen Punkt $x \in X$ mit $\varphi(f) = f(x)$, $f \in \gamma$, so sagt Verf., γ besitze die Eigenschaft (H^*) . Verschiedene Sätze über (H^*) und verwandte Eigenschaften werden bewiesen, z. B.: $C(X)$ besitzt eine Unteralgebra mit der Eigenschaft (H^*) dann und nur dann, wenn X auf einen lokal Q -vollständigen Raum stetig eineindeutig abgebildet werden kann. Es werden auch einige Ergebnisse von S. Mrówka (dies. Zbl. 85, 321) verschärft. Bemerkung: Satz 1 (sowie Korollar 3) scheint nicht richtig formuliert zu sein, denn die betreffende Bedingung ist (auf eine triviale Weise) immer erfüllt. — II. Ist X ein vollständig regulärer Raum, so wird mit $PA(X)$ das System aller Unteralgebren $A \subset C(X)$ bezeichnet, welche die gegebene Topologie von X erzeugen und die Eigenschaft (H^*) besitzen. Mit $PI(X)$ wird das System aller $A \in PA(X)$ bezeichnet, welche gleichzeitig Ideale sind. Es wird u. a. gezeigt, daß die folgenden Eigenschaften einer Algebra A äquivalent sind: (a) für jedes $f \in A$, $f \neq 0$, gibt es eine homomorphe Abbildung φ von A auf R mit $\varphi(f) \neq 0$; (b) es gibt ein lokal Q -vollständiges X derart, daß A mit einer Algebra aus dem System $PA(X)$ isomorph ist. Einige Eigenschaften von X (lokale Q -Vollständigkeit, Kompaktheit usw.) werden mit Hilfe von Eigenschaften der Systeme $PA(X)$, $PI(X)$ charakterisiert; z. B. X ist lokal Q -vollständig dann und nur dann, wenn $PA(X)$ (oder $PI(X)$) nichtleer ist. *M. Katětov.*

Wada, Junzo: Positive linear functionals on ideals of continuous functions. Osaka math. J. 11, 173—185 (1959).

Bedeutet $C(X)$ die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf dem vollständigregulären Hausdorff-Raum X , so wird [angeregt durch Varadarajan, Fundamenta Math. 46, 209—220 (1958)] untersucht, wann für gewisse lineare Teilräume $N \subset C(X)$ folgendes richtig ist: (A) Jedes lineare nicht-negative Funktional T auf N ist stetig, d. h. aus $f \in N$, $f_n \in N$, $f_n \leq f_{n+1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ für jedes einzelne $x \in X$ folgt

$\lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n) = T(f)$; die Aussage (B) ist analog erklärt, nur tritt an Stelle der

Folgenkonvergenz Moore-Smith-Konvergenz. N ist meist ein α -Ideal, das ist ein linearer Teilraum von $C(X)$, der 1.) mit f auch alle $g \in C(X)$ enthält, für die $|g| \leq f$ sowie 2.) $f \in C(X)$ schon dann enthält, wenn alle $\min(|f|, n) \in N$ ($n = 1, 2, \dots$); beispielsweise ist die Menge aller stetigen reellen Funktionen auf einem lokalkompakten Raum, die kompakten Träger haben, ein α -Ideal. Lineare Teilräume N von $C(X)$ heißen l -Ideale, wenn sie nur 1.) erfüllen, Ring-Ideale, wenn mit $f \in N$, $h \in C(X)$ stets $hf \in N$. Zunächst wird in Verallgemeinerung bekannter Sätze gezeigt, daß ein lineares nicht-negatives Funktional T , definiert auf einem α -Ideal N , genau dann stetig im Sinne von (A) ist, wenn es von der Form $T(f) = \int f(x) d\mu(x)$ mit einem geeigneten Maß μ in X ist; analoges gilt auch für l -Ideale bei Zugrundelegung der Stetigkeit im Sinne von (B). Zu der eingangs erwähnten Frage werden dann u. a. folgende Sätze bewiesen: Ist N ein α -Ideal, so gilt (A) für N genau dann, wenn alle die linearen nicht-negativen Funktionale T , definiert auf N , identisch verschwinden, für die $T(f) = 0$ für alle solchen beschränkten $f \in N$, zu denen es ein $h \in N$ gibt mit $h(x) \geq 1$ da, wo $f(x) \neq 0$. Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über das α -Ideal N gilt für N genau dann (A), falls die Elemente von N nicht alle wie eine feste stetige Funktion verschwinden, d. h. falls es keine positive Funktion $f_0 \in C(X)$ gibt, die beliebig kleine positive Werte annimmt, so daß genau für alle $f \in N$ mit geeignetem natürlichen n $|f(x)| \leq$

$n f_0(x)$ für $0 < f_0(x) < 1/n$. Enthält das α -Ideal N mit f auch $\bigvee |f|$, so gilt (A) für N . Jedes m -abgeschlossene Ring-Ideal von $C(X)$ ist ein α -Ideal, und es gilt (A) dafür (die m -Topologie von $C(X)$ hat als Umgebungen von f die Mengen $\{g: g \in C(X), |g - f| < p \text{ auf } X\}$, wo p eine beliebige überall positive Funktion $\in C(X)$ [Hewitt, dies. Zbl. 32, 286; dort wird auch der Begriff „ Q -Raum“ definiert]). Ist X ein normaler Q -Raum und N ein α -Ideal, so sind (A) und (B) für N äquivalent (für $N = C(X)$ vgl. man hierzu auch; Mrówka, dies. Zbl. 87, 315). Ist X kompakt und N ein l -Ideal, so gilt dafür (B) (oder (A)) genau dann, wenn alle die nicht-negativen linearen Funktionale T auf N dort identisch verschwinden, die folgende Bedingung erfüllen: Ist $h \in N$ und verschwindet h auf einer offenen Obermenge von $\bigcap_{f \in N} (x: f(x) = 0)$, so ist $T(h) = 0$. Einige Beispiele zeigen, daß die bei diesen Sätzen gemachten Voraussetzungen nicht weggelassen werden dürfen.

H. Günzler.

Waelbroeck, Lucien: Calcul symbolique et ensembles bornés de fonctions rationnelles. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 114—123 (1957).

Sei $\mathfrak{B} = \{B_j\}$ eine abzählbare Familie von Mengen rationaler Funktionen $r(z) = r(z_1, \dots, z_n)$, \mathfrak{R} die durch $1, z_1, \dots, z_n$ und die Vereinigung der B_j erzeugte Algebra. \mathfrak{B} sei so beschaffen, daß \mathfrak{R} auch durch $1, z_1, \dots, z_n$ und eine Menge von rationalen Funktionen $1/p(z)$ mit Zähler 1 erzeugt werden kann. Es sei \mathfrak{C} die kleinste Familie von Teilmengen von \mathfrak{R} , für die gilt: 1. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, 2. $\{1, z_1, \dots, z_n\} \subset \mathfrak{C}$, 3. \mathfrak{C} enthält mit zwei Mengen C_1, C_2 stets auch die Summe $C_1 + C_2$, das Produkt $C_1 C_2$ und die absolutkonvexe Hülle $\bigcap_{i=1}^2 C_i$. Dann ist auch \mathfrak{C} eine abzählbare Familie $\{C_j\}$

und $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = \mathfrak{R}$. Auf \mathfrak{R} gibt es dann eine feinste (nicht notwendig separierte) lokalkonvexe Topologie τ , für die alle Mengen aus \mathfrak{C} beschränkt sind. Der Durchschnitt aller τ -Nullumgebungen ist ein Ideal \mathfrak{a} . Die quasivollständige Hülle $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$ der Algebra $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ist (falls \mathfrak{a} echt ist) eine kommutative Algebra mit Einselement, als Vektorraum lokalkonvex, quasivollständig und tonnelliert, und die Multiplikation ist in beiden Variablen stetig. Für gewisse Familien \mathfrak{B} werden die $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$ Algebren von holomorphen Funktionen, die in dem vom Verf. entwickelten symbolischen Kalkül (vgl. dies. Zbl. 56, 336 und folgendes Referat) eine wesentliche Rolle spielen. Deshalb ist die hier begonnene Untersuchung der Struktur der Algebren $\mathfrak{G}(\mathfrak{B})$ für diesen Kalkül von großem Interesse.

H. G. Tillmann.

Waelbroeck, L.: Note sur les algèbres du calcul symbolique. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 37 (offert en hommage à M. Fréchet), 41—44 (1958).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 56, 336) hatte der Verf. einen Operatorenkalkül für topologische (lokalkonvexe) Algebren A entwickelt. Dabei wurde für ein System (a_1, \dots, a_n) von „regulären“ Elementen (vgl. folgendes Referat) $a_j \in A$ ein stetiger Homomorphismus $f(s_1, \dots, s_n) \rightarrow f(a_1, \dots, a_n)$ der Algebra $H(\text{sp}(a_1, \dots, a_n))$ der auf dem Spektrum des Systems (a_1, \dots, a_n) holomorphen Funktionen in die Algebra A definiert. In der vorliegenden Note wird nun gezeigt, daß die dabei in die Algebra A gestellten Forderungen erheblich abgeschwächt werden können: an Stelle der Vollständigkeit von A genügt die Quasi-Vollständigkeit (d. h. Vollständigkeit aller beschränkten Teilmengen von A), und das Produkt braucht nicht in beiden Variablen gleichzeitig sondern nur in jeder Variablen einzeln stetig zu sein. Diese schwächeren Bedingungen sind in den Anwendungen sehr viel leichter zu verifizieren.

H. G. Tillmann.

Waelbroeck, Lucien: Algèbres commutatives: éléments réguliers. Bull. Soc. math. Belgique 9, 42—49 (1957).

Es sei A eine kommutative Algebra mit Einselement über dem Körper der komplexen Zahlen mit einer separierten, lokalkonvexen Topologie, für die gilt: A ist

quasivollständig und das Produkt ist in jeder Variablen einzeln stetig (t -Algebra). Existiert $b = (a - s_0)^{-1}$ für ein komplexes s_0 , so sind folgende Aussagen äquivalent: (1) $(a - s)^{-1}$ ist definiert und beschränkt in der Umgebung von s_0 (und dann dort auch holomorph). (2) $(b - t)^{-1}$ ist definiert und beschränkt für alle komplexen t in einer Umgebung von ∞ . Ein Element b , für das (2) gilt, heißt regulär. Das Spektrum von $a(\text{sp}(a))$ ist das Komplement des Holomorphiebereichs von $(a - s)^{-1}$, besteht also aus den Zahlen s , für die $a - s$ kein reguläres Inverses hat, und dem Punkt ∞ , falls a nicht regulär ist. Das Spektrum ist dann wie bei Banachalgebren so auch bei t -Algebren nichtleer und kompakt. Der „Spektralradius“ $h(a) = \text{Max} \{|s|; s \in \text{sp}(a)\}$ hat dann die Eigenschaften $h(sa) = |s| h(a)$, $h(a + b) \leq h(a) + h(b)$, $h(ab) \leq h(a) h(b)$. Die durch $h(a) < +\infty$ charakterisierten regulären Elemente $a \in A$ bilden dann eine Teilalgebra A^* von A , auf die sich die Gelfandsche Theorie der kommutativen B -Algebren übertragen läßt: Jedes maximale Ideal $M \subset A$ ist h -abgeschlossen (d. h. aus $h(a_n - a) \rightarrow 0$ und $a_n \in M$ folgt $a \in M$), und der Körper A^*/M ist dem Körper der komplexen Zahlen isomorph, da h auf ihm eine Norm induziert. Man erhält so einen Homomorphismus der Algebra A^* auf eine Algebra komplexwertiger Funktionen auf der Menge der maximalen Ideale, der im Falle von B -Algebren gerade der Gelfand-Homomorphismus ist. Auf nichtkommutative Algebren ist die Theorie nicht übertragbar, da Verf. an einigen Beispielen zeigt, daß Summe und Produkt regulärer Elemente nicht wieder regulär zu sein brauchen.

H. G. Tillmann.

Waelbroeck, Lucien: Structure des algèbres d'éléments réguliers. Centre Belge Rech. math., Colloque d'Algèbre supérieure, Bruxelles du 19 au 22 déc. 1956, 251—259 (1957).

Es sei A eine t -Algebra, A^* die Teilalgebra der regulären Elemente (vgl. vorstehendes Referat). Für ein System $a = (a_1, \dots, a_n)$ von regulären Elementen wird das Spektrum $\text{sp}(a)$ definiert als die Menge derjenigen Systeme $s = (s_1, \dots, s_n)$ von komplexen Zahlen, für die $p(s) \in \text{sp}(p(a))$ für alle Polynome p (oder gleichbedeutend: für die $p(a)$ kein reguläres Inverses hat falls $p(s) = 0$ ist). Das Spektrum ist dann eine

kompakte, rational-konvexe Teilmenge von $\bigcup_{j=1}^n \text{sp}(a_j)$. Unter Ausnutzung dieser Konvexitätseigenschaft hatte Verf. schon früher (dies. Zbl. 56, 336 und vorletztes Referat) den durch die Cauchysche Integralformel bestimmten symbolischen Kalkül

$$f(s) \rightarrow f(a) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1 \times \dots \times C_n} f(s) \cdot (a_1 - s_1)^{-1} \dots (a_n - s_n)^{-1} ds_1 \dots ds_n \quad (C_j \text{ ist dabei}$$

Rand einer Umgebung von $\text{sp}(a_j)$) fortgesetzt zu einem stetigen Homomorphismus der Algebra $\mathcal{H}(\text{sp}(a))$ aller auf $\text{sp}(a)$ holomorphen Funktionen in die Algebra A^* . Der Begriff des Spektrums wird nun auf beliebige Familien $a = \{a_i\}_{i \in I}$ von Elementen $a_i \in A^*$ übertragen: $s = \{s_i\}_{i \in I}$ gehört zum Spektrum von a , wenn für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt $\{s_j\}_{j \in J} \in \text{sp}(\{a_j\}_{j \in J})$. Mit der Topologie der einfachen Konvergenz ist dann wieder $\text{sp}(a)$ eine nichtleere, kompakte Menge. Unter einer auf $\text{sp}(a)$ holomorphen Funktion $f(s)$ wird eine Funktion verstanden, die nur von endlich vielen Variablen s_j , $j \in J$, abhängt und auf $\text{sp}(\{a_j\}_{j \in J})$ holomorph ist. Für solche Funktionen $f(s)$ ist dann eindeutig das Element $f(a) \in A^*$ definiert. Wählt man nun die Familie $a = \{a_i\}_{i \in I}$ als ein System von analytischen Erzeugenden, d. h. so, daß jedes $b \in A^*$ ein $f(a)$ ist, so ist der Homomorphismus $f(s) \rightarrow f(a)$ eine Abbildung auf A^* , sein Kern besteht aus Funktionen, welche auf $\text{sp}(a)$ verschwinden. Das Spektrum von a kann auch identifiziert werden mit a) der Menge aller maximalen Ideale von A^* oder b) der Menge aller stetigen Homomorphismen σ von A^* auf den Körper der komplexen Zahlen (mittels der Zuordnung $s_i = \sigma(a_i)$). Insbesondere hängt also die Struktur des Spektrums nicht wesentlich von der Auswahl des Erzeugendensystems ab und man erhält eine stetige Darstellung von A^* als eine Algebra von stetigen Funktionen auf dem Raum der maximalen

Ideale von A^* . Für Banachalgebren erhält man so als Spezialfall gerade die Gelfand-sche Theorie.

H. G. Tillmann.

Domar, Yngve: Closed primary ideals in a class of Banach algebras. Math. Scand. 7, 109—125 (1959).

Let G be the additive group of the reals, and let p be a positive measurable function on G such that $1 \leq p(x+y) \leq p(x)p(y)$ whenever $x, y \in G$. It is assumed that $\int_G (1+x^2)^{-1} \log p(x) dx < \infty$. All the results in the present article are obtained

by imposing on p one or the other of two additional conditions (these are too lengthy to be explicated here; it might be noted, however, that they cause $p(x)$ to grow to infinity faster than any polynomial, when $|x| \rightarrow \infty$). Let p henceforth satisfy both of these additional conditions. Beurling's algebra F_p consists of all the complex-valued measurable functions f such that $\int_G |f(x)| p(x) dx < \infty$. If n is in the set

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ then the n^{th} derivative $\hat{f}^{(n)}$ exists for every f in F_p . If $t \in G$, let $I_n(t)$ denote the set of all f in F_p such that $\hat{f}^{(k)}(t) = 0$ for all $k \in N$ with $k \leq n$: the family $\mathcal{L}(t) = \{I_n(t) : n \in N\}$ consists of closed primary ideals, and the set $I_\infty(t) = \bigcup \mathcal{L}(t)$ is also a closed primary ideal. Two theorems on primary ideal structure yield the following corollary. If J is any closed primary ideal in F_p , then there exists a number $t \in G$ such that $J = I_n(t)$, where $n \in N$ or $n = \infty$. This result is based on an interesting new property of functions of exponential type 0. As usual, the dual space F_p^* of F_p is identified with the space $\{p \cdot g : g \in L^\infty(G)\}$ of generalized characters. The author investigates solutions $\varphi \in F_p^*$ of the equation $\int_G f(x-y) \varphi(y) dy = 0$. For example, if $f \in F_p$ is such that $\hat{f}^{(n)}(t_0) \neq 0$ and $\hat{f}(t) = 0$ for $t \neq t_0$, then $\varphi(x)$ is of the form $\exp(i t_0 x) \cdot P(x)$, where $P^{(n)}(x) = 0$. The article closes with a result on polynomial approximation. G. L. Krabbe.

Ghika, Al.: Algèbres de transformations linéaires continues d'un espace Hilbertien dans un autre. Commun. Acad. Republ. popul. Romîne 7, 831—834, russ. und französ. Zusammenfassung 833—834 (1957) [Rumänisch].

On utilise les résultats et les notations d'un travail antérieur [Commun. Acad. Republ. popul. Romîne 7, 759—764 (1957; ce Zbl. 87, 319)]. L'A. énonce les résultats suivants: l'algèbre $\mathfrak{A}_{W^*}(T)$ est isomorphe et isométrique à l'algèbre $C(K)$ des fonctions complexes continues définies sur $K = [0, \|T\|]$; la relation $((B-A)x | Wx) \geq 0$ est une relation d'ordre sur $\mathfrak{A}_{W^*R}(T)$, qui se conserve par l'isomorphisme sur $C_R(K)$.

G. Marinescu.

Fixman, Uri: Problems in spectral operators. Pacific J. Math. 9, 1029—1051 (1959).

After obtaining several necessary conditions for a bounded operator S (on a Banach space X), to be of scalar type, the author gives some examples of unitary operators in X , which are not spectral (in Dunford's sense), in the case when $X = C(\Omega)$ (the space of complex continuous functions defined on the compact Hausdorff space Ω), l_p, l_p [the spaces of the one-sided (respectively, two-sided) sequences $\{\alpha_j\}$ such that $\sum |\alpha_j|^p < \infty$], $p \neq 2$.

C. Foiaş.

MacCarthy, Charles A.: The nilpotent part of a spectral operator. Pacific J. Math. 9, 1223—1231 (1959).

Let T be a spectral operator (in Dunford's sense) in the Banach space X , $E(\sigma)$ (σ Borel set in the complex plane) its resolution of the identity and T_σ the restriction of T to $E(\sigma)X$, satisfying the condition $|(\lambda - T_\sigma)^{-1}| \leq K d(\lambda; \sigma)^{-m}$, $\lambda \notin \sigma$, $|\lambda| \leq T + 1$, where $d(\lambda; \sigma)$ is the distance from λ to σ and K is a constant independent of σ . If X is a Hilbert space it was shown by N. Dunford (this Zbl. 56, 346) that T is of type $\leq m - 1$. In this note it is proved that in general T is of type $\leq m + 1$,

that if X is weakly complete then T is of type $\leq m$, and that these two results cannot be improved.

C. Foiaş.

Gochberg (Gohberg), I. C. and M. G. Krejn (Krein): The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators. Translated by Robert G. Bartle. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. **13**, 185—264 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. **88**, 321.

Krein (Krein), S. G.: On interpolation theorem in operator theory. Soviet Math. Doklady **1**, 61—64 (1960), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR **130**, 491—494 (1960).

Let E be a Banach space, M a linear manifold, $T(z): M \rightarrow E$ a family of linear operators which depends on the complex parameter z . Suppose that: A. For any $x \in M$, $T(z)x \equiv 0$ is an entire function of z in the sense of E. Hille-R. Phillips, Functional Analysis and Semigroups (this Zbl. **78**, 100), and B.

$$\|x\|_\alpha = \sup_{\tau \in R} \|T(\alpha + i\tau)x\|_E < +\infty, \quad \alpha \in R$$

where R is the set of reals. The completion of M according to this norm gives a Banach space E_α . The collection $\{E_\alpha | \alpha \in R\}$ is called the analytic scale of spaces. The function $\log(\|x\|_\alpha)$ is convex (M. Riesz) with respect to α for any $x \in M$. Let L_2 be the usual Hilbert space of square summable complex-valued functions over n -dimensional Euclidean space. For $f \in L_2$ by \tilde{f} denote the Fourier transform of f and by A an operator with the property that $A\tilde{f}(Q) = (1 + |Q|)\tilde{f}(Q)$. The scale which corresponds to A denote by $\{W_\alpha^2\}$. Then if α is a natural number W_α^2 is the S. L. Sobolev space consisting of all functions which possess all the generalised square summable derivatives of the order α . If $\alpha > 0$ then W_α^2 is the space of L. N. Slobodeckij (this Zbl. **88**, 303). In this example and some others the group property of $T(z)$ is satisfied. To generalise this the author adds the condition C. $M \subset E$ is an invariant manifold with respect to $T(z)$, $T(0)$ is the identity operator, for any $x \in M$ $T(z)x$ is an analytic function in the space E_α and the "group" property $\|T(\beta + i\sigma)x\|_\alpha \leq \|x\|_{\alpha+\beta}$ holds true. Suppose that $\{E_\alpha\}$ and $\{E'_\alpha\}$ ($\alpha \in R$) are two analytic scales which correspond to the manifolds M, M' . The scale $\{E'_\alpha\}$ is called adjoint to $\{E_\alpha\}$ if a bilinear functional (x, u) exists ($x \in M, u \in M'$) and a linear correspondence $\alpha \leftrightarrow \alpha^*$ such that $\|x\|_{E_\alpha} = \sup_{u \in M'} \frac{|(x, u)|}{\|u\|_{E'_{\alpha^*}}}$. The

main result. Let $\{E_\alpha\}$ and $\{E_{\bar{\alpha}}\}$ be two analytic scales and let the adjoint scale $\{E'_\alpha\}$ exist. Suppose that $\{E_\alpha\}$ and $\{E'_{\bar{\alpha}}\}$ satisfy the condition C. If on the set M which corresponds to the scale $\{E_\alpha\}$ an operator Q is defined such that for some α , $\beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$

$$\|Qx\|_\alpha \leq K_1 \|x\|_\alpha, \quad \|Qx\|_{\bar{\beta}} \leq K_2 \|x\|_\beta, \quad x \in M,$$

holds then

$$\|Qx\|_{\alpha(\mu)} \leq K_1^{1-\mu} K_2^\mu \|x\|_{\alpha(\mu)}$$

where

$$\alpha(\mu) = \mu\beta + (1-\mu)\alpha, \quad \bar{\alpha}(\mu) = \mu\bar{\beta} + (1-\mu)\bar{\alpha}.$$

If $Q: E_\alpha \rightarrow E_{\bar{\alpha}}$ is a completely continuous operator then it is completely continuous as an operator from $E_{\alpha(\mu)}$ to $E_{\bar{\gamma}}$ for any $\alpha \leq \gamma \leq \bar{\alpha}(\mu)$. Some other theorems, consequences and generalizations (to include in a scale L_p spaces) are also treated. Proves are not done.

S. Kurepa.

Markus, A. S.: On holomorphous operator functions. Doklady Akad. Nauk SSSR **119**, 1099—1102 (1958) [Russisch].

Es seien G ein Gebiet in der Ebene der komplexen Zahlen, λ_0 ein Punkt von G und $A_\lambda = A_{\lambda_0} + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i C_i$ eine in G holomorphe Operatorfunktion [für die

benützte Terminologie und Bezeichnungen, vgl. I. C. Gochberg und M. G. Krejn, *Uspechi mat. Nauk* **12**, Nr. 2 (74), 43—118 (1957; dies *Zbl.* **88**, 321)]. Für jedes Element x_0 des Nullraumes $\mathfrak{Z}_{A_{\lambda_0}}$ von A_{λ_0} bezeichne $\mu(x_0, A_{\lambda_0}) (\leq \infty)$ das Supremum derjenigen nichtnegativen ganzen Zahlen μ , für die solche Vektoren $x_{\mu 0} = x_0, x_{\mu 1}, \dots, x_{\mu \mu}$ existieren, die die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^k C_i x_{\mu, k-i} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, \mu; C_0 = A_{\lambda_0})$$

befriedigen [insbesondere ist $\mu(0, A_{\lambda_0}) = +\infty$]. Alle $x \in \mathfrak{Z}_{A_{\lambda_0}}$ mit $\mu(x, A_{\lambda_0}) = +\infty$ bilden eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}(A_{\lambda_0})$, ihre Dimension sei mit $n(A_{\lambda_0})$ bezeichnet. Satz 1: Für jedes $\lambda \in G$ sei A_λ ein Φ_+ - (oder Φ_-) Operator. Es existiert dann eine Menge $\Gamma \subset G$ derart, daß $G - \Gamma$ in G isoliert ist und die Funktion $\alpha(A_\lambda)$ über Γ einen konstanten Wert α_0 hat; für $\lambda \in G - \Gamma$ ist dagegen $\alpha(A_\lambda) > \alpha_0$. Für $\lambda \in G$ ist $n(A_\lambda) = \alpha_0$. Satz 2: A_λ sei für jedes $\lambda \in G$ ein Φ_- -Operator. Es existiert dann eine Menge $\Gamma \subset G$ derart, daß $G - \Gamma$ in G isoliert ist und die Funktion $\beta(A_\lambda)$ über Γ einen konstanten Wert β_0 hat; für $\lambda \in G - \Gamma$ dagegen ist $\beta(A_\lambda) > \beta_0$. Ferner ist für jedes $\lambda \in \Gamma$ die Relation $\mathfrak{N}(A_\lambda) = \mathfrak{Z}_{A_\lambda}$ gültig. *B. Sz.-Nagy—I. Kovács.*

Gochberg (Gokhberg), I. C. (I. Ts.) und M. G. Krejn (Krein): Completely continuous operators with a spectrum concentrated in zero. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **128**, 227—230 (1959) [Russisch].

This note contains some interesting contributions to the spectral theory of the generalized nilpotent operators A on a separable Hilbert space \mathcal{H} . It is shown that if $P(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) is a (strongly) continuous spectral scale (i. e. $P(0) = 0, P(1) = I, P(s)P(t) = P(\min(s, t)), P(t)^* = P(t)$) and H a Hilbert-Schmidt operator, then the integral $A = 2i \int_0^1 P(t) H dP(t)$ (suitably defined) is also a Hilbert-Schmidt

operator, such that: i) A is a generalized nilpotent, (ii) $(i/2)(A^* - A) = H$ and (iii) $A P(t) = P(t) A P(t)$ ($0 \leq t \leq 1$). These last properties determine A uniquely. If T is a generalized nilpotent such that $(i/2)(A^* - A)$ is a Hilbert-Schmidt operator, then there is an extension \tilde{T} (which acts in a Hilbert space $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$) of T , such that $\tilde{T}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}) = \{0\}$ and $\tilde{T} = 2i \int_0^1 P(t) H dP(t)$, where $P(t)$ is a corresponding spectral scale. Diverse applications are also exposed. *C. Foias.*

Itô, Takasi: On the commutative family of subnormal operators. *J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I.* **14**, 1—15 (1958).

P. R. Halmos (this *Zbl.* **41**, 232) and J. Bram (this *Zbl.* **64**, 116) have proved that a bounded linear operator A on Hilbert space \mathfrak{H} is subnormal (i. e. admits a normal extension in some Hilbert space $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$) if and only if the condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (A^n x_{n'}, A^{n'} x_n) \geq 0$$

holds for any elements $x_n \in \mathfrak{H}$, which are almost all equal to 0 (i. e. $x_n \neq 0$ for a finite set of indices only). Using an analogous method, the Author proves the following theorem. Let Γ be an additively written commutative semi-group with a 0 element. By a representation of Γ there is meant a map $\gamma \rightarrow A_\gamma$ of Γ in the algebra of bounded linear operators on Hilbert space \mathfrak{H} such that $A_{\gamma+\gamma'} = A_\gamma A_{\gamma'}$, $A_0 = I$. In order that there exists, in some larger space \mathfrak{K} , a representation of Γ by bounded normal operators $\{N_\gamma\}$ such that $N_\gamma \supseteq A_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$), it is necessary and sufficient that the condition

$$(C) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\gamma' \in \Gamma} (A_\gamma x_{\gamma'}, A_{\gamma'} x_\gamma) \geq 0$$

hold for any set $\{x_\gamma\}$ of elements of \mathfrak{H} , which are almost all equal to 0. $\{N_\gamma\}$ may be chosen minimal i. e. such that there is no proper subspace \mathfrak{K}' of \mathfrak{K} , $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$.

which reduces all operators N_γ . In this case the structure $\{\mathfrak{N}, N_\gamma, \mathfrak{S}\}_{\gamma \in \Gamma}$ is determined up to isomorphism, and we have $\|N_\gamma\|_{\mathfrak{N}} = \|A_\gamma\|_{\mathfrak{S}}$ for all $\gamma \in \Gamma$. In particular, if all A_γ are isometric then the operators of the minimal normal extension are all unitary. — Let $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ be a representation of Γ satisfying the condition (C) and let $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ be the weakly closed algebra (non necessarily self-adjoint) generated by $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Further let $\{N_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ be the minimal normed extension of $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, in the space $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{S}$. Then each operator A_ω can be extended uniquely to an operator L_ω on \mathfrak{N} , belonging to the weakly closed self-adjoint algebra generated by $\{N_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. — Using this theorem, a simple proof is given for the theorem of Halmos and Bram concerning the resolvent sets of a subnormal operator A and its minimal normal extension N , namely that $\varrho(A)$ is the union of some of the connected components of $\varrho(N)$.

B. Sz.-Nagy.

Heuser, Harro: On the spectral theory of symmetric finite operators. Trans. Amer. math. Soc. 94, 327—336 (1960).

Es werden Operatoren A im Hilbertraum X betrachtet, die beschränkt, symmetrisch und positiv sind und die weitere Eigenschaft besitzen, daß für den Nullraum $N(A - \lambda I)$ und den Bildbereich $R(A - \lambda I)$ gilt: Die Dimensionen von $N(A - \lambda I)$ und $X/R(A - \lambda I)$ sind endlich und gleich. Falls für ein Element

$x \in X$ gilt $Ax \neq 0$, so existiert der Grenzwert $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^k x\|}{\|A^{k-1} x\|}$ und ist gleich der oberen Grenze aller charakteristischen Zahlen λ , für deren Eigenelemente e_λ gilt: $(x, e_\lambda) \neq 0$. Ferner ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^k x\|}{\|\lambda^k\|} = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda > \mu; \\ 0 & \text{für } \lambda = \mu, \text{ wenn es kein Eigenelement } e_\mu \text{ gibt mit } (x, e_\mu) \neq 0; \\ \varrho \neq 0 & \text{für } \lambda = \mu, \text{ wenn ein Element } e_\mu \text{ existiert mit } (x, e_\mu) \neq 0. \end{cases}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A^k x, x)}{k}$ konvergiert genau dann, wenn es kein Eigenelement e_μ gibt

mit $(x, e_\mu) \neq 0$; in diesem Fall konvergiert $A^k x / \|A^k x\|$ schwach gegen Null. Die Folge $A^k x / \|A^k x\|$ konvergiert genau dann gegen ein Element $h \in X$, wenn $(x, e_\mu) \neq 0$ ist für ein gewisses e_μ ; in diesem Fall ist h ein normiertes Eigenelement von μ . Unter bestimmten weiteren einschränkenden Voraussetzungen für den Operator A können gewisse Aussagen über das Spektrum von A gemacht werden.

E. Heyn.

Kato, Tosio: On finite-dimensional perturbations of self-adjoint operators. J. math. Soc. Japan 9, 239—249 (1957).

Verf. untersucht die Frage, inwieweit die Struktur eines selbstadjungierten Operators durch eine Störung von endlichem Range beeinträchtigt wird. § bezeichne einen (nicht notwendig separablen) Hilbert-Raum, H_0 einen (nicht notwendig beschränkten) selbstadjungierten Operator, V einen selbstadjungierten Operator mit dem (endlichen) Rang m (d. h. der Wertebereich von V ist m -dimensional), es sei $H_1 = H_0 + V$. Es wird gezeigt, daß drei (abgeschlossene) Unterräume $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_{01}$ existieren, wobei \mathfrak{M}_{01} im Durchschnitt von \mathfrak{M}_0 und \mathfrak{M}_1 liegt, die folgende Eigenschaften besitzen: 1. \mathfrak{M}_{01} reduziert sowohl H_0 als auch H_1 ; die in \mathfrak{M}_{01} liegenden Teile von H_0 und H_1 sind identisch. 2. Der Teilraum $\mathfrak{S} \ominus \mathfrak{M}_{01}$ ist separabel. Die in $\mathfrak{S} \ominus \mathfrak{M}_{01}$ liegenden Teile von H_0 bzw. H_1 haben Spektren, deren Vielfachheit m nicht übersteigt. 3. \mathfrak{M}_0 und \mathfrak{M}_1 reduzieren H_0 bzw. H_1 . Die in \mathfrak{M}_0 und \mathfrak{M}_1 liegenden Teile von H_0 bzw. H_1 sind einander unitär-äquivalent. 4. Die Teile von H_0 bzw. H_1 in $\mathfrak{S} \ominus \mathfrak{M}_0$ bzw. $\mathfrak{S} \ominus \mathfrak{M}_1$ sind „singulär“. 5. Die in $\mathfrak{M}_0 \ominus \mathfrak{M}_{01}$ und $\mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_{01}$ liegenden Teile von H_0 bzw. H_1 sind „absolut stetig“, d. h. diese beiden Teilräume sind jeweils orthogonal zu den von den Eigenelementen von H_0 bzw. H_1 aufgespannten Teilräumen. — Ferner werden zwei teilweise-isometrische Operatoren angegeben, die beide die in \mathfrak{M}_0 bzw. \mathfrak{M}_1 liegenden Teile von H_0 bzw. H_1 ineinander überführen. K. Krumhaar.

Lin, Chiin: On the calculation of the eigenvalues for functional equations. Science Record, n. Ser. 3, 180—184 (1959).

Einer linearen Eigenwertaufgabe (1) $Hx - \lambda x = 0$ in einem Hilbertschen Raum X werden drei Näherungsgleichungen gegenübergestellt: (a) $Tx' = \lambda' x'$, (b) $\varphi T \varphi_0^{-1} \bar{x}' = \bar{\lambda}' \bar{x}'$, (c) $\bar{H} \bar{x} = \bar{\lambda} \bar{x}$. Dabei sei $H \in (X \rightarrow X)$, $\bar{H} \in (\bar{X} \rightarrow \bar{X})$, \bar{X} ein Hilbertscher Raum, welcher zu einem Unterraum $X' \subset X$ isomorph ist, und $T \in (X \rightarrow X')$. φ_0 realisiere diesen Isomorphismus, φ sei eine Fortsetzung von φ_0 auf X . H , T , $\varphi T \varphi_0^{-1}$ und \bar{H} werden als symmetrisch und vollstetig vorausgesetzt. Die nur als Hilfsmittel benutzten Gleichungen (a) und (b) haben die gleichen Eigenwerte (einschließlich Vielfachheit). Bei geeigneter Numerierung der Eigenwerte gilt: $|\lambda_0 - \bar{\lambda}_0| \leq \|H - T\| + \|\varphi T \varphi_0^{-1} - \bar{H}\|$. — In ähnlicher Weise wird der Fall behandelt, daß (1) statt durch die Näherungsgleichung (d) $\varphi \tilde{H} \bar{x} = \bar{\lambda} \bar{x}$ durch (c) ersetzt wird, wobei nur eine Hilfsgleichung $\tilde{H} \varphi x' = \lambda x'$ auftritt. — Mit Hilfe der funktionalanalytischen Ergebnisse erhält Verf. bei der Integralgleichung

$$\int_0^1 H(s, t) x(t) dt - \lambda x(s) = 0$$

Konvergenzaussagen für die Methode der mechanischen Quadraturen und die Methode der ausgearteten Kerne. (Einige Teilergebnisse werden unter geringeren Voraussetzungen bewiesen als hier angegeben.)
J. Schröder.

Pectre, Jaak: Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels. Math. Scandinav. 7, 211—218 (1959).

The purpose of this note is to prove the following proposition: Let X be an n -dimensional, indefinitely differentiable, manifold, Ω an open set of X and $\mathcal{L}(\Omega)$ the vector space (over R or C) of the indefinitely differentiable functions defined in Ω . A sheaf \mathcal{L} is easily obtained on X , the mapping $\varrho: \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\Omega')$, where $\Omega' \subset \Omega$, being the usual restriction operation. Now every homomorphism P of the sheaf into itself is a differential operator. This is to say that on a map of $\Omega: P = \sum_{\alpha} a^{\alpha}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\alpha}$

where $a^{\alpha} \in \mathcal{L}(\Omega)$, the family $\{a^{\alpha}\}$ being locally finite; α denotes a sequence of integers: $\alpha_1, \dots, \alpha_p$; $(\partial/\partial x)_{\alpha}$ and $|\alpha|$ are defined as in Schwartz' theory of distributions. The proof makes use of two lemmas of a rather elementary character. The author considers an equivalence relation in every fibre \mathcal{L}_x : f and g being two sections above Ω , two elements of \mathcal{L}_{x_0} , $x_0 \in \Omega$, are R -equivalent if and only if $(\partial/\partial x)_{\alpha} f(x_0) = (\partial/\partial x)_{\alpha} g(x_0)$ for every α . The homomorphism $P: \mathcal{L}_x \rightarrow \mathcal{L}_x$ induces a homomorphism $P^*: \mathcal{L}_{x/R} \rightarrow \mathcal{L}_{x/R}$ and P^* may be calculated easily by an application of the lemmas.
C. Racine.

Gluško (Glushko), V. P. and S. G. Krejn (Krein): Fractional powers of differential operators and the imbedding theorems. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 963—966 (1958) [Russisch].

Let G be a bounded region in an n -dimensional ($n \geq 2$) space which is star-like with respect to all points of some sphere in G . In $L_2(G)$ is considered a self-adjoint positive definite operator A , generated by a differential operator of even order together with homogeneous boundary conditions. The operator A is said to be strongly invertible if

$$\|A^{-1} f\|_{W_2^1} \leq C \|f\|_{L_2}, \quad (f \in L_2),$$

where W_2^1 is a Sobolev space. The authors present results concerning the image of L_2 under the operators $A^{-\gamma}$ for $0 < \gamma < 1$. Theorem 1. Let A be strongly invertible, $0 < \gamma < 1$, and $r = \gamma l - \frac{1}{2}n$. Then the following cases are possible: (a) r is non-integral and positive, in which case $A^{-\gamma}$ is completely continuous from L_2 into

$C_{m,\nu}$, the space of functions with partial derivatives of order $m = [r]$ satisfying a Hölder condition with exponent $\nu = r - [r]$; (b) r is a positive integer, in which case $A^{-\nu}$ is a completely continuous operator taking L_2 into $C_{m,\nu}$, with $m = r - 1$, $\nu < 1$; (c) $r \leq 0$, in which case $A^{-\nu}$ is completely continuous from L_2 into L_q , with $1/q > -r/n$. Theorem 2: Let A be strongly invertible, and let m be a positive integer satisfying $\gamma l - \frac{1}{2}n \leq m < \gamma l$. Then $D^m A^{-\gamma}$ (D^m = some partial derivative of order m) is completely continuous from L_2 into L_q , where $1/q > (\frac{1}{2}) - (\gamma l - m)/n$. If M is a point in \bar{G} let

$$D_h^m f(P) = |M - P|^{-h} D^m f(P), \quad (h \geq 0).$$

Estimates on the norm of $D_h^m A^{-\gamma}$ as an operator from L_2 into L_2 , and from W_p^l into L_q , are given, which are independent of M in \bar{G} . Also estimated is

$$\sup |P - Q|^{-\nu} |D^m \varphi(P) - D^m \varphi(Q)|, \quad (P, Q \in G),$$

for φ in W_p^l .

E. A. Coddington.

Krasnosel'skij, M. A. and E. I. Pustyl'nik: The use of fractional powers of operators in studying Fourier series of eigenfunctions of differential operators. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 978—981 (1958) [Russisch].

Let T be a positive definite self-adjoint operator in a Hilbert space H with a completely continuous inverse. Let the eigenvectors and eigenvalues of T be denoted by $\{u_i\}$ and $\{\lambda_i\}$ respectively, and let $D(T^\alpha)$ be the domain of T^α for any $\alpha > 0$. The authors state results concerning the relation between the powers T^α and the convergence of the Fourier series $\sum (f, u_i) u_i$, and the differentiated series. For example, if $T^{-\beta}$ is completely continuous from H into $E \subset H$, and $f \in D(T^{\beta+\gamma})$, ($\gamma \geq 0$), then the Fourier series converges to f in the norm of E , and indeed

$$\|f - \sum_{i=1}^n (f, u_i) u_i\|_E = o(\alpha_n^{-\gamma}),$$

where $\alpha_n = \inf(\lambda_{n+k})$, $k = 1, 2, \dots$. If D^k is a partial differentiation of order k , and

$$\|D^k T^{-\beta} \varphi\|_E \leq b \|\varphi\|_H, \quad (\varphi \in H),$$

and if $f \in D(T^{\beta+\gamma})$, then D^k may be applied termwise to the Fourier series for f , resulting in a series converging to $D^k f$ in the E -norm. In fact

$$\|D^k f - \sum_{i=1}^n (f, u_i) D^k u_i\|_E = o(\alpha_n^{-\gamma}).$$

If E is the space of continuous functions, this result gives conditions for the uniform and absolute convergence of the differentiated series. Presumably this last result refers to the case where $H = L_2(G)$, with G being some bounded set in Euclidean space. Other results are stated describing the range of the fractional powers of an operator acting in L_2 .

E. A. Coddington.

Rozanov, Ju. A. (Yu. A.): Spectral analysis of abstract functions. Teor. Veroyatn. Primen. 4, 291—310, engl. Zusammenfassung 310 (1959) [Russisch], engl. Übersetzung in Theor. Probab. Appl. 4, 271—287 (1960).

Es sei H ein Hilbertraum, R die reelle Gerade, \mathfrak{S} das System aller halboffenen Intervalle $[\lambda_1, \lambda_2)$ in R und Φ eine endlich-additive Funktion auf \mathfrak{S} mit Werten in H . Für $\Delta \in \mathfrak{S}$ setzt man $\text{Var}_\Delta \Phi = \sup_{\Delta_i \in \mathfrak{S}} |\sum_i \alpha_i \Phi(\Delta_i)|$, wo $\Delta_i \subset \Delta$, die Δ_i disjunkt sind und $|\alpha_i| \leq 1$. Φ heißt von beschränkter Variation, wenn $\text{Var}_R \Phi < \infty$ ist, und stark stetig, wenn $\text{Var}_{\Delta_n} \Phi \rightarrow 0$ für $\Delta_n \supset \Delta_{n+1} \rightarrow 0$. Das Integral in bezug auf Φ wird definiert. Verf. nennt eine abstrakte Funktion $x(t)$ ($-\infty < t < \infty$, $x(t) \in H$) harmonisierbar, wenn $x(t) = \int e^{it\lambda} \Phi(d\lambda)$ mit Φ von beschränkter Variation und stark stetig. Das ist eine allgemeinere Definition als die übliche, denn $F(\Delta, \Delta') = (\Phi(\Delta), \Phi(\Delta'))$ muß hier nicht von beschränkter Variation im gewöhnlichen (Vitalischen) Sinne sein, und sie hat den Vorteil, daß $A x(t)$, wo A ein linearer stetiger Operator in H

ist, wieder harmonisierbar ist. Es wird bewiesen daß $x(t)$ dann und nur dann harmonisierbar ist, wenn $(x(u), x(v))$ die Form $\iint e^{i(\lambda u - \mu v)} F(d\lambda, d\mu)$ hat, wo F von beschränkter Variation in einem schwächeren (Fréchetischen) Sinne ist. In dem letzten Absatz (§ 3) werden abstrakte Funktionen $x(t)$, für welche das Spektrum existiert, untersucht, d. h. solche, für welche $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t + \tau), x(t)) dt$ existiert und in τ stetig ist. Für die Klasse der Abschätzfunktionen der Form $y(t) = \int_{-\infty}^{t-\tau} q(u-t) x(u) du + \sum_{\tau_k \geq \tau} c_k x(t - \tau_k)$ wird das Extrapolationsproblem gelöst.

M. Jiřina.

Rabson, Gustave: The existence of nonabsolutely convergent Fourier series on compact groups. Proc. Amer. math. Soc. 10, 893—897 (1959).

The author proves that on every compact group of positive dimension, there is a complex valued function which is not an absolutely convergent Fourier transform.

M. Mahowald.

Leeuw, Karel de and Irving Glicksberg: Almost periodic compactifications. Bull. Amer. math. Soc. 65, 134—139 (1959).

Verff. betrachten eine beschränkte Halbgruppe S in einem Banachraum B , für welche die Bahnen $O(x) = \{Tx \mid T \text{ in } S\}$ bedingt schwachkompakt sind (x in B). Die schwache Hülle \bar{S} von S ist dann in der schwachen Operatortopologie kompakt, und das Produkt UV (U, V in S) ist in U und T einzeln stetig. Man sagt daher, S sei eine (kompakte) topologische Halbgruppe. Über der natürlich ebenfalls topologischen Halbgruppe S kann man den Banachraum $C(S)$ der beschränkten stetigen Funktionen bilden, und dort die Rechtstranslationen R_T (T in S) als lineare nichtdehnende Operatoren erklären. Sie bilden eine Darstellung S' von S in $C(S)$. Ein S' -invarianter, die Konstanten enthaltender, gegen Übergang zum Konjugiert-komplexen und gegen Norm- (d. h. gleichmäßige) Konvergenz abgeschlossener Teilraum von $C(S)$ heißt zugänglich, wenn es auf ihm einen S' -invarianten Mittelwert gibt. — Theorem: Folgende Aussagen sind äquivalent: 1. Die Funktionen der Bauart $f(T) = (Tx, y')$ (x in B , y' in $B' = \text{Dualraum von } B$) erzeugen einen zugänglichen Teilraum von $C(S)$. 2. Das minimale zweiseitige abgeschlossene Ideal K in S ist eine kompakte topologische Gruppe. 3. Für S und B gilt der Aufspaltungssatz von Jacobs (vgl. dies. Zbl. 70, 117), d. h. B zerfällt direkt in einen fastperiodischen und einen Flucht-Anteil. — Beweismittel ist vor allem die von Ellis (vgl. dies. Zbl. 79, 166) bewiesene Aussage: Ist eine kompakte topologische Halbgruppe algebraisch eine Gruppe, so ist sie auch eine topologische Gruppe. — Über einer beliebigen abstrakten topologischen Halbgruppe S wird nun $C(S)$ mit der Darstellung S' von S betrachtet. Die Funktionen f in $C(S)$ mit bedingt schwachkompakten $\{R_T f \mid T \text{ in } S\}$ bilden einen abgeschlossenen S' -invarianten Teilraum W von $C(S)$. Sie heißen schwachfastperiodisch (Eberlein, dies. Zbl. 34, 64). S' (in W) heißt die schwachfastperiodische Kompaktifizierung von S . Es wird gezeigt, daß S' für die Theorie der f aus W dieselbe Rolle spielt wie die klassische Bohr-Kompaktifizierung für die Theorie der klassischen fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen. Durch Beispiele wird gezeigt, daß in der „schwachen“ Theorie nicht ohne weiteres ein Analogon zum klassischen Approximationstheorem für fastperiodische Funktionen existiert, doch werden Fälle angegeben, in denen Analogie besteht. Beweise sind nicht angegeben, sondern sollen getrennt publiziert werden.

K. Jacobs.

Zaidman, S.: Sur la perturbation presque-périodique des groupes et semi-groupes de transformations d'un espace de Banach. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 16, 197—206 (1957).

Zunächst wird folgende Verallgemeinerung des Satzes von Bohr über unbestimmte Integrale fastperiodischer (f. p.) Funktionen bewiesen: Ist X ein Banach-Raum, $G(t)$ eine Darstellung $[G(s+t) = G(s)G(t), G(0) = E]$ der additiven Gruppe der reellen Zahlen R durch lineare Operatoren $G(t): X \rightarrow X$ mit $\|G(t)\| \leq 1$ für $t \in R$, ist $G(t)x$ für jedes $x \in X$ (stark-)stetige und f. p. Funktion auf R mit Werten in X {äquivalent ist: $G(R)x$ ist totalbeschränkt}, und ist schließlich $x(t): R \rightarrow X$ stetig und f. p., so gilt (das Integral ist im Sinne von Riemann-Graves gemeint):

$y(t) := \int_0^t G(t-s)x(s)ds$ ist genau dann f. p., wenn der Wertevorrat $y(R)$ be-

dingt kompakt in X ist. {Der Beweis des dabei benötigten Lemmas II-1 scheint dem Ref. unvollständig zu sein (x_0 hängt von τ ab), doch ist Lemma II-1 richtig, wie man sofort sieht, wenn man die (äquivalente) Maasche Definition von f. p. heranzieht. Weiter wird zum Beweis ein entsprechender Satz von Bochner benutzt; letzterer ist zwar von Bochner nur für endlich-dimensionale X formuliert worden, bleibt aber offenbar für allgemeine X richtig, wenn man in ihm (wie es für den vorliegenden Fall benötigt wird) die Voraussetzung „beschränkt“ durch „bedingt kompakt“ ersetzt}. Aus diesem ersten Resultat folgt sofort; Ist $G(t)$ eine Darstellung der additiven Gruppe der reellen Zahlen durch Operatoren in X mit $\|G(t)\| \leq 1$, $G(t)x$ stetig in t für jedes $x \in X$, ist weiter A der erzeugende Infinitesimaloperator von $G(t)$, besitzt die Gleichung $dx/dt = Ax$ für alle $x_0 \in D_A$ ($=$ Definitionsbereich von A) höchstens eine Lösung $x(t)$ mit $x(0) = x_0$ und ist diese Lösung stets f. p., ist schließlich $f(t): R \rightarrow X$ f. p. mit einer stetigen starken Ableitung für alle $t \in R$, so ist eine Lösung $x(t)$ von $dx/dt = Ax + f(t)$ mit $x(0) \in D_A$ genau dann f. p., wenn $x(R)$ bedingt kompakt ist. Schließlich wird unter Zugrundelegung der additiven Halbgruppe $R^+ := (t: 0 \leq t \text{ reell} < \infty)$ bewiesen: Ist $S(t)$ eine Darstellung von R^+ durch lineare Operatoren in X mit $\|S(t)\| \leq e^{\beta t}$ für $t \geq 0$, wo $\beta < 0$, ist $S(t)x$ für jedes $x \in X$ stetig in $t \in R^+$, bezeichnet A wieder den erzeugenden Infinitesimaloperator von $S(t)$, besitzt die Gleichung $dx/dt = Ax$, $x(0) = x_0 \in D_A$ höchstens eine Lösung, ist schließlich $f: R \rightarrow X$ f. p. und mit einer starken stetigen Ableitung versehen für $-\infty < t < \infty$, so gibt es genau eine Lösung $x_1(t)$ von $dx/dt = Ax + f(t)$, die f. p. ist, alle übrigen Lösungen $x(t)$ sind asymptotisch f. p., d. h. $x(t) = x_1(t) + o(1)$ für $t \rightarrow +\infty$. [Wegen des Begriffs „f. p. auf R^+ “ vgl. man H. Bohr, J. reine angew. Math. **157**, 61–65 (1926); W. Maak, dies. Zbl. **46**, 311; H. Günzler, Math. Ann. **141**, 68–86 (1960); im vorliegenden Fall ist $x_1(t)$ aber sogar auf $(-\infty, +\infty)$ definiert und f. p., wie der Beweis von théorème III-1 zeigt.] Etliche Druckfehler.

H. Günzler.

Tarnopol'skij, V. G.: Über Jacobische Matrices. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. **2** (9), 233–243 (1959) [Russisch].

An infinite matrix $A = (a_{mn})$ satisfying the conditions $a_{kk} = a_k$, $a_{k+1,k} = c_k$, $a_{k,k+1} = b_k$ ($k = 1, 2, \dots$) and all other matrix elements of A are zero is called a Jacobi matrix. If all main (finite) minors of A are different from zero then

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & \lambda_2 \lambda_3 & \lambda_3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} a'_1 b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a'_2 b_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a'_3 b_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a'_4 b_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = T$$

where $\lambda_k = -c_k/a_k$ and $a'_k = a_k + \lambda_{k-4} b_{k-1}$, i. e. the matrix A by multiplication from left with lower triangular matrix gives an upper triangular Jacobi matrix. If all $a'_k \neq 0$ then T possesses an inverse upper triangular matrix. If all main minors of A are different from zero and if for every i the series

$$\frac{1}{a'_i} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_i v_{i+1} \dots v_{i+p-1}}{a'_{i+p}}, \quad v_i = -\frac{b_i}{a'_i} \lambda_i$$

is absolutely convergent then A^{-1} exists. The author has found explicitly the matrix elements of a A^{-1} .

S. Kurepa.

Praktische Analysis:

Glénisson, Y. et L. Derwidué: Une nouvelle méthode de calcul des zéros des polynômes. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **45**, 197—204 (1959).

Soit $f(x)$ le premier membre d'une équation algébrique de degré n . La méthode consiste à écrire x^{n+1}, x^{n+2}, \dots , sous forme de polynômes $Q_{n+1}(x), Q_{n+2}(x) \dots$ de degré $n-1$. Au cours de la formation du P. G. C. D. de $f(x)$ et $Q_{n+k}(x)$, on constate qu'à un certain moment, le reste devient négligeable. Le diviseur correspondant a ses racines voisines des racines de grand module de $f(x)$. Divers perfectionnements permettent d'obtenir des renseignements sur d'autres racines, les racines voisines de nombres donnés.

J. Kuntzmann.

Gouarné, René: La méthode des cycles en calcul automatique. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 314—319 (1958).

L'A. indique les résultats d'expérience de calcul du déterminant d'une matrice très creuse par la méthode des cycles. Les temps de calcul obtenus semblent prohibitifs.

J. Kuntzmann.

Bendrikov, G. A. and T. F. Teodorčik (Teodorchik): The analytic theory of constructing root loci. Automat. Remote Control **20**, 340—344 (1959), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. **20**, 355—358 (1959).

The algebraic equation of the root locus curve for a polynomial of degree n with real coefficients which depend linearly on a parameter is derived. This equation is obtained by replacing the complex variable of the polynomial by its real and imaginary part and by eliminating the parameter from the real and imaginary part of the characteristic equation. Two examples for polynomials of degree four are given.

S. H. Lehnigk.

Ul'm, S.: Zur Konvergenztheorie von Iterationsverfahren. Izvestija Akad. Nauk Estonsk. SSR, Ser. techn. fiz.-mat. Nauk **8**, 153—164, deutsche Zusammenfassung 165 (1959) [Russisch].

Investigation into the convergence of some practically important iteration methods in normed linear spaces. Let the given equation be (1) $U(x) = x$. It is assumed that a solution x^* exists. One may then try to approximate the solution by an iteration (2) $x_{n+1} = U(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Together with (1) the author considers a real dominant equation $V(z) = z$ whose (real) solution z^* may be approximated by the iteration $z_{n+1} = V(z_n)$. It is assumed that the sequence (z_n) is monotonically increasing. If now 1. $\|x^* - x_0\| \leq z^* - z_0$; 2. $\|U(x^*) - U(x)\| \leq z^* - V(z)$ if $\|x^* - x\| \leq z^* - z \leq z^* - z_0$; 3. $V(z)$ is continuous and monotonically increasing in the interval $z_0 \leq z \leq z^*$; 4. the equation $V(z) = z$ has no solution in the interior of this interval; and 5. $z_0 < z_1$, then the iteration (2) tends to the solution of (1) and $\|x^* - x_n\| \leq z^* - z_n$. — This theorem is applied in several cases where it leads to an error estimate: 1. In the case of a non-linear operator equation $P(x) = 0$ with an iteration method involving the first two derivatives of P . Using an existence theorem, recently proved by Gavurin [Izvestija vyssh. učebn. Zaved. Mat. **1958**, Nr. 5(6), 18—31 (1958)] the general theorem is sharpened and adapted to the special problem. Similar treatment is then given to the ordinary and the modified Newton method whereby theorems of Mysovskich [this Zbl. **37**, 210 and Vestnik Leningradst. Univ. **8**, Nr. 11, 25—48 (1953)] are generalized.

H. Schwerdtfeger.

Ehrmann, Hans: Konstruktion und Durchführung von Iterationsverfahren höherer Ordnung. Arch. rat. Mech. Analysis **4**, 65—88 (1959).

Verf. behandelt Iterationsverfahren (*) $x_{n+1} = f(x_n)$ höherer (d. h. $(k > 1)$ -ter) Ordnung zur Berechnung der Lösung $\xi = f(\xi)$ einer Gleichung $F(x) = 0$ mit einer Zahl x als Unbekannten. Ist $f(x)$ k -mal stetig differenzierbar, so hat (*) die Ordnung k , wenn $f'(\xi) = f''(\xi) = \dots = f^{(k-1)}(\xi) = 0$ und $f^{(k)}(\xi) \neq 0$ gilt. Zunächst werden Ergebnisse von E. Schröder [Math. Ann. 2, 317—365 (1870)] in etwas präzisierte Form zusammengestellt, welche u. a. daran erinnern sollen, daß das Problem der Aufstellung von Iterationsverfahren höherer Ordnung theoretisch seit langem gelöst ist. Verf. entwickelt dann für den Fall $F'(\xi) \neq 0$ — beginnend mit dem Newtonschen Verfahren (zweiter Ordnung) — eine Methode zur rekursiven Aufstellung von Iterationsverfahren der Ordnungen 2, 3, ... Diese Verfahren haben gegenüber den bisher üblichen folgende praktische Vorteile: Sie lassen sich relativ einfach durchführen (es wird ein Rechenschema angegeben), und man kann Aussagen über den Rechenaufwand machen, welche es in vielen Fällen ermöglichen, das günstigste unter diesen Verfahren zu wählen. Als günstigstes Verfahren wird dasjenige Verfahren r -ter Ordnung ($r \geq 2$) angesehen, bei dem man zur Erzielung einer Gesamtordnung $k = r^m$ in m Rechenschritten mit der geringsten Anzahl von Multiplikationen und Divisionen auskommt. Die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen dieser Art wird ausführlich diskutiert. Für algebraische Gleichungen n -ten Grades läßt sich (bezüglich der hier angegebenen Verfahren) z. B. aussagen: Bis $n = 5$ ist das Newtonsche Verfahren, für $n > 5$ das Verfahren dritter Ordnung am günstigsten. Verf. leitet ferner Fehlerabschätzungen her und erläutert die Anwendung der Verfahren bis zur 6. bzw. 8. Ordnung ausführlich am Beispiel der Gleichung $e^z = 1 + z$ und an einer algebraischen Gleichung 7. Grades.

J. Schröder.

Ehrmann, Hans: Iterationsverfahren mit veränderlichen Operatoren. Arch. rat. Mech. Analysis 4, 45—64 (1959).

Es werden Iterationsverfahren $u_{n+1} = T_n u_n$ zur Lösung einer Gleichung $u = T u$ in einem abstrakten Raum R untersucht. In R sei ein Abstand $\varrho(u, v)$ definiert, der Element eines halbgeordneten linearen Raumes N ist. Die in $D \subset R$ erklärten Operatoren T_n sollen in bestimmtem Sinne gegen T konvergieren und in einem beschränkten Gebiet $G \subset D$ gleichmäßig lipschitzbeschränkt sein: $\varrho(T_n u, T_n v) \leq P \varrho(u, v)$ mit einem stetigen, linearen, positiven Operator P . Die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} P^v \varrho$ konvergiere für $\varrho \in N$. G enthalte u_0 und alle Punkte $u \in R$ mit $\varrho(u, u_1) \leq (E - P)^{-1} P \varrho(u_0, u_1) + (E - P)^{-1} \tau_0$ bei $\tau_0 \geq \varrho(T_n u_0, T_0 u_0)$. Außer Existenz- und Eindeutigkeits- und Konvergenzaussagen wird eine Fehlerabschätzung

$$\varrho(u, u_1) \leq (E - P)^{-1} P \varrho(u_0, u_1) + (E - P)^{-1} \varrho(T u_0, u_1)$$

bewiesen. Die Konvergenzforderung $T_n \rightarrow T$ kann wegfallen, wenn auch T durch P lipschitzbeschränkt ist und auch $\tau_0 \geq \varrho(T_n u_0, T u_0)$ gilt. Die Ergebnisse werden auf gewöhnliche nichtlineare Gleichungen, Systeme nichtlinearer Gleichungen und nichtlineare Randwertaufgaben angewendet. Vier numerische Beispiele zeigen die Nützlichkeit der Methode.

J. Schröder.

Squire, William: Relaxation methods. Math. Mag. 33, 177—183 (1960).

Verf. gibt einen elementar gehaltenen Überblick über Relaxationsverfahren. An einem einfachen Beispiel wird die Relaxationsmethode erläutert. Ferner werden Anwendungsmöglichkeiten bei Differentialgleichungsaufgaben skizziert und Grenzen für die Verwendbarkeit der Methoden angedeutet.

G. Meinardus.

Stallmann, F.: Über das alternierende Verfahren von Schwarz und Neumann als Näherungsmethode der konformen Abbildung. Z. angew. Math. Mech. 38, 279—280 (1958).

Läuchli, P.: Tsehebyscheff-Ausgleichung. Z. angew. Math. Mech. 38, 267—268 (1958).

Simonsen, W.: On numerical differentiation of functions of several variables. Skand. Aktuarietidskr. 1959, 73—89 (1960).

Eine Funktion f zweier Variabler (x, y) wird in einem rechteckigen Bereich mit (m, n) Stückstellen in (x, y) -Richtung nach Lagrange interpoliert. Der Fehler der (i, j) partiellen Ableitung des Interpolationspolynoms wird mit einer von W. Barrett im Falle einer Variablen verwendeten und auf einer geschickten Darstellung des Restgliedes der Taylor-Formel beruhenden Methode abgeschätzt. Vorausgesetzt wird Existenz und Stetigkeit von $f_{m+1, n+1}$. Verf. unterscheidet verschiedene Fälle:

der Punkt (x, y) liegt im Innern des Gitters und $D^i p(x) = D^i \prod_{\mu=0}^m (x - x_\mu)$ bzw.

$D^j q(x) = D^j \prod_{\nu=0}^n (y - y_\nu)$ ist gleich oder ungleich Null, der Punkt (x, y) liegt außerhalb des Gitters. Im Fall $D^i p = 0$ muß Existenz und Stetigkeit von $f_{m+2, n+1}$ und

entsprechend für $D^j q = 0$ dasselbe von $f_{m+1, n+2}$ gefordert werden. Die Gliederanzahl im Ausdruck für den Fehler ist unabhängig von der Ordnung der partiellen Ableitung. In jedem speziellen Fall tritt in allen Termen ein und dasselbe Paar von Zwischenwerten auf. Die Ergebnisse lassen sich, allerdings mit entsprechend größerem Aufwand, auf Funktionen mit mehr als zwei Variablen übertragen.

K. Kirchgässner.

Bögel, Karl: Über ein für Stabilitätsuntersuchungen geeignetes Normdiagramm der Gleichungen dritten Grades. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 236—244, 7 Tafeln (1958).

Die Arbeit ist identisch mit der in diesem Zbl. 73, 343 besprochenen.

Samelson, K.: Der Stand des digitalen Maschinenrechnens (insbesondere in den westlichen Ländern). Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 6, 1—5 (1960).

Hornick, S. D.: IBM 709 tape matrix compiler. Commun. Assoc. comput. Machin. 2, Nr. 9, 31—32 (1959).

Bemer, R. W.: A proposal for a generalized card code for 256 characters. Commun. Assoc. comput. Machin. 2, Nr. 9, 19—23 (1959).

Rose, Alan: Un multiplicateur ultrarapide. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2271—2273 (1959).

Verf. beruft sich auf eine noch nicht veröffentlichte Methode einer ultrarapiden „parallelen“ Addition und schlägt eine weitere Methode vor, die gestattet Multiplikation zweier N -stelliger binärer Zahlen auf $W = [\log_2 N] + 1$ Additionen $(2N - 1)$ -stelliger Zahlen zurückzuführen.

D. Tamari.

Voronov, A. A. und G. N. Sokolov: Digital integrator device for programming second-order curves. Automat. Remote Control 20, 169—176 (1959), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. 20, 176—183 (1959).

Verff. untersuchen die Möglichkeit, einen Digital-Analog-Rechner für die Programmierung von Kurven zweiter Ordnung einzusetzen. Das kann mit einem universellen Digital-Analog-Rechner oder mit einem Spezial-Analog-Rechner geschehen, dessen Anwendung im wesentlichen auf Kurven zweiter Ordnung beschränkt ist. Liegt die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung vor, so läßt sich ihr Bild nach dem Analogieverfahren aufzeichnen. Ist die Kurve zweiter Ordnung nur tabellarisch erfaßt, so werden weitere Punkte mittels eines ziffernmäßig arbeitenden Integrierelementes nach einem Interpolationsverfahren berechnet. Vielfach wird dabei die lineare Interpolation verwendet. Das Arbeitsprinzip des Integrierelementes wird angegeben, ein Programm zur Darstellung (Erzeugung) von Geradenstücken und Kreisen aufgestellt und die erreichbare Genauigkeit untersucht. Ein Spezial-Rechner wird beschrieben, der am Elektrotechnischen Institut der Akad. Nauk UdSSR entwickelt worden ist.

A. Hirschleber.

Kaphengst, Heinz: Eine abstrakte programmgesteuerte Rechenmaschine. Z. math. Logik Grundl. Math. 5, 366—379 (1959).

The author considers an abstract form of computing machine (*IIPM*) which is designed to resemble as closely as possible actual digital computing machines (e. g. its program is stored so that it can perform arithmetical operations on its own program). He gives rigorous definitions of the concept of program and of various useful ways of combining programs. Using these sub-routine techniques he proves very elegantly that every partial recursive function is computable on the *IIPM* and conversely, every computable function is partial recursive. He also gives a simple program which enables the *IIPM* to duplicate the behaviour of any given Markov algorithm. The *IIPM* has an infinite number of cells Z_1, Z_2, \dots together with Z_∞ (the calculating register or mill) and Z_0 (the order register). Each of these can hold any natural number n . Denote by (Z_i) the content of Z_i . The action of the machine is as follows: If $(Z_0) = 0$ the machine stops; if $(Z_0) = n$ (> 0) the machine adds one onto (Z_0) and follows the order to be found in cell Z_n . Orders are represented by numbers in this way: if $m = 4l + i$ with $0 \leq i < 4$ then m represents the order B_i where B_0, B_1, B_2, B_3 stand respectively for R, L, S, P (see below). The order code is: 1. "Call" orders: Rn ($n = 1, 2, \dots$) — replace content of order register Z_0 by n . $R0$ — "stop". This is assuming Z_∞ is empty, if not in both cases just add one onto (Z_0) and proceed. 2. "Read" orders: Ln ($n = 1, 2, \dots$) — replace content of Z_∞ by (Z_n) . $L0$ — clear Z_∞ . 3. "Write" orders: Sn ($n = 1, 2, \dots$) — replace content of Z_n by (Z_∞) . $S0$ — add 1 to (Z_∞) . 4. "Test" orders: Pn ($n = 1, 2, \dots$) — clear Z_∞ if $(Z_\infty) = (Z_n)$, otherwise replace (Z_∞) by 1. $P0$ — clear Z_∞ if not already clear. If so place 1 in Z_∞ . A program is a sequence of orders or, more precisely, a map of the "undetermined addresses" (i) ($0 < i \leq l$) into, not orders, but "order forms" which differ from orders in that instead of referring to exact addresses they refer to addresses of the form (i) (internal undetermined address) of $[i]$ (external undetermined address). These order forms are thus of the form $B_j(i)$ or $B_j[i]$. The idea is that when these are put into the machine (i) will refer to the address of line i of the program itself, $[i]$ will refer to an external address, normally used for storing numerical data. The formal expression of this "putting of a program into the machine" is defined thus: an address choice α for a program P is a $(1, 1)$ map of a set of undetermined addresses including all those occurring as line numbers of P and all those occurring in the orders of P and (o) , into the set of natural numbers and satisfying $\alpha(o) = 0$. It is called normal for P if all orders of P are stored in consecutive locations i. e. if $\alpha(i) - i$ is constant for $i = 1, \dots, l$. A machine setting (a map of all cells into natural numbers in which almost all cells are mapped onto 0) is said to contain a program P according to an address choice α for P when $(Z_0) = \alpha(1)$ and, for $m = 1, 2, \dots$, $(Z_m) =$ (the number of) $B_i \alpha$ whenever there exists $j \leq l$ with $\alpha(j) = m$ and $P(j)$ (the j^{th} line of P) = $B_i a$. The author proceeds to define simple program (one which does not call for an order from an external address or do arithmetic on its own orders), various methods of program composition and the notion of a function program (for computing a numerical function of numbers stored in certain addresses). As he says the similarity of the *IIPM* to existing computers makes these theoretical studies of interest in connection with the theory of programming.

J. C. Shepherdson.

Bottenbruch, H.: Übersetzung von algorithmischen Formelsprachen in die Programmiersprachen von Rechenmaschinen. *Z. math. Logik Grundl. Math.* 4, 180—221 (1958).

In der vorliegenden Arbeit wird ein insbesondere vom theoretischen Standpunkt aus sehr interessantes „Programmiersystem“ erstellt, d. h. ein System, welches besteht aus einer Formulierungssprache, in der die zu lösenden Aufgaben formuliert werden, einer Ausführungssprache, die der tatsächlichen Ausführung der gestellten Aufgabe zugrunde liegt, und Regeln zur Übersetzung aus der einen in die andere Sprache. Bei der Aufstellung des vorliegenden Programmiersystems wird insbesondere er-

strebt, daß die Übersetzungsregeln die Definition neuer Ausdrucksmittel zulassen, so daß eine flexible Formulierungssprache ermöglicht wird. Das Hauptergebnis der Arbeit liegt in der Angabe eines einfachen Definitionsschemas, das es gestattet, die Ausdrucksmittel einer Formulierungssprache mit Hilfe einer Ausführungssprache in einer Liste zu definieren. Das Definitionsschema ergibt sich aus der Einführung von Abkürzungen für vorgefertigte Programme und stellt eine Erweiterung der üblichen Unterprogrammtechnik bei Rechenmaschinen dar. Die Übersetzung einer erweiterten Sprache in die Originalsprache besteht in der Elimination derjenigen Ausdrucksmittel, die durch Definition eingeführt sind, d. h. durch Einfügen der vorgefertigten Programme an Stelle der Abkürzungen. Diejenigen Stellen in den vorgefertigten Programmen, die erst beim Einfügungsprozeß ausgefüllt werden können, sind in den vorgefertigten Programmen mit „Leerstellenzeichen“ (sog. „Programm-Variable“) ausgefüllt. Die Abkürzungen für die vorgefertigten Programme bestehen aus einem festen Text (der sich aus festgelegten „Textzeichen“ aufbaut) und all den Leerstellenzeichen, die in dem vorgefertigten Programm auftreten. Durch geschickte Einführung geeigneter Begriffe gelingt eine einfache und übersichtliche zusammenfassende Darstellung des Übersetzungsvorgangs. Das aufgestellte Programmiersystem besteht aus einer Formelsprache als Formulierungssprache, die sich eng an die bereits bestehenden Formelsprachen anlehnt, und der Programmsprache für eine Turingmaschine mit zwei Bändern als Ausführungssprache. Es ergibt sich durch Zusammenfassung von zwei Systemen. Im ersteren wird eine sog. Zwischensprache, die der Programmsprache eines herkömmlichen elektronischen Rechenautomaten entspricht, auf der Programmsprache für Turingmaschinen und im zweiten System die Formelsprache auf der Zwischensprache aufgebaut. Neben der Darlegung dieses Aufbaus werden als Beispiele einige Aufgaben in der Zwischensprache programmiert und einige in der Formelsprache geschriebene Programme in die Zwischensprache übersetzt. Schließlich wird noch an einigen Beispielen gezeigt, daß das eingeführte Definitionsschema Möglichkeiten bietet, die beim Aufbau der Zwischensprache und der Formelsprache nicht ausgenutzt wurden, indem einige Definitionen gebracht werden, die im wesentlichen Regeln zur Umformung von Zeichenfolgen darstellen. Es sei noch zum Schluß hervorgehoben, daß sich die besprochene Arbeit auszeichnet durch sehr präzise Begriffsbildungen und Formulierungen.

Th. Geis.

ALGOL sub-committee report-extensions. Commun. Assoc. comput. Machin. 2, Nr. 9, 24 (1959).

• **Theorie und Anwendung diskreter automatischer Systeme. Arbeiten der Konferenz vom 22.—26. 9. 1958.** [Teorija i primenienie diskretnych avtomatičeskich sistem. Trudy konferencii 22.—26. 9. 1958.] Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1960. 573 S., R. 25,80 [Russisch].

Auf dieser Konferenz, der ersten ihrer Art in der Sowjetunion, wurden 54 Vorträge gehalten, von denen im vorliegenden Band 49 abgedruckt sind (5 wurden anderweitig veröffentlicht). Die Einleitung von **Ja. S. Zypkin**, der auch Herausgeber ist, gibt einen Überblick über Probleme der Theorie und Entwicklungstendenzen diskreter automatischer Systeme. Die folgenden Vorträge sind in vier Gruppen unterteilt: Gruppe 1: Optimale Relaisregelsysteme. Methoden zur Synthese von Relais-systemen, insbesondere solchen mit Totzeit, die hinsichtlich der Schnelligkeit optimal sind. Gruppe 2: Analyse und Synthese von Impulssystemen. Systeme mit veränderlichen Parametern und mehreren Impulsgliedern; Untersuchung der selbst-erregten Schwingungen in nichtlinearen Impulssystemen; Probleme der Nachbildung; Beschreibung konkreter Regler. Gruppe 3: Digitale Systeme. Anwendung von digitalen Rechenelementen in verschiedenen automatischen Systemen; Analog-Digital-Wandler und Digital-Analog-Wandler; digitale Funktionsgeber; endliche Automaten; zeitabhängige logische Gleichungen. Gruppe 4: Extremalsysteme. Unter-

suchung der stationären Bewegung; Einfluß statistischer Faktoren auf den Suchvorgang; Beschreibung konkreter Systeme. *R. Herschel.*

Pontrjagin, L. S.: Optimale Regelungsprozesse. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 1 (85), 1—20 (1959) [Russisch].

Zusammenfassender Bericht über Arbeiten des Verfassers und seiner Schüler V. G. Boltjanskij und P. V. Gamkrelidze zum Thema optimaler Vorgänge in Regelsystemen. Mit Hilfe differential-geometrischer Methoden wird gezeigt, daß unter bestimmten Stetigkeitsvoraussetzungen solche „Stellfunktionen“ $u = u(t)$ existieren, daß der Zustandsvektor $x = x(t)$ eines vorgegebenen Systems $\dot{x} = f(\bar{x}, u)$ auf möglichst schnellem Wege aus einem Bildpunkt x_0 in einen anderen \bar{x}_1 übergeht. Für lineare Systeme wird die Eindeutigkeit der Lösung nachgewiesen. *K. Magnus.*

Krasovskij (Krasovskii), N. N.: Sufficient conditions for optimization. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 839—843 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 23, 592—594 (1959).

In einer früheren Arbeit des Verf. (ibid. 303—332 bzw. 209—229) wurden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Trajektorie $x(x_0, t, \eta_0)$ eines nichtlinearen Systems von Differentialgleichungen in bezug auf bestimmte zulässige Steuerfunktionen $\eta(t)$ lokal-optimal ist. Dabei wurden (neben anderen) zusätzliche Bedingungen für die zweiten Ableitungen $\partial^2 f_i / \partial x_j \partial x_k$ benutzt. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß ohne diese zusätzlichen Bedingungen die restlichen allein nicht mehr hinreichend sind, auch nicht mehr hinreichend dafür, daß diese Trajektorie optimal in bezug auf kleine Variationen von η_0 ist. *R. Herschel.*

Nerode, A.: Linear automaton transformations. Proc. Amer. math. Soc. 9, 541—544 (1958).

One defines firstly a linear automaton transformation. Let R be a nonempty set, let N consist of all non-negative rational integers, and denote by R^N the set of all functions on N to R . Let M be a map: $R^N \rightarrow R^N$. The author gives necessary and sufficient conditions such that a map M be a linear automaton Gauss transformation when R is a finite commutative ring with unity. *P. Constantinescu.*

Petrov, V. V. und V. Ju. Rutkovskij: Theorie der einfachsten Servomechanismen mit zwei nacheilenden Relais. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 2, 59—71 (1957) [Russisch].

Das im Titel genannte technische Problem wird auf folgendes mathematische System geführt: $A \dot{x}_1 + \kappa_1 x_1 = -f_1(\kappa_2 x_2 - \tau_1)$, $B \dot{x}_2 = f_2(x_3 - \tau_2)$, $x_3 = \gamma_1 x_1 + C \dot{x}_1 + \kappa_3 x_2$. Dabei ist $f_2(x) = 0$ für $|x| < x_0$, $f_2(x) = \text{sign } x$ für $|x| > x_0$. $f_1(x)$ beschreibt eine kompliziertere Dreipunktschaltung. Durch schrittweise Diskussion in einer (x_1, x_2) -Ebene werden Bedingungen für periodischen und aperiodischen Bewegungsablauf hergeleitet. *W. Haacke.*

Grebensščikov, V. N.: Algebraische Methode der Analyse mehrpoliger Kontakt-Ventilschaltungen. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 14, Nr. 2, 69—78 (1959) [Russisch].

In this work one proposes a method for analyzing multipoles with relay contacts and rectifiers. In this method the author utilizes recurrent formulas of Boole's algebra. One compares the number of operations which this method requires, in opposite with other methodes; one concludes that for n poles, $n > 7$, the presented method is available. *P. Constantinescu.*

Popovič, Konstantin P.: Über die Bedingung für die Stabilisierung des Stellungsprozesses von Relaiskontakten bei vorgegebener Steuerung. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 509—534 (1957) [Russisch].

Si on considère les variables $K = (a, \dots, c)$, $P = (x, \dots, z)$, $E = (u, \dots, w)$ où a, \dots, c ; x, \dots, z ; u, \dots, w sont des variables binaires associées respectivement

aux contacts des boutons, aux contacts des relais et aux éléments exécutifs d'un schéma à contacts et relais, alors le fonctionnement du schéma est parfaitement connu quand on sait les valeurs des deux fonctions $F(K, P) = P^*$, $\Phi(K, P) = E$ pour chaque couple de valeurs de K et P , ou la variable P^* parcourt un sousensemble des valeurs de la variable P . L'A. en donnant la définition du temps élémentaire [qui est un intervalle temporel de la plus grande longueur dans les moments duquel le schéma ne change pas son état], décrit le fonctionnement du schéma par les suites (K_0, P_0, E_0) , (K_1, P_1, E_1) , \dots , où (K_i, P_i, E_i) est l'état du schéma dans l' i ème temps élémentaire. En éliminant les valeurs de la variable P de ces suites et en retenant les valeurs du couple (K, P) de chaque suite précédente dans leur ordre initial, ainsi que les valeurs voisines soit différentes, on obtient des suites de la forme $(K'_0, E'_0)_{n_0}$, $(K'_1, E'_1)_{n_1}$, \dots , où $K'_0 = K_0$, $E'_0 = E_0$ et u_0 soit égal à ∞ soit indique le nombre des apparitions du couple (K'_0, E'_0) après l'élimination des valeurs de la variable P des suites précédentes, etc. Les nouvelles suites obtenues constituent le fonctionnement extérieur du schéma. L'A. démontre que si on a $F(K_0, P_0) = P_1$, $F(K_0, P_1) = P_2$, $\Phi(K_0, P_0) = \Phi(K_0, P_1) = E_0$, où $P_0 \neq P_1$, $P_1 \neq P_2$ et si pour chaque suite qui commence par (K_0, P_0, E_0) on peut trouver une suite qui commence par (K_0, P_1, E_0) de laquelle on obtient la même suite $(K'_0, E'_0)_{n_0}$ $(K'_1, E'_1)_{n_1}$, \dots , alors on peut modifier la fonction $F(K, P) = P^*$ en posant au lieu de $F(K_0, P_1) = P_2$ la relation $F(K_0, P_1) = P_1$ sans que le fonctionnement extérieur du schéma soit modifié. C'est une méthode pour réduire le nombre des relais d'un schéma donné.

P. Constantinescu.

Tu Sjuj-jañ (Tsu Syui-Yan') and Téj Luj-vy (Tei Lui-Vy): Auto-oscillations in a single-loop automatic control system containing two symmetric relays. Automat. Remote Control **20**, 83—88 (1959), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. **20**, 90—94 (1959).

The object of the paper is to find the frequencies of auto-oscillations in a single-loop system containing two linear elements and two symmetric ideal relays, and to compare the exact frequencies with the frequencies obtained by means of the harmonic balance method. For the exact determination of auto-oscillation frequencies the additional assumption is made that the two linear elements represent ideal filters, i. e. only the first harmonic of the periodic relay outputs can pass the linear elements. Under this assumption it is shown that the equations for the auto-oscillation frequencies obtained by the exact method are identical with the equations obtained by the harmonic balance method. If at least one of the linear elements does not act as an ideal harmonic filter, then the exact and the approximate equation do not coincide. The results obtained may be extended to single-loop systems containing an arbitrary number of symmetric relays separated by ideal harmonic linear filters.

S. H. Lehnigk.

Sao Da-čuan (Shao Da-chuan): On the possibility of certain types of oscillations in sampled-data control systems. Automat. Remote Control **20**, 77—82 (1959), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. **20**, 85—89 (1959).

Die vorliegende Arbeit behandelt ein Regelungsproblem, das in das spezielle Gebiet der Theorie der Relaisysteme gehört. Ausgehend von einem Regelsystem mit Linearteil und Impulselement (Periode T_s) und unter der Voraussetzung, daß der Linearteil stabiles Übertragungsverhalten aufweist, wird die Möglichkeit einer symmetrischen Schwingung mit der Periode $2T_s$ untersucht. Als Ergebnis von Stabilitätsbetrachtungen wird angegeben, welche Gebiete des Parameter-raumes zu stabilen und instabilen Schwingungen gehören.

A. Hirschleber.

Talancev (Talantsev), A. D.: Concerning the analysis of potential-pulse circuits with the aid of special transition operators. Soviet Phys., Doklady **4**, 749—752 (1960), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR **127**, 320—323 (1959).

In the present article the author develops an algebraic apparatus for use in the analysis of circuits with simultaneous potential and pulse operation. For potential, as well as for pulse circuits the existing methods of analysis and synthesis of symbolic logic are of sufficient adequacy, but the application of these methods to the circuits with simultaneous potential and pulse operation is limited. In this case it is necessary to describe formally the changes of state of the various circuit elements, the transitions from one state to the other, and so on. In the present article an effort is made in this direction.

P. Constantinescu.

Pervozvanskij, A. A.: Über die Qualität der automatischen Frequenzregelung in energetischen Systemen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 1, 3—13 (1957) [Russisch].

Untersucht wird die Frequenzregelung eines großen Energiesystems. Zwecks statistischer Erfassung der Vorgänge wird angenommen, daß die Belastung $X(t)$ (Schwankungen im Verbrauchernetz) die Summe einer langsam veränderlichen Hauptkomponente $g(t) = a_0 t$ ($a_0 = 1\%/min$) und eines stationären stochastischen Prozesses $m(t)$ ist. Den sowjetischen Industrievorschriften entsprechend wird verlangt, daß die durch $m(t)$ verursachte mittlere quadratische Frequenzabweichung $< 0,2\%$ und daß die Summe des stationären Fehlers (für $\dot{g} = a_0$) und der doppelten quadratischen Frequenzabweichung $< 0,4\%$ ist. Aus diesen Forderungen gewinnt der Verf. obere Schranken für die Kennwerte (Verstärkungskoeffizienten) der verwendeten Frequenzregler. Die Untersuchung erfolgt an einem linearisierten Modell mit einem Freiheitsgrad.

P. Sagirow.

Doganovskij (Doganovskii), A. S. and A. A. Fel'dbaum: Analysis of the compensation for strip thickness variation by means of an electronic analog. Automat. Remote Control 20, 185—197 (1959), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. 20, 192—205 (1959).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Kompensation von Schwankungen der Stärke von Walzgut in einer Walzenstraße, einem wichtigen Problem für die komplexe Automatisierung von Kaltwalzwerken. Diese Schwankungen werden durch die unterschiedliche Stärke des im Heißwalzwerk erzeugten Walzgutes und durch Einflußgrößen verursacht, die sich aus der Technologie des Kaltwalzverfahrens ergeben. Die Schwankungen werden im Prinzip durch Regelung des Abstandes zweier Walzen von Walzenpaaren beseitigt, wobei die Walzgutstärke mit Mikrometern gemessen wird. Reicht die erzielte Genauigkeit nicht aus, so kann die Winkelgeschwindigkeit eines weiteren Walzenpaares gesteuert werden, wozu jedoch ein Kompensationsrechner benötigt wird. Für die Entwicklung einer geeigneten Rechenschaltung ist die Kenntnis der Beziehungen zwischen allen wichtigen Einflußgrößen erforderlich. Diese Gleichungen werden aufgestellt, diskutiert und gelegentlich vereinfacht, um sie rechentechnisch realisieren zu können. Das Zeitverhalten des Walzwerkes wird am Modell nachgebildet und die Brauchbarkeit des Kompensationsrechners nachgeprüft.

A. Hirschleber.

● **Jakovkin, M. V.:** Rechentafeln. Ein Hilfsmittel für Lehrer. [Vyčislitel'nye tablicy. Posobie dlja učitelej.] Moskau: Staatsverlag für Lehrbücher und pädagogische Literatur des Ministeriums für Bildung der RSFSR 1958. 216 S. R. 5.60.

Enthält Tafeln für die Multiplikation von vierstelligen mit einstelligen und von dreistelligen mit zweistelligen Zahlen, sowie Erklärungen für die Anwendung der Tafeln.

Sherry, M. E. and S. Fulda: Calculation of gamma functions to high accuracy. Math. Tables Aids Comput. 13, 314—315 (1959).

Berechnung von $\Gamma(\frac{1}{3})$, $\Gamma(\frac{2}{3})$, $\ln \Gamma(\frac{1}{3})$, $\ln \Gamma(\frac{2}{3})$ auf 35 Dezimalen.

Gorup, G. v.: Formeln und Tabellen für ein den Hankelschen Zylinderfunktionen verwandtes Integral. Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsforsch. 15, 58 S. (1957).

L'A. considère les fonctions $T_n(z) = \int_0^{\infty} e^{-nt} e^{-z \cosh t} dt$ et $S_n = e^z T_n$ (n entier

≥ 0) qui apparaissent dans l'Aérodynamique, et qui peuvent s'exprimer facilement à l'aide des fonctions de Hankel. Mais pour le calcul numérique il est préférable d'utiliser une formule de récurrence pour les petites valeurs de n et un développement asymptotique pour les grandes valeurs de n ; pour les valeurs intermédiaires on recourt à une intégration numérique. Des tables suivent donnant les valeurs avec neuf chiffres de $\operatorname{Re}(T_n)$, $\operatorname{Im}(T_n)$, $\operatorname{Re}(S_n)$, $\operatorname{Im}(S_n)$, $1/n - \operatorname{Re}(S_n)$ pour $0 \leq n \leq 40$, et pour $k = -iz = 0'001, 0'002, 0'005; 0'01 (0'01) 0'1; 0'1 (0'1) 2; 2 (1) 7$.

A. de Castro.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

● **Parzen, Emanuel:** *Modern probability theory and its applications.* (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) New York and London: John Wiley & Sons, Inc. 1960. XV, 464 p. \$ 10,75.

This book is written, the author tells us, as a background to many courses (statistics, statistical physics, industrial engineering, communication engineering, genetics, statistical psychology and econometrics) and it is well to begin by saying that it will certainly be appropriate for the first of these listed courses. The topics covered are definitions and descriptions of probability and random phenomena, basic theory such as conditional and compound probabilities and independence, probability laws, expectations and generating functions. These occupy about two hundred pages. In the remainder of the book there are the usual special laws (normal, binomial and Poisson), random variables, more about expectations, characteristic functions and convergence in probability. The book is interestingly written and ingenious in a great deal of the exposition and example. It can be read with profit by any student who has had intensive mathematical training for at least one year but will be of little use to a non-mathematician coming to the subject with no previous knowledge. The author is obviously an enthusiast for his subject but also an optimist. It is easier in the reviewer's experience to use a well-tried classic such as W. Feller — *An Introduction to Probability Theory* (cf. this Zbl. 39, 132) — to delineate probability theory to any but the mathematics specialist than to use such a book as the author has provided. The mathematics specialist will, however, like Mr. Parzen's book very much.

F. N. David.

● **Alder, Henry L. and Edward B. Roessler:** *Introduction to probability and statistics.* Drawings by **Evan L. Gillespie.** (A Series of Undergraduate Books in Mathematics.) San Francisco and London: W. H. Freeman and Company 1960. XI, 252 p. \$ 3,50.

Deming, Lola S.: *Selected bibliography of statistical literature, 1930 to 1957: III: Limit theorems.* J. Res. nat. Bur. Standards 64 B, 175—192 (1960).

(Part I, II this Zbl. 87, 343). This is the third in a series of bibliographies dealing with various specific subjects in the field of statistics. It follows two earlier ones on "Correlation and regression theory" and "Time series" [J. Res. nat. Bur. Standards 64 B, 55—68, 69—76 (1960)]. References and titles of important contributions concerning limiting distributions have been taken from technical journals published throughout the world since 1930.

Zusammenfassung.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Fabian, Václav: *Measures the values of which are classes of equivalent measurable functions.* Czechosl. math. J. 7 (82), 191—233, russ. Zusammenfassung 233—234 (1957).

Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer σ -Algebra \mathfrak{S} von Teilmengen einer Menge S und \mathcal{A} die Menge aller Äquivalenzklassen fast überall gleicher nicht negativer (nicht notwendig endlicher), bezüglich \mathfrak{S} meßbarer reeller Funktionen. \mathcal{A} besitzt eine Reihe von Grundeigenschaften der im Sinne von Kantorowitsch

regulären bedingt vollständigen Vektorverbände. Aus diesem Grunde gelingt es, den Apparat des äußeren Maßes sowie die Integraldarstellung positiver linearer Funktionale auf den Fall zu übertragen, in dem die Werte der Maße bzw. Funktionale in \mathcal{A} liegen. Es sei μ ein auf einer σ -Algebra \mathfrak{C} von Teilmengen einer Menge C definiertes Maß mit Werten in \mathcal{A} . Das im üblichen Sinne für nicht negative bezüglich \mathfrak{C} meßbare reelle Funktionen f gebildete Integral $\int f d\mu$ wird als schwaches Integral bezeichnet. Es sei nun \mathfrak{B} irgendeine σ -Unteralgebra von \mathfrak{C} . Es wird das Problem gestellt, das schwache Integral auch für gewisse nicht negative Funktionen h zu erklären, deren Werte bezüglich \mathfrak{B} meßbare reelle Funktionen sind. Die Ausdehnung J soll in dem Sinne homogen sein, daß für alle nicht negativen, bezüglich \mathfrak{B} meßbaren Funktionen g die Formel $J(gh) = \bar{g} J(h)$ erfüllt ist. \bar{g} bezeichnet hierin die zu g gehörende Äquivalenzklasse aus \mathcal{A} . Eine solche Ausdehnung J von $\int (\cdot) d\mu$ wird \mathfrak{B} -Integral genannt, wenn außerdem noch eine Reihe von Abgeschlossenheits- und Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind. Es läßt sich leicht zeigen, daß bei vorgegebenem μ höchstens ein \mathfrak{B} -Integral existiert. Ein Maß μ mit Werten in \mathcal{A} heißt stark, wenn das \mathfrak{C} -Integral bezüglich μ existiert. Es wird eine Reihe allgemeiner Bedingungen abgeleitet, unter denen μ stark ist. Jede bedingte Wahrscheinlichkeit führt auf ein starkes Maß, für das der Begriff des schwachen Integrals mit dem des bedingten Erwartungswertes zusammenfällt. Umgekehrt kann jedes starke Maß auf eine bedingte Wahrscheinlichkeit zurückgeführt werden. Am Ende der Arbeit wird die Theorie des \mathfrak{B} -Integrals auf Fragen der Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten angewandt.

K. Matthes.

Sazonov, V.: On characteristic functionals. Teor. Verojatn. Primen. **3**, 201—205, engl. Zusammenfassung 205 (1958) [Russisch].

Let H be a separable Hilbert space with the corresponding orthonormal base $(e_n)_{1 \leq n < \infty}$ and θ the zero element of H . Firstly, it is proved that $\chi(f)$, $f \in H$, is the characteristic functional of a certain distribution P in H and $\int \|x\|^2 dP < \infty$, if and only if the following conditions are fulfilled: (1) $\chi(f)$ is non negative-definite, $\chi(\theta) = 1$; (2) $\chi(f)$ is continuous with respect to the norm;

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF^{(n)}(x) \right) < \infty,$$

where $F^{(n)}(x)$ is the distribution in R^1 having as characteristic function $\varphi_n(t) = \chi(te_n)$. Further, another variant is given by making use of the \mathfrak{F} -topology. Let A be an S -operator, i. e. a linear, symmetric, nonnegative, completely continuous operator with bounded trace; under these conditions, $(Af, f)^{1/2}$, $f \in H$, is a seminorm on H and there exists an unique topology in H , so that addition and scalar multiplication are continuous in H and the system of finite intersections of the sets $\{f \in H : (Af, f)^{1/2} < \lambda\}$, $\lambda > 0$, forms a base of the neighbourhoods of the zero element. This locally convex topology is the so-called \mathfrak{F} -topology. It is shown that $\chi(f)$ is the characteristic functional of a certain distribution in H , if and only if the following conditions are fulfilled: (1) $\chi(f)$ is non negative-definite, $\chi(\theta) = 1$; (2) $\chi(f)$ is continuous at θ with respect to the \mathfrak{F} -topology.

R. Theodorescu.

Zíték, František: Une remarque sur l'intégrale-(BB). Časopis Mat. **84**, 83—88, russ. und französ. Zusammenfassung 88—89 (1959) [Tschechisch].

Es sei K ein halboffenes Intervall, \mathcal{K} das System aller halboffenen Intervalle in K , \mathfrak{X} das System aller Zufallsvariablen auf einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsfeld, f eine Abbildung von \mathcal{K} in \mathfrak{X} . Nach der Terminologie, welche der Verf. in Czechosl. math. J. **8** (83), 583—609 (1958), eingeführt hat, heißt f eine zufällige Intervallfunktion, und sie heißt BB -integrierbar, wenn es für ein beliebiges $I \in \mathcal{K}$ ein $\xi \in \mathfrak{X}$ gibt, so daß die Verteilungsfunktionen der Burkill-Riemannschen Summen von f (in bezug auf I) gegen die Verteilungsfunktion von ξ streben. In der vorliegenden

Arbeit wird unter gewissen Regularitätsbedingungen bewiesen, daß f dann und nur dann BB -integrierbar ist, wenn für jedes $\sigma > 0$ das Burkillsche Integral $\int_{\mathbb{R}} H_{\sigma}(I, x)$ gleichmäßig im Bezug auf x konvergiert. Dabei ist

$$H_{\sigma}(I, x) = [F(I, x) * \Phi(x/\sigma)] - \Phi(x/\sigma),$$

$F(I, x)$ die Verteilungsfunktion von $f(I)$ und Φ die Normalverteilungsfunktion.

M. Jiřina.

Hanš, Otto: Generalized random variables. Trans. 1st Prague Conf. Information Theory, statist. Decision functions, Random Processes, Liblice Nov. 28 to 30, 1956, 61—103 (1957)

Définition de la notion de variable aléatoire sur un espace métrique; variable aléatoire limite. Etude des théorèmes centraux sur un espace de Banach séparable.

R. Feron.

Shannon, Claude E.: Certain results in coding theory for noisy channels. Inform. and Control **1**, 6—25 (1957).

Verf. untersucht einige spezielle Codierungsprobleme für einen diskreten endlichen Kanal ohne Gedächtnis mit endlichen Eingangs- und Ausgangsalphabeten. Es sei u eines der Codewörter der Länge n am Eingang, v ein Codewort der Länge n am Ausgang. Der Kanal ist durch Vorgabe der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(v|u)$ des Übergangs von u nach v festgelegt. Die Codewörter u am Eingang sollen bestimmte Wahrscheinlichkeiten $P(u)$ besitzen. Verf. betrachtet die Information in u über v :

$$I(u, v) = \frac{1}{n} \log \frac{P(u, v)}{P(u) P(v)} = \frac{1}{n} \log \frac{P(v|u)}{\sum_u P(u) P(v|u)}$$

und gibt mit Hilfe der Verteilungsfunktion $\varrho(x)$ dieser Zufallsgröße obere Schranken für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in einem optimalen Code ein. *W. Richter.*

Jacobs, Konrad: Die Übertragung diskreter Informationen durch periodische und fastperiodische Kanäle. Math. Ann. **137**, 125—135 (1959).

Le but de cet article consiste à l'extension de la théorie discrète de l'information, comme elle est présentée par A. Ja. Chinčine dans [Uspechi mat. Nauk **11**, Nr. **1** (67) 17—75 (1956)], au cas des sources d'information et des canaux de communication non plus nécessairement stationnaires, mais périodiques et quasi-périodiques. Comme il est bien connu, les affirmations dans le théorème fondamental de Feinstein (sur la discernabilité d'un canal discret) et, partant dans le théorème de transmissibilité du premier type de Shannon peuvent se démontrer exactement de la même façon toutes les fois que l'ainsi appelée propriété „ E “ est valable pour la source double engendrée par une source d'information ayant la dite propriété et le canal considéré. Cette propriété „ E “ consiste à la convergence en probabilité découlant du théorème limite de McMillan. Partant de cette constatation, l'A. démontre tout d'abord un théorème de McMillan pour les sources quasi-périodiques partant de l'hypothèse de stationnarité et ergodicité pour leurs versions moyennes, en s'appuyant sur le fait de domination (rapport de continuité absolue) des secondes sur les premières. Le débit d'entropie est dans les deux cas le même. Il réduit ainsi le problème à la démonstration de l'ergodicité pour la moyenne de la source double engendrée par une source d'information stationnaire et ergodique et le canal quasi-périodique, en posant des conditions du type de Chinčine (loc. cit.) sur ce dernier. Cependant il est difficile de dire que cette tâche est accomplie dans cet article. On remarquera que le cas périodique se réduit facilement au cas stationnaire. *A. Perez.*

Wolfowitz, J.: Strong converse of the coding theorem for semicontinuous channels. Illinois J. Math. **3**, 477—489 (1959).

For a semicontinuous memoryless channel the following strong converse is proved: let λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, and $\varepsilon > 0$ be arbitrary numbers; for n sufficiently large

there does not exist a code of length $2^{n(C+\epsilon)}$ and probability of error $\leq \lambda$ (here C is the capacity of the channel). R. Theodorescu.

Dubois, Philippe: Introduction à la théorie de l'information. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **60**, 275—292 (1960).

L'A. expose les éléments de la théorie de l'information et traite quelques exemples simples d'application. Zusammenfassung.

Doob, J. L.: La théorie des probabilités et le premier problème des fonctions frontières. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **6**, 289—290 (1957).

Vgl. die in diesem Zbl. **86**, 84—85 besprochene Arbeit. des Verf.

Masani, P. and N. Wiener: On bivariate stationary processes and the factorization of matrix-valued functions. Teor. Verojatn. Primen. **4**, 322—331, russ. Zusammenfassung 331 (1959); Theor. Probab. Appl. **4**, 300—308 (1960).

Let F' be a 2×2 non-negative hermitian matrix-valued function whose entries are in the class L_1 on the circle $C = \{|z| = 1\}$; let $\det F' = 0$ almost everywhere. Then conditions are given under which $F' = \Psi \Psi^*$, where $\Psi \in L_2^+$. Such a factorization represents a spectral criterion for the regularity of a bivariate weakly stationary stochastic process of degenerate rank; this has been already shown by Rozanov [Uspechi mat. Nauk **13**, Nr. 2 (80), 93—142 (1958); this Zbl. **80**, 349]. F. Zitek.

Longo, Antonio: Un criterio di previsione di Wiener nella statistica. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **17**, 7—23 (1958).

Einführendes Referat über bekannte Sätze aus den Büchern von N. Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of stationary time series, New York 1949, dies. Zbl. **36**, 97, und L. J. Doob, Stochastic Processes, New York 1953, dies. Zbl. **53**, 268. K. Jacobs.

Prékopa, András: On secondary processes generated by a random point distribution of Poisson type. Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös, Sect. Mat. **1**, 153—170 (1958).

A sequence of random point pairs $\{(t_n, y_n)\}$ is defined as follows. The sequences $\{t_n\}$ and $\{y_n\}$ are independent, the points $\{t_n\}$ have a Poisson distribution in an abstract space T and $\{y_n\}$ is a sequence of mutually independent, identically distributed random variables taking values in an abstract space Y . The author proves that the point pairs $\{(t_n, y_n)\}$ have a Poisson distribution in the product space $T \times Y$. Two examples are also given. L. Takács.

Matveev, R. F.: On the regularity of multidimensional stationary random processes with discrete time. Doklady Akad. Nauk SSSR **126**, 713—715 (1959) [Russisch].

Let $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ be a stationary process in the n -dimensional space. The author gives necessary and sufficient conditions which imply that $x(t)$ is regular of rank m . In these conditions it is assumed that the spectral functions $F_{ij}(\lambda)$ are absolutely continuous and there are some restrictions for the matrix $(f_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n$ where $f_{ij}(\lambda)$ are the spectral density functions. P. Révész.

Rozanov, Ju. A. (Ju. A.): Interpolation of stationary processes with discrete time. Soviet Math., Doklady **1**, 91—93 (1960), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR **130**, 730—733 (1960).

$x(t)$ bedeute einen im weiteren Sinne stationären Prozeß mit diskreter, nur ganzzahlige Werte annehmender Zeit, dessen Realisierung zu jeder Zeit t außer der endlichen Zahl der Werte $\{t_1, t_2, \dots, t_s\} = T$ bekannt ist. Verf. beschäftigt sich mit der Frage der linearen Interpolation der Größen $x(t)$, $t \in T$ mit Hilfe des bekannten Teiles des Prozesses $x(t)$ und beweist drei Sätze, deren einer wie folgt lautet: Alle unbekannten Werte $x(t)$, $t \in T$ lassen sich dann und nur dann fehlerfrei interpolieren — in dem vom Verf. angegebenen Sinne — wenn die Länge s des Intervalls T die Zahl der Nullen der spektralen Dichte $f(\lambda)$ nicht übertrifft. Die Arbeit stützt sich

auf Resultate von Kolmogorov [Bull. Math. Univ. Moscou 2, Nr. 6, 1—40 (1941)], Jagłom (dies. Zbl. 33, 194) und Verf. von 1957 und 1958 (dies. Zbl. 80, 349).

W. Kryszicki.

Kac, Mark and David Slepian: Large excursions of Gaussian processes. Ann. math. Statistics 30, 1215—1228 (1959).

Im Hinblick auf Arbeiten von Palmer (dies. Zbl. 73, 347) und Rice [Bell System techn. J. 37, 581—635 (1958)] geben die Verff. eine exakte Ableitung der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P\{x(\tau) > a, 0 \leq \tau \leq t \mid \Theta(a) \mid x(0) = a, x'(0) > 0\}.$$

Dabei ist $x(t)$ ein ergodischer Gaußscher Zufallsprozeß mit verschwindendem Mittelwert und auf Eins normierter Dispersion. $\Theta(a)$ ist der Erwartungswert der Intervalllängen, in denen $x(t) \geq a$ ist. Es ist dies eines der bekannten Probleme der Schwellenüberschreitungen zufälliger Prozesse. Es wird abgeleitet, daß die Resultate von Palmer und Rice exakt sind und unter allgemeineren Voraussetzungen als ursprünglich formuliert gelten; es muß nur die erste zeitliche Ableitung des Prozesses existieren, nicht auch die zweite. Im ersten Abschnitt wird gezeigt, daß die oben angegebene Definition für die bedingte Wahrscheinlichkeit mehrdeutig ist, und es werden mehrere Definitionen und Grenzübergänge zu dieser hin untersucht. Im zweiten Abschnitt wird die Approximation von speziellen „Parabeln“ durch den zugrundegelegten stochastischen Prozeß gezeigt, wobei unter Parabel ein quadratischer Ausdruck im Zeitparameter verstanden werden soll. Im letzten Abschnitt wird schließlich die asymptotische Wahrscheinlichkeitsdichte (für große Schwellenwerte a) für die erste Rückkehr zu der Schwelle a abgeleitet, und zwar für positive und negative Schwellenwerte.

E. Henze.

Sankaranarayanan, G.: Some asymptotic properties of Poisson process. Tôhoku math. J., II. Ser. 10, 60—68 (1958).

Soit $\{Y_n; n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité commune: $(\lambda p)^p x^{p-1} e^{-\lambda p x} / \Gamma(p)$ sur la demi-droite réelle $(0, \infty)$; on pose: $U_n = \max_{m < n} Y_m$ et $L_n = \min_{m < n} Y_m$ ($n \geq 0$). En utilisant essentiellement le lemme de Borel-Cantelli et des théorèmes de T. Hida (ce Zbl. 53, 98) l'auteur parvient à montrer les résultats suivants:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{\log n} \geq \frac{1}{\lambda p}; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{1/p} \cdot L_n \leq \frac{\lambda p}{(p!)^{1/p}} \quad \text{p. s.}$$

et dans le cas où $p = 1$:

$$U_n/n (\log n)^{2+\varepsilon} \xrightarrow[\text{p. s.}]{n \rightarrow \infty} 0; \quad (Y_0 + \dots + Y_{n-1}) / (U_n \cdot n^2 (\log n)^{2+\varepsilon}) \xrightarrow[\text{p. s.}]{n \rightarrow \infty} 0 \quad (n \rightarrow \infty, \varepsilon > 0)$$

$$\{n Y_0 + (n-1)(Y_1 + \dots + Y_{n-1})\} / n^2 \rightarrow 1/2\lambda \quad \text{en probabilité.}$$

(Les premiers de ces résultats sont énoncés sous une forme inutilement compliquée). Quant au lien avec les Processus de Poisson, le seul qui apparaisse ici se trouve dans le choix de la loi de probabilité de Y_n , égale à la loi de probabilité de $(1/p)(T_1 + \dots + T_p)$ où les T_i sont des variables indépendantes de densité exponentielle $\lambda e^{-\lambda t}$.

J. Neveu.

Jirina (Iržina), Miloslav: The asymptotic behaviour of branching stochastic processes. Czechosl. math. J. 7 (82), 130—151, engl. Zusammenfassung 151—153 (1957) [Russisch].

Es werden Verzweigungsprozesse (branching processes) mit n Typen von Teilchen betrachtet. $Z_\nu(t)$ bezeichne die Anzahl der Teilchen vom ν -ten Typ zur Zeit t , $P_i^{[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}(t)$ die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(Z_{\nu_1}(t) = \alpha_1, \dots, Z_{\nu_n}(t) = \alpha_n \mid Z_i(0) = 1, Z_j(0) = 0 \text{ für } j \neq i),$$

und $A_{ik}(t)$ den bedingten Erwartungswert $E(Z_k \mid Z_i(0) = 1, Z_j(0) = 0 \text{ für } j \neq i)$. Es wird der Fall untersucht, daß die größte reelle charakteristische Wurzel R der Matrix $(A_{ik}(1))$ kleiner als 1 ist. Im Falle diskreter Zeit wird unter der Voraus-

setzung der Existenz aller zweiten bedingten Momente und der Irreduzibilität und Primitivität von $(A_{ik}(1))$ gezeigt, daß $[1 - P_i^{[0, \dots, 0]}(t)]/R^t$ für $t \rightarrow \infty$ und jedes i einen positiven endlichen Limes K_i besitzt und

$$P_i^{[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}(t)/1 - P_i^{[0, \dots, 0]}(t), ([\alpha_1, \dots, \alpha_n] \neq [0, \dots, 0])$$

gegen eine Verteilung konvergiert. Weiter wird eine Funktionalgleichung für die erzeugenden Funktionen dieser Grenzverteilungen angegeben, und ihre ersten Momente werden bestimmt. Unter entsprechenden Voraussetzungen werden entsprechende Ergebnisse auch für den Fall kontinuierlicher Zeit erzielt. Ein letzter Teil der Arbeit enthält Untersuchungen über die Einstellung eines Gleichgewichtszustandes.

J. Kerstan.

Sevast'janov (Sevastyanov), B. A.: Limit theorems for branching stochastic processes of special form. Teor. Verojatn. Primen. 2, 339—347, engl. Zusammenfassung 348 (1957) [Russisch].

Es wird ein Verzweigungsprozeß betrachtet, für den p_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) dieselbe Bedeutung hat wie in dem Referat über eine Arbeit von Zolotarev (dies. Zbl. 56, 125). Darüber hinaus entstehen für $k = 0, 1, 2, \dots$ mit der Wahrscheinlichkeit $\delta_{k0} + q_k \Delta t + O(\Delta t)$ in einem Zeitintervall der Länge Δt k neue Teilchen unabhängig von der Zahl der schon vorhandenen Teilchen [δ_{k0} ist das Kronecker-Symbol]. Wir übernehmen die Bezeichnung des folgenden Referates, sofern nichts anderes gesagt ist. Es sei für jedes reelle x mit $|x| \leq 1$ $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$, $q'(1) = a$, $q''(1) = a^{(2)}$. Mit v_t bezeichnen wir wieder die Anzahl der Teilchen zur Zeit t und es sei $P_n(t) = W(v_t = n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Es gilt: Für $m < 0$ und $a < \infty$ strebt $P_n(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen einen Limes P_k . Die P_k definieren eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, deren momenterzeugende Funktion für jedes x in $|x| \leq 1$ durch $\exp\left(\int_x^1 \frac{q(y)}{f(y)} dy\right)$ gegeben ist. — Wenn $m = 0$, $m^{(2)} > 0$, $a > 0$ ist und $a^{(2)}$ sowie $f'''(1)$ endlich sind, dann gilt für $t \rightarrow \infty$

$$W\left(\frac{v_t}{at} < y\right) \rightarrow \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{(2a/m^{(2)})^{2a/m^{(2)}}}{\Gamma(2a/m^{(2)})} \int_0^y u^{2a/m^{(2)}-1} e^{-2au/m^{(2)}} du & y \geq 0. \end{cases}$$

Schließlich wird noch für den Fall $m > 0$ gezeigt: Es seien $m^{(2)}$, a , $a^{(2)}$ endlich. Dann strebt $W(v_t/e^{mt} < y)$ gegen eine Grenzverteilung, deren charakteristische

Funktion φ für jedes reelle t durch $\varphi(t) = \exp\left(\frac{1}{m} \int_0^t \frac{q(u(\tau))}{\tau} d\tau\right)$ gegeben ist,

wobei $u(\tau)$ durch $(1 - u(\tau)) \exp\left(-\int_1^{u(\tau)} \frac{f(v) - m(v-1)}{f(v)(v-1)} dv\right) = -i\tau$ definiert ist.

L. Schmetterer.

Zolotarev, V. M.: More exact statements of several theorems in the theory of branching processes. Teor. Verojatn. Primen. 2, 256—265, engl. Zusammenfassung 266 (1957) [Russisch].

Verf. geht wie in seiner früheren Arbeit (dies. Zbl. 56, 125) von einem altersunabhängigen System aus. Wir übernehmen die Bezeichnungen dieses Referates. Es sei $P_n(t) = W(v_t = n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) $S_t(y) = W(v_t < y | v_t > 0)$, $Q(t) = 1 - P_0(t)$. In Verschärfung bekannter Resultate (z. B. Jaglom, dies. Zbl. 41, 456, Sevast'janov, dies. Zbl. 44, 338) wird das asymptotische Verhalten von $S_t(y)/Q(t)$ und $Q(t)$ für $t \rightarrow \infty$ untersucht. Die Fälle $m < 0$, $m = 0$ und $m > 0$ müssen stets gesondert behandelt werden. Resultate: Wenn $m < 0$ ist, ist die

Existenz von $q = -\int_0^1 \frac{mu + f(1-u)}{uf(1-u)} du$ notwendig und hinreichend für $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Q(t)}{K e^{mt}}$

$= 1$ mit $q = \log K$. — Sei $1 < \gamma = 1 + \alpha \leq 2$ und

$$(1) \quad f(1-x) = (\text{const} + o(x)) x^\gamma \exp \left(\int_1^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right) \quad \text{für } x \rightarrow +0.$$

Wenn $m = 0$ ist, gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha f(1-Q(t))}{Q(t)} = 1$. — Im Falle $m > 0$ ist bekanntlich $q < 1$, und es ist in diesem Falle zweckmäßig, $Q_e(t) = q - P_0(t)$ an Stelle von $Q(t)$ zu betrachten. Es gilt dann mit $f'(q) = m_e$ und $f''(q) = n_e$

$$Q_e(t) = K_e e^{m_e t} - \frac{n_e}{2m_e} K_e^2 e^{2m_e t} + O(e^{3m_e t}),$$

wobei

$$K_e = q \exp \left(- \int_0^q \frac{m_e u + f(q-u)}{u f(q-u)} du \right).$$

Bezüglich des Verhaltens von $S_t(y/Q(t))$ erwähnen wir nur den interessantesten Fall $m = 0$. Sei für jedes reelle x $p(x, \alpha, \beta)$ die Dichte einer stabilen Verteilung mit den Parametern α und β . $f(x)$ genüge der Bedingung (1). Dann gilt für die Grenzverteilung $S_\alpha(y)$ von $S_t(y/Q(t))$ für $t \rightarrow \infty$

$$S_\alpha(y) = 1 - \frac{\alpha}{\Gamma(1/\alpha)} \int_0^\infty e^{-(x/u)^\alpha} p(u, \alpha, 1) \frac{du}{u} \quad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

und $= 1 - e^{-y}$ für $\alpha = 1$. — Wir erwähnen noch einen lokalen Satz, der sich auf das Verhalten von $P_n(t)$ bezieht. Sei $m = 0$ und $\int_0^z \frac{du}{f(u)} = \sum_{n=1}^\infty c_n z^n$ [diese Entwicklung gilt stets in $|z| < q$]. Unter der Bedingung (1) gilt $P_n(t) \alpha t / c_n Q(t) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow 0$. Alle Beweise sind verhältnismäßig elementar. L. Schmetterer.

Čistjakov (Čistyakov), V. P.: Local limit theorems for branching processes. Teor. Verojatn. Primen. 2, 360—374, engl. Zusammenfassung 374 (1957) [Russisch].

Wir übernehmen die Bezeichnungen des vorstehenden Referates. Sei $m = 0$. Das zweite faktorielle Moment $f''(1)$ werde mit $m^{(2)}$ bezeichnet. Es mögen das dritte und vierte faktorielle Moment existieren. Dann ist

$$m^{(2)} t P_n(t) / 2Q(t) = e^{-2n/m^{(2)}t} + O(t^{-1/2} \sqrt{\log t}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

wenn $0 < c_1 \leq n/t \leq c_2 < \infty$ für beliebige positive $c_1 \leq c_2$ gilt. Für den interessanten Fall $m > 0$ wird ebenfalls ein lokaler Grenzwertsatz gegeben: Sei $h \geq 1$ der maximale Schritt der Verteilung von v_t . Es gilt: Sei $m > 0$, $m^{(2)} < \infty$. Für jedes reelle y bezeichne $g(y)$ die Dichte der Grenzverteilung von $W(v_t Q(t) e^{mt} < y)$, die unter den gemachten Voraussetzungen stets existiert. Für $0 < c_1 \leq (1-q)e^{-mt} n \leq c_2 < \infty$ ist

$$e^{mt} P_n(t) / ((1-q) Q(t)) = \begin{cases} h g((1-q) e^{-mt} n) + o(1), & n \equiv 1 \pmod{h} \\ 0 & n \not\equiv 1 \pmod{h} \end{cases}$$

L. Schmetterer.

Brockmeyer, E., H. L. Halstrøm and Arne Jensen: The life and works of A. K. Erlang. Acta polytechn. Scand. Nr. 287, Math. comput. Machin. Ser. Nr. 6, 275 p. (1960).

Die Direktoren der Copenhagen Telephone Company würdigen in diesem Gedenkband das Leben und Werk ihres wissenschaftlichen Mitarbeiters A. K. Erlang. Insbesondere legen sie einen Abdruck der Hauptwerke Erlangs vor, die bisher nur in verschiedenen, zum Teil schwer zugänglichen Zeitschriften zu finden waren. Das Buch ist in folgende Abschnitte gegliedert: **Irming, G.:** Preface, p. 7; **Brockmeyer, E. and H. L. Halstrøm:** The life of A. K. Erlang, pp. 9—22; **Jensen, Arne:** An elucidation of A. K. Erlang's statistical works through the theory of stochastic pro-

cesses, pp. 23—100; **Brockmeyer, E.:** A survey of A. K. Erlang's mathematical works, pp. 101—126; **Halström, H. L.:** A survey of A. K. Erlang's electrotechnical works, pp. 127—130; Principal works of A. K. Erlang. 1. The theory of probabilities and telephone conversations, pp. 131—137; 2. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, pp. 138—155; 3. Telephone waiting times, pp. 156—171; 4. The application of the theory of probabilities in telephone administration, pp. 172—200; 5. Some applications of the method of statistics equilibrium in the theory of probabilities, pp. 201—215; 6. On the rational determination of the number of circuits, pp. 216—221; 7. A proof of Maxwell's law, the principal proposition in the kinetic theory of gases, pp. 222—226; 8. How to reduce to a minimum the mean error of tables, pp. 227—232; 9. An elementary treatise of the main points of the theory of telephone cables, pp. 233—252; 10. An elementary theoretical study of the induction coil in a subscriber's telephone apparatus, pp. 253—260; 11. New alternating-current compensation apparatus for telephonic measurements, pp. 261—267. **Brockmeyer, E.:** Tables of Erlang's loss formula, pp. 268—275; List of A. K. Erlang's publications in chronological order, 276—277.

Miller jr., Rupert G.: Priority queues. *Ann. math. Statistics* **31**, 86—103 (1960).

A single-server queueing process is considered. It is supposed that customers of different priorities $1, 2, \dots, K$ arrive at a counter according to a Poisson process of density $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ respectively. Services take place in the order of priority and for each priority in the order of arrival. The service times are independent random variables with distribution function $F_{S_i}(x)$ for an i -customer ($i = 1, 2, \dots, K$).

Let $q_i = \lambda_i \int_0^\infty x dF_{S_i}(x)$. If $\sum_{i=1}^K q_i < 1$ then the queueing process is ergodic.

In the case of a stationary process the author determines the generating function of the joint distribution of the number of different types of customers in the queue for $K = 2$, the Laplace-Stieltjes transform of the distribution function of the waiting time for particular cases and the Laplace-Stieltjes transform of the distribution functions of the length of the busy period.

L. Takács.

Naor, P.: Normal approximation to machine interference with many repairmen. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* **19**, 334—341 (1957).

Die Arbeit bildet die Fortsetzung eines früheren Artikels (vgl. dies. Zbl. **73**, 364) desselben Verf., in dem eine Lösung des Problems der Störung einer von vielen Reparaturmännern bedienten Maschine an Hand einer mit der Poissonschen Verteilungsfunktion eng verwandten sogenannten S -Funktion unternommen wird. Verf. bearbeitet den Fall, in dem die Anzahl der Reparaturmänner r groß ist und der Bedienungsfaktor (das Verhältnis der durchschnittlichen Reparaturzeit zur durchschnittlichen unterbrochenen Arbeitszeit der Maschine) klein ist; hierbei übertreffen die Parameter für die Auswertung der S -Funktionen die größten Parameter in den von Molina zusammengestellten Tafeln. Für solche Fälle leitet der Verf. in seinem Artikel die limitierenden Näherungsausdrücke in Form einer normalen Verteilungsfunktion ab. Die Analyse ist von der Einführung einer künstlich konstruierten Frequenzfunktion $p_r(j)$ abhängig, deren erste zwei Momente und Wahrscheinlichkeitssinn im Nachtrag wiedergegeben werden. Die Faltung dieser Funktion mit der Poissonschen Frequenzfunktion führt zur Verteilungsfunktion $U(i, r, \zeta)$, welche in einfacher Beziehung mit der früher verwendeten S -Funktion steht. Nach einer Interpretation der Bedeutung von $U(i, r, \zeta)$ mit Hilfe des zentralen Grenzwerttheorems wird vom Verf. eine normale Approximation abgeleitet, welche ermöglicht, die Indexziffern für die Leistung des Systems Reparaturmänner-Maschine auszudrücken. Die numerischen Beispiele beweisen eine enge Übereinstimmung

zwischen den Ergebnissen der exakten und der angenäherten Lösung. Im weiteren werden einige Einschränkungen zur Anwendung der Ergebnisse besprochen.

A. H. Žaludova.

Chas'minskij (Khas'minskii), R. Z.: On positive solutions of the equation $\mathfrak{A}u + V \cdot u = 0$. Teor. Verojatn. Primen. 4, 332—341, engl. Zusammenfassung 341 (1959) [Russisch]; engl. Übersetzung Theor. Probab. Appl. 4, 309—318 (1960).

Let X_t be a continuous Markov process in the domain D in a metric space, let Γ be the boundary of D , let τ be the moment of reaching Γ . Let \mathfrak{A} be the extended infinitesimal operator of the process (in the sense of Dynkin) and V a continuous non-negative function on D . Γ is said regular if $\lim_{x \rightarrow x_0} P\{X_\tau \in U_{x_0}\} = 1$ for every neighbourhood U_{x_0} of any $x_0 \in \Gamma$. Then the main theorem is the following one: If Γ is regular and X_t is a strong Feller process, then the equation quoted in the title has a

non-negative continuous solution in $D \cup \Gamma$ if, and only if, $E_x \exp \left\{ \int_0^\tau V(X_t) dt \right\} < \infty$.

The theorem is then applied for obtaining sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the first boundary problem of the equation.

F. Zitek.

Darwin, J. H.: Note on the comparison of several realizations of a Markoff chain. Biometrika 46, 412—419 (1959).

Let $\{X_n\}$ be a Markov chain with s states, its transition probabilities being denoted by p_{jk} ; let P_j denote the final probabilities $P_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j\}$, assumed to exist for all $j = 1, 2, \dots, s$. Then there are given tests for the equality of r sets of: (a) transition probabilities p_{jk} ; (b) transition probabilities p_{jj} separated from the test of the equality of r sets of $p_{jk}/(1 - p_{jj})$, $j \neq k$; (c) final probabilities P_j . A numerical example is given.

F. Zitek.

Gilbert, Edgar J.: On the identifiability problem for functions of finite Markov chains. Ann. math. Statistics 30, 688—697 (1959).

Let $\{X_n\}$ be a stationary irreducible aperiodic Markov chain with N states, let f be a function from $\{1, 2, \dots, N\}$ onto $\{0, 1, \dots, D-1\}$, $D \leq N$. Then the author studies processes $\{Y_n\}$, $Y_n = f(X_n)$, called functions of a finite Markov chain. If s and t are sequences of states of $\{Y_n\}$, and ε a state of $\{Y_n\}$, then $s \varepsilon t$ denotes a sequence formed by states of s followed by ε followed by states of t ; $p(s \varepsilon t)$ is the probability of such a composed sequence. For every Y -state ε let $n(\varepsilon)$ be the largest integer n such that there exist n finite sequences s_j, t_j , $1 \leq j \leq n$, such that the matrix $|p(s_i \varepsilon t_j): 1 \leq i, j \leq n|$ is nonsingular. Then it is proved that $\sum n(\varepsilon) \leq N$ (lemma 1), and that the entire distribution of $\{Y_n\}$ is determined by the set of functions $p(s)$, the length of s being $\leq 2(N - D + 1)$ (theorem 1). If $\sum n(\varepsilon) = N$ then $\{Y_n\}$ is said to be a regular function of $\{X_n\}$. Special expressions for the transition probability matrix of $\{X_n\}$ in the case of a regular function $\{Y_n\}$ are given. The results obtained and the methods used here are extensions of those of Blackwell and Koopmans (cf. this Zbl. 80, 349).

F. Zitek.

Meyer, André: Fonctions de transition subordonnées. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 1962—1964 (1960).

Soit $\{P_t(x, A), t \geq 0\}$ un semi-groupe de fonctions de transition markoviennes défini sur un espace compact métrisable X , tel que pour $f \in C(X)$, l'application $t \mapsto P_t f$ soit une application continue de $[0, \infty)$ dans $C(X)$ [$P_0 f = f$]. L'A. montre alors essentiellement que la formule: $Q_t(x, f) = E[L_t \cdot f(X_t) | X_0 = x]$ où f est une fonction mesurable bornée sur X et où $t \geq 0$, établit une correspondance entre, d'une part les fonctionnelles $\{L_t, t \geq 0\}$ multiplicatives, continues à droite, décroissantes, à valeurs dans $[0, 1]$, d'autre part les semi-groupes de fonctions de transition sous-markoviennes $\{Q_t, t \geq 0\}$, continus à droite sur $C(X)$ et subordon-

nés (= majorés par) $\{P_t, t \geq 0\}$. De plus, les fonctions aléatoires sous-markoviennes de fonctions de transition Q peuvent être construites comme des restrictions temporelles $\{X_t, 0 \leq t < R\}$ des fonctions aléatoires markoviennes $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ attachées au processus P ; enfin une condition de régularité supplémentaire (peu restrictive) sur Q , permet d'affirmer que $\{x: P(R > 0 | X_0 = x) = 1\} = \{x: P(R > 0 | X_0 = x) > 0\}$ est presque borélien et presque ouvert au sens de Hunt. Des résultats analogues ont été considérés par E. B. Dynkin dans sa monographie sur les processus de Markov (Moskou 1959). *J. Neveu.*

Deutsch, Ralph: On the distribution of nonlinear circuit transformations of a Markov process. Proc. Sympos. nonlinear Circuit Analysis Vol. 6, 243—253 (1957).

General discussion (from the point of view of electrical engineering, without mathematical details) of the problem of getting statistical properties of

$$m(t) = \int_{-\infty}^t K(t-\tau) V[x(\tau)] d\tau$$

where $x(t)$ is a Markov process (of a special type), $V(x)$ a piecewise quadratic function and K the weighting function. *F. Zitek.*

Watanabe, Takeri: Some general properties of Markov processes. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 10, 9—29 (1959).

L'A. étudie les processus de Markov sur un espace localement compact séparable en suivant les idées de Feller sur les ensembles de séjour (ce Zbl. 25, 347; 71, 349) et en les combinant avec les idées de Doob sur la mesure de Green [Feller, Theory of probability and its applications (1957, ce Zbl. 77, 122), p. 3 à 33]. *R. Feron.*

Bartlett, M. S.: Some problems associated with random velocity. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 6, 261—270 (1957).

Verf. betrachtet vektorielle Markoffsche Prozesse $X(t)$ mit kontinuierlicher Zeit, die als Modelle für Diffusionsvorgänge dienen können. Die Arbeit zerfällt in drei Teile. 1. Stellt $X(t)$ die Lage und Geschwindigkeit eines Teilchens dar, so sind Differentialgleichungen für die charakteristische Funktion $C(\cdot, t)$ von $X(t)$ wohlbekannt. Man interessiert sich für Aussagen über die Gestalt dieser Differentialgleichungen, falls man spezielle Annahmen über die Inkremente ΔX macht. Goldstein hatte durch Approximation aus diskreten Prozessen folgendes Ergebnis hergeleitet: Die Differentialgleichungen sind vom hyperbolischen Typus, falls die ΔX normal und die Geschwindigkeits-Inkremente unabhängig von der Lage sind. Verf. zeigt, daß dies nur stimmen kann, wenn es lediglich zwei mögliche Geschwindigkeiten v und $-v$ gibt. 2. Angenommen, man kennt die Übergangsdichten für den Fall der Diffusion ohne Grenzen; gesucht sind die Übergangsdichten bei adsorbierenden bzw. reflektierenden Grenzen. Verf. gibt für diese Dichten bzw. ihre Laplace-Transformierten Integralgleichungen an, in denen die Zeit des ersten Auftreffens auf die Grenze eine Hauptrolle spielt. 3. Lighthill und Whitham haben in Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 229, 317—345 (1955; dies. Zbl. 64, 209) ein Modell für den Verkehrsfluß auf einer Einbahnstraße aufgestellt, das im wesentlichen im Raum-Zeit-Kontinuum und mit infinitesimalen Häufigkeiten an Stelle von Wahrscheinlichkeiten arbeitet. Verf. verfeinert dies Modell um gewisse infinitesimale Häufigkeiten im Phasenraum der Orte und Geschwindigkeiten und diskutiert das Problem, diese Häufigkeiten durch finite Beobachtungen zu schätzen. *K. Jacobs.*

Maruyama, Gisirô and Hiroshi Tanaka: Some properties of one-dimensional diffusion processes. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 11, 117—141 (1957).

Sei $X^{(x)}(t, \omega)$ ein stationärer Markoff-Prozeß mit stetigen, vom Punkt x des Zustandsintervalls $S = (a, b)$ auslaufenden Bahnkurven, der die starke Markoff-Eigenschaft hat (vgl. z. B. Loève: Probability Theory, Princeton 1960, S. 581). Ist etwa $x < y$, so heißt die Zufallsveränderliche $\tau_y^{(x)}(\omega) = \inf(t: X^{(x)}(t, \omega) \in$

$S \setminus [a, y[)$ die erste Übergangszeit (first passage time). Verff. beweisen u. a.: 1. Ist für ein Paar x, y mit $x \neq y$ $E(\tau_y^{(x)}) < \infty$ und $E(\tau_x^{(y)}) < \infty$, so strebt die zu $X^{(x)}$ gehörige Übergangswahrscheinlichkeit $P(t, x, E)$ ($E \in \mathfrak{B}_S$) für $t \rightarrow \infty$ gegen ein stationäres $Q(E)$, das von x und y unabhängig ist. 2. Ist (etwa) $E(\tau_y^{(x)}) = \infty$, der Prozeß jedoch rekurrent ($P(\tau_y^{(x)} < \infty) + P(\tau_x^{(y)} < \infty) = 2$ für $x \neq y$), so existiert auf \mathfrak{B}_S ein endliches, invariantes Maß $\mu(x, y, E)$ ($\int_S \mu(x, y, dz) P(t, z, E) = \mu(x, y, E) < \infty$), für das $\mu(x, y, E_1)/\mu(x, y, E_2)$ von x und y unabhängig ist. Die für 1. und 2. herangezogenen Beweismethoden schließen sich an K. L. Chung (dies. Zbl. 58, 346) an. 3. μ ist (für rekurrente Prozesse) bis auf eine multiplikative Konstante festgelegt. Der Beweis benutzt den Hopfschen Ergodensatz. Weiterhin wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß das Fellersche kanonische Maß des eingangs beschriebenen Prozesses ein solches invariantes Maß ist.

D. Suschowk.

Watanabe, Hisao and Minoru Motoo: Ergodic property of recurrent diffusion processes. J. math. Soc. Japan 10, 272—286 (1958).

Verff. beweisen im wesentlichen die in der vorstehend referierten Arbeit genannten Ergebnisse mit anderen Methoden. Sie konstruieren für rekurrente, wie oben beschaffene Prozesse (ebenfalls unter Benutzung der ersten Übergangszeiten) ein Maß auf \mathfrak{B}_S , das mit dem Fellerschen kanonischen Maß m übereinstimmt. Die Formulierung der Verff. ist: 1. Für m -meßbare f, g und $t \rightarrow \infty$ ist mit Wahrscheinlichkeit eins

$$\int_0^t f(X^{(x)}(t, \omega)) dt \Bigg| \int_0^t g(X^{(x)}(t, \omega)) dt \rightarrow \int_a^b f(x) dm(x) \Bigg| \int_a^b g(x) dm(x)$$

(diese Fassung mit μ an Stelle von m steht auch bei Maruyama und Tanaka).

2. Falls $\int_a^b dm < \infty$, ist für $t \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{t} \int_a^t f(X^{(x)}(t, \omega)) dt \rightarrow \frac{1}{m([a, b])} \int_a^b f(x) dm(x). \quad D. Suschowk.$$

Snell, J. Laurie: Finite Markov chains and their applications. Amer. math. Monthly 66, 99—104 (1959).

Vorschau auf den Inhalt der Buchveröffentlichung: John G. Kemeny, J. Laurie Snell, Finite Markov chains, dies. Zbl. 89, 137).

G. Schulz.

Gabriel, K. R.: The distribution of the number of successes in a sequence of dependent trials. Biometrika 46, 454—460 (1959).

Let $\{X_n\}$ be an irreducible Markov chain with two ergodic states 0 and 1. Then one investigates the exact distribution and expressions for cumulants of the number S of "successes" $X_k = 1$ in n trials. A numerical example concerning meteorological data is also given.

F. Zitek.

Shapiro, Harold N.: Extensions of the Khinchine-Wisser theorem. Commun. pure appl. Math. 13, 15—34 (1960).

Verf. verallgemeinert einen schon von Wisser verallgemeinerten Satz von Chincin, der die Wahrscheinlichkeit von Paaren von Ereignissen einer stationären Folge betrifft. Die erste Verallgemeinerung hat folgenden Inhalt: Sei $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ eine Folge von meßbaren Ereignissen, für welche $\lim P(A_n) > 0$ und $0 < \varepsilon < 1$. Dann existiert eine $(1 - \varepsilon)$ -vollkommen verbundene Unterfolge $B_1, B_2, \dots, B_m, \dots$ für welche $P_{B_{m-k}}(B_{m-1}) \geq (1 - \varepsilon) P(B_{n+j})$, wie auch immer $m, j > 0$, $0 \leq k < m$ gewählt sind. Ein weiterer interessanter Satz stellt fest, daß unter denselben Bedingungen wie oben eine unendliche Unterfolge $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ existiert, für welche $P\left(\bigcap_{i=1}^k C_i\right) \geq (1 - \varepsilon) \prod_{i=1}^k P(C_i)$ für beliebiges k . Der letzte Satz, den wir

hier seiner Einfachheit und Allgemeinheit wegen anführen, besagt, daß, immer unter denselben Bedingungen wie oben, wenn man an Stelle von ε eine Funktion $\Phi(u)$ setzt, welche gegen Null konvergiert für $k \rightarrow \infty$, es eine Unterfolge D_1, D_2, \dots gibt, für welche $P\left(\bigcap_{i=1}^k D_i\right) \geq \prod_{i=2}^k (1 - \Phi(i)) P(D_i)$. *O. Onicescu.*

Medgyessy, Pál: Partial differential equations for stable density functions and their applications. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1, 489—514, russ. und engl. Zusammenfassung. 515—518 (1957) [Ungarisch].

The paper deals with several methods of the decomposition of mixtures of certain stable density functions. The methods discussed are generalizations of those published in previous papers of the author (this Zbl. 68, 128, 129). The main problem of these papers is the following: if $\psi(x) = \sum_{k=1}^N p_k f(x, c_k)$ is a mixture of stable density functions

$$[f(x, c_k) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ixt} \exp \{i \gamma_k t - c_k |t|^\alpha [1 + i \beta \operatorname{sgn} t \omega(t, \alpha)]\} dt$$

where $0 < \alpha \leq 2$, $|\beta| \leq 1$, $c_k > 0$, $p_k > 0$, γ_k are real constants, $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg}(\frac{1}{2} \pi \alpha)$, if $\alpha \neq 1$, $\omega(t, 1) = 2 \pi^{-1} \log |t|$, how can the function

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{k=1}^N p_k f(x, c_k - \lambda) \quad 0 \leq \lambda \leq \left(\inf_{1 \leq k \leq N} c_k \right)$$

be determined with the aid of $\psi(x)$. This decomposition-problem can be solved in many cases by applying the following theorem: If α is rational ($\alpha = m/n$, $(m, n) = 1$) and $\beta = 0$ if $\alpha = 1$, the stable density function $f(x, c)$ satisfies a linear partial differential equation of type

$$k_1 \frac{\partial^{b_1+a_1} f}{\partial c^{b_1} \partial x^{a_1}} + k_2 \frac{\partial^{b_2+a_2} f}{\partial c^{b_2} \partial x^{a_2}} + k_3 \frac{\partial^{b_3+a_3} f}{\partial c^{b_3} \partial x^{a_3}} = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

where the integer-valued positive constants a_i, b_i are to be determined from the conditions $\alpha b_1 + a_1 = \alpha b_2 + a_2 = \alpha b_3 + a_3$ and

$\sin[\frac{1}{2} \pi (a_2 - a_3) - (b_2 - b_3)] \operatorname{tg} B \neq 0$, $B = \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi$ if $\alpha \neq 1$, $B = 0$ if $\alpha = 1$, and the constants k_i are certain functions of the constants a_i, b_i, B . In certain cases the differential equation may be simplified. — The author determines with the aid of these differential equations the function $\Phi(x, \lambda)$ for several cases of practical importance (related to stable density functions of Gauss, Cauchy and Pearson's V-type) in form of power series and estimates the remainder terms of these series.

G. Adler.

Fenyő, István: Eine Bemerkung zur Arbeit von L. Jánossy: On the generalisation of the Laplace-transform in probability theory. Mat. Lapok 10, 66—70, russ. und deutsche Zusammenfassung 70—71 (1959) [Ungarisch].

Es sei V die Klasse derjenigen Funktionen von zwei Veränderlichen, für welche die Operation $u_* v = \int_x^y u(x, t) v(t, y) dt$ kommutativ ist. Es existiert dann eine eindeutig umkehrbare Ähnlichkeitstransformation T , welche die Funktionen von V in die in $[0, \infty)$ definierten Funktionen überführt. Folgende Transformation wird betrachtet: $L(u) = \mathfrak{L}[T^{-1}(u)]$. \mathfrak{L} ist das Zeichen der Laplace-Transformation, T^{-1} die Inverse von T . Die Transformation zeigt eine große Ähnlichkeit zur Laplace-Transformation, z. B. $L(u_* v) = L(u) L(v)$. (Vgl. auch L. Jánossy, dies. Zbl. 44, 335.) Zusammenfassung des Autors.

Ford, F. A. J.: A note on the paper of Miller, Bernstein and Blumenson. Quart. appl. Math. 17, 446 (1960).

Verf. zeigt, daß die von Miller, Bernstein, Blumenson (dies. Zbl. 82, 345) verallgemeinerte Rayleigh-Verteilung von der Form $\Phi^{n/2} A^{-n} p_n(R \Phi^{-1}, A \Phi^{-1})$

vereinfacht werden kann, wobei $p_n(x, y) = \int_0^x 2u^{n+1} \exp[-(u^2 + y^2)] I_n(2uy) du = y^n p_0(x, y) - \exp[-(x^2 + y^2)] \sum_{s=1}^n x^s y^{n-s} I_s(2xy)$. Da $p_0(a, y)$ eine tabulierte Funktion ist, und I_n Bessel-Funktionen oder modifizierte Bessel-Funktionen sind, ist dadurch das praktische Ziel dieser Arbeit vollkommen erreicht. *O. Onicescu.*

Daboni, Luciano: Una proprietà delle distribuzioni poissoniane. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14, 318—320 (1959).

In a Bernoulli scheme let be N the random number of trials. The number N_A of successes and the number $N_B = N - N_A$ of failures are independent if and only if N has a Poisson distribution. Zusammenfassung des Autors.

Kemperman, J. H. B.: Some exact formulae for the Kolmogorov-Smirnov distributions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A. 60, 535—540 (1957).

Méric, Jean: Sur un problème de marche au hasard dans le plan. Distribution du nombre de pas. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 3111—3113 (1959).

Es wird eine Methode zur Bestimmung der momenterzeugenden Funktion der Schrittzahl einer Irrfahrt gegeben, wenn, vom Nullpunkt ausgehend, jeweils ein Schritt von der Größe λ mit Wahrscheinlichkeit p parallel zur x -Achse, mit Wahrscheinlichkeit q parallel zur y -Achse erfolgt, so lange bis eine der Grenzen $(L_1) ay - bx = f_1(x)$ und $(L_2) ay - bx = f_2(x)$ (wobei f_1 und f_2 periodische Funktionen von der Periode a sind) übertreten wird. Für zwei einfache Beispiele werden die Berechnungen durchgeführt. *E. Vas.*

Statistik:

● **Deltheil, R. et R. Huron:** Statistique mathématique. (Collection Armand Colin. No. 336). Paris: Librairie Armand 1959. 208 p.

This small book is a sequel to another book, in the same series, by E. Borel and the same authors, with the title "Probabilité-Erreurs", Paris 1954. It is therefore written at a fairly high level, presupposing a good knowledge of basic probability theory. There are only five chapters — these will now be described individually. Chapter 1 (Fundamental distribution laws: common statistical tests). Characteristic functions and moment-generating functions are used freely. A simple form of central limit theorem is proved, and the standard t , χ^2 and F distributions are derived. The use of these distributions in standard test procedures is explained. Chapter 2 (The multivariate Normal law). This chapter contains a rather formal development of properties of random variables x_1, x_2, \dots, x_q with the joint probability density function

$$p(x_1, x_2, \dots, x_q) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}q} |A|^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \mu)' A (x - \mu) \right].$$

Chapter 3 (General properties of estimators obtained by the method of least squares: application to the study of linear regressions). Matrix theory is used to obtain the properties of estimators of coefficients in linear regression equations derived by the method of least squares. The Wishart (multivariate χ^2) distribution is obtained by an analytical method. Chapter 4 (The analysis of the results of planned experiments). The standard, parametric model, analyses are developed for simple classifications, cross-classifications, Latin Squares and similar designs. Chapter 5 (Problems of classification). A brief (13 page) chapter on elementary discriminant analysis. (The misprint, $a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2 + \dots + a_n\sigma_n^2$, for $a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2$ (on page 17) may cause some confusion). There are a number of worked examples in the text but no exercises to be worked by the student. There is a small bibliography.

N. L. Johnson.

● **Brownlee, K. A.:** Statistical theory and methodology in science and engineering. (A Wiley Publication in Applied Statistics). New York-London: John Wiley & Sons, Inc. 1960. XV, 570 p. \$ 16,75.

Dies ist ein Lehrbuch der statistischen Methoden, zu dessen Studium nur sehr elementare mathematische Kenntnisse erforderlich sind. Wie der Titel andeutet, soll es dem Leser eine gewisse Sicherheit bei der Anwendung statistischer Methoden geben. Das Hauptziel des Verf. ist es jedoch dabei, ein Verständnis der theoretischen Grundlagen einer jeden Methode zu vermitteln. Er beschränkt sich daher nicht darauf, nur „Rezepte“ aufzustellen — wie es bei mathematisch so anspruchsvollen Büchern oft geschieht — sondern versteht es gut, dem Leser Einsicht in die Wirksamkeit der verschiedenen Methoden zu vermitteln. Geschickt ausgewählte Spezialfälle dienen ihm vielfach zur Einführung wichtiger Begriffe und Verfahrensweisen. Das Schwergewicht der Darstellung liegt auf den diskreten Verteilungen, der Varianzanalyse und Regression, aber auch nichtparametrische Tests und Planung von Experimenten werden behandelt. Jedem Kapitel sind Aufgaben und Literaturhinweise beigelegt. Eine Reihe von ausführlichen Tafeln beschließen das Buch.

H.-J. Roßberg.

• **Menges, Günter:** Stichproben aus endlichen Gesamtheiten. Theorie und Technik. Ein Beitrag der Methodenlehre der Statistik. (Frankfurter wissenschaftl. Beiträge. Rechts- und wirtschaftswissenschaftl. Reihe. Bd. 17.) Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann 1959. 179 S.

This is a book on the fundamentals of the theory of sample surveys; it is concerned rather with the so to say philosophical background of the use of sampling techniques in social and economic statistics than with the mathematical and technical details of procedure. The first part, comprising about one half of the book, i. e. about 80 pages, is entitled "Theory"; it is concerned with the fundamentals of sampling theory, confidence statements, decision theory and the various ways of looking at sampling techniques problems. The second part is entitled "Techniques"; it brings fundamental formulas for variances of estimates, and describes various methods of selecting a sample.

J. Machek.

• **Dlin, A. M.:** Die Mathematische Statistik in der Technik. [Matematičeskaja statistika v tehnike.] 3. umgearb. Aufl., Moskau: Staatsverlag „Sowjetische Wissenschaft“ 1958. 468 S. R. 9,10 [Russisch].

Dies ist die dritte gründlich umgearbeitete und erweiterte Auflage eines bekannten Buches (zweite Auflage, Moskau 1951). Das Buch bringt nicht die Theorie der mathematischen Statistik, sondern die Methoden zur Auswertung von Experimentaldaten, besonders aus der industriellen Produktion, ferner spezielle statistische Methoden für die Industrie, wie z. B. statistische Qualitätskontrolle. Der Inhalt und die Anordnung des Materials ist aus folgender Übersicht der Kapitel zu erkennen: 1. Einführung — Was ist mathematische Statistik und wozu dient sie. 2. Mittelwerte und Streuungen. 3. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 4. Verteilungsfunktionen (hier werden wichtige Typen von Verteilungen beschrieben und Kriterien zum Vergleich von empirischen Verteilungen mit den theoretischen angegeben). 5. Statistische Methoden zur Auswertung von Experimentaldaten (im wesentlichen Schätzungen, Konfidenzintervalle für die Parameter einer Normalverteilung, Regressionsanalyse). 6. Faktorielle Anordnung von Versuchen (kurz behandelt). 7. Varianzanalyse. 8. Korrelationsrechnung. 9. Stichprobenerhebungen. 10. Analyse der Produktionsfehler und der Präzision der Produktion. 11. Statistische Kontrolle von technologischen Prozessen (Kontrollkarten, Annahmekontrolle). 12. Technische und ökonomische Analyse der Kontrollkarten. Das Buch ist mit 18 Tabellen zu den statistischen Berechnungen ausgestattet. Bei der Erklärung überwiegt meistens der Gesichtspunkt eines Technikers gegenüber dem eines Statistikers, so daß einige statistische Begriffe (z. B. einige Test-Verfahren) etwas zu kurz behandelt werden und statt völliger Erörterung eine Gebrauchsanweisung geboten wird. Nicht gewöhnlich ist auch die Benutzung der Verteilungsfunktion der Variationsbreite von Stichproben aus einer normal verteilten Gesamtheit zum Ausgleich von statistischen

Kollektiven. Es gibt zahlreiche Beispiele im Buche, die aus der industriellen Praxis entnommen sind und im Buche völlig im Detail gelöst werden. *J. Machek.*

Pleszczyńska, E.: Screening in statistical testing for correlated characteristics. *Zastosowania Mat.* 5, 47—58, russ. und engl. Zusammenfassung 59 (1960) [Polnisch].

Es werden zwei Stichprobenpläne der Annahmekontrolle für Lieferungen von Artikeln mit zwei qualitativen Merkmalen X und Y konstruiert. Es wird vorausgesetzt, daß die Merkmale X , Y eine Normalverteilung mit bekannten Streuungen σ_x^2 , σ_y^2 und bekanntem Korrelationskoeffizienten ρ besitzen und weiter, daß X leicht und dagegen Y schwierig den Messungen zugänglich ist. Für die Qualität des Artikels sei nur das Merkmal Y entscheidend, d. h. der Artikel ist gut, wenn $Y < y_2$, und schlecht, wenn $Y > y_2$. Während der Annahmekontrolle vom Umfang N werden n Stücke bezüglich beider Merkmale X , Y und alle N Stücke bezüglich X gemessen und die entsprechenden arithmetischen Mittel \bar{x}_n , \bar{y}_n , \bar{x}_N und

$$\bar{Y} = \bar{y}_n - \rho(\sigma_x/\sigma_y)(\bar{x}_n - \bar{x}_N)$$

berechnet. Dabei wird \bar{x}_N als eine Konstante [gleich dem wirklichen Mittelwert $E(x)$] behandelt. Folgender Stichprobenplan wird betrachtet [für $\rho < 0$]: Es seien n , y_0 , ξ_0 gegeben. Wenn $\bar{Y} < y_0$, wird die ganze Lieferung abgelehnt; wenn $\bar{Y} < y_0$, werden alle Stücke mit $X < \xi_0$ abgelehnt und der Rest als gut angenommen. Für gegebene Werte ξ_0 , w_i , Q_i ($i = 1, 2$) werden die Konstanten n , y_0 so berechnet, daß eine Lieferung mit Wahrscheinlichkeit Q_i abgelehnt wird, wenn sie nach Weglassung der Stücke mit $X < \xi_0$ die Qualität w_i hat, d. h. wenn für sie

$$P(X > \xi_0, Y > y_0)/P(X > \xi_0) = w_i.$$

Der andere Stichprobenplan wird folgendermaßen definiert: wenn $\bar{Y} < y_0$, wird die ganze Lieferung angenommen; wenn $y_{i-1} < \bar{Y} < y_i$, werden alle Stücke mit $X < \xi_i$ abgelehnt ($i = 1, 2$); wenn $\bar{Y} > y_2$, wird die ganze Lieferung abgelehnt.

M. Jiřina.

Barnard, G. A.: Control charts and stochastic processes. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 21, 239—257, discussion 257—271 (1959).

In this paper the author discusses a new approach to control charts for industrial processes. With this approach the control chart is regarded as an estimating device for the estimation of the parameters of the process (and not as a series of independent significance tests as in the traditional practice). The author suggests a special model for the process, consisting of a Poisson process of "jumps" occurring at the rate λ per unit time, each "jump" shifting the process mean by an amount δ which is normally distributed about zero with variance σ^2 . The problem of estimating process mean at any given time from the chart is discussed, optimum estimator derived and a graphical approximation to it indicated. The problem of estimating λ and σ^2 from past records is discussed next.

J. Machek.

Wetherill, G. B.: The most economical sequential sampling scheme for inspection by variables. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 21, 400—408 (1959).

The following quality inspection situation is considered: Batches of items are submitted for inspection and each batch must be accepted or rejected. On inspection of an item a variable X is observed possessing continuous distribution with density $\varphi(x/\theta)$, where θ is a parameter that characterizes the quality of the batch. It is assumed that θ varies from batch to batch according to a two-point prior distribution, i. e. it assumes a value θ_i with probability u_i , $i = 1, 2$, $u_1 + u_2 = 1$. A likelihood ratio sequential test procedure is devised in which the boundaries are determined so as to make the expected cost involved in immediate decision equal to the expected cost of continuing the sampling. An example is worked out in which the quality

characteristic is distributed normally. An application to determining optimal sampling plans for group sequential sampling for attributes is given. *J. Machek.*

Pérez, Albert: Transformation ou p -algèbre suffisante et minimum de la probabilité d'erreur. Czechosl. math. J. 7 (82), 115—122, russ. Zusammenfassung 122—123 (1957).

Verf. betrachtet folgendes statistische Entscheidungsproblem: In einem Wahrscheinlichkeitsraum, welcher als Stichprobenraum interpretiert werden kann, ist eine endliche Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen fest gegeben. Diese endlich vielen Wahrscheinlichkeitsmaße haben ebenfalls fest gegebene apriorische Wahrscheinlichkeiten. Es wird weiter vorausgesetzt, daß der Raum der Entscheidungen mit der oben erwähnten endlichen Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße identisch ist. Auf Grund der Stichprobe ist das im Stichprobenraum wirkende Wahrscheinlichkeitsmaß abzuschätzen. Dies entspricht der Definition einer Entscheidungsfunktion, die jedem Punkte des Stichprobenraumes genau eine Entscheidung (d. h. das entsprechende Wahrscheinlichkeitsmaß) zuordnet. Jeder so definierten Entscheidungsfunktion entspricht eine meßbare Zerlegung des Stichprobenraumes und umgekehrt. Es werden im wesentlichen folgende Ergebnisse angegeben und bewiesen: 1. Es gibt eine Entscheidungsfunktion (Zerlegung) im Stichprobenraum, die die Fehlerwahrscheinlichkeit minimalisiert. Diese Zerlegung, die im allgemeinen nicht eindeutig ist, ist in der Arbeit explizit angegeben. 2. Die Struktur des Stichprobenraumes ist im wesentlichen durch die Sigma-Algebra dieses Raumes bestimmt. Einer größeren Sigma-Algebra entspricht eine feinere Struktur des Stichprobenraumes. Die Feinheit der Struktur des Stichprobenraumes ist ein abstrakter Ersatz für den in der klassischen Statistik vorkommenden einfachen Begriff des Stichprobenumfanges. Es sei nun eine nicht-abnehmende Folge von Sigma-Algebren, die in der Sigma-Algebra des Stichprobenraumes enthalten sind, fest gegeben. Den einzelnen Gliedern dieser Folge entsprechen Entscheidungsfunktionen, die die Fehlerwahrscheinlichkeiten minimalisieren. Die Folge der auf diese Weise erhaltenen kleinsten Fehlerwahrscheinlichkeiten ist nicht-zunehmend und demzufolge konvergent. Ihr Grenzwert ist aber im allgemeinen größer als die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit, die der ursprünglichen Sigma-Algebra des Stichprobenraumes entspricht. Die beiden Zahlenwerte sind dann und nur dann gleich, wenn die durch die Folge der Sigma-Algebren erzeugte kleinste Sigma-Algebra in bezug auf die Menge der im Stichprobenraum definierten Wahrscheinlichkeitsmaße suffizient (erschöpfend) ist. Die in der Arbeit ausführlich durchgeführten Beweise beruhen auf dem Satz von Radon-Nikodym, auf einigen Martingalsätzen und auf den Eigenschaften von suffizienten (erschöpfenden) Transformationen bzw. Sigma-Algebren.

A. Špaček.

Roy, J.: On the efficiency factor of block designs. Sankhyā 19, 181—188 (1958).

Suppose that v treatments are to be compared in a trial using n experimental units arranged in b blocks. As a criterion for judging the relative merits of various possible designs for such an experiment the so called efficiency factor has been generally adopted. This factor is the ratio of the average variance of the intra-block estimate of the difference between the effects of any two treatments for a randomized block design, to the same variance for the design under consideration. The design that brings this ratio to its maximum is called most efficient. It is shown that (1) among all proper binary designs a most efficient (if it exists) is a balanced incomplete block design, and (2) in a most efficient design the difference between the effects of any two treatments is estimated with the same precision.

J. Machek.

Jones, Howard L.: How many of a group of random number will be usable in selecting a particular sample? J. Amer. statist. Assoc. 54, 102—122 (1959).

Wir wählen aus einer Tabelle von Zufallszahlen (von 1 bis N) n Zahlen aus und benützen diese für die Entnahme einer Stichprobe aus einer Gesamtheit, die T Elemente ($T \leq N$) hat. Verf. findet für die Wahrscheinlichkeit, daß die so gewählte

Stichprobe s verschiedene Elemente hat:

$$P(s|n, T, N) = \frac{T!(N-T)!}{N^n (T-s)!} \sum_{t=s}^n \binom{n}{t} (N-T)^{n-t} k_{st},$$

wobei die Größen $k_{st} = \sum_{r=0}^s \frac{(-1)^r (s-r)^t}{r!(s-r)!}$ die sogenannten Stirlingschen Zahlen zweiter Art sind. Diese Verteilung ist die Verallgemeinerung der Besetzungsverteilung (s. z. B. Schäfer, dies. Zbl. 56, 128), was sich für $N = T$ ergibt. Verf. bestimmt die Momente und nähert die Verteilung mit verschiedenen binomialen und Poissonschen Verteilungen an; die Annäherungen werden für Spezialfälle numerisch verglichen. — Illustrative Beispiele für die praktische Anwendung. *K. Sarkadi.*

Cansado, E.: About moments and factorial coefficients. Bull. Inst. internat. Statist. 35, Nr. 2, 77—84 (1957).

This paper consists of an elementary exposition of the relation between moments and factorial moments, using the usual moment generating function technique. It is on the level of an elementary text such as that by Ch. Jordan. Illustrations include not only the two well-known discrete distributions (the binomial and Poisson) but also two continuous distributions (the rectangular and the gamma). No justification is given for evaluating these last two relations which so far have found no statistical purpose. *F. N. David.*

Lukaes, Eugene: On distribution-free partition statistics for the normal family. Bull. Inst. internat. Statist. 36, Nr. 3, 37—42 (1959).

Von einer Zufallsvariablen Y wird gesagt, sie habe konstante Regression bezüglich einer Zufallsvariablen X , wenn $E(Y|X) = E(X)$ ($< \infty$) fast überall gilt. Eine Stichprobenfunktion S heiße verteilungsfrei bezüglich einer Klasse Ω von Verteilungsfunktionen, wenn ihr Wert nicht davon abhängt, welches F aus Ω vorliegt. Verf. beweist Sätze vom Typ: „ S ist verteilungsfrei bezüglich der Klasse der Normalverteilungen mit konstanter Varianz dann und nur dann, wenn das Stichprobenmittel konstante Regression bezüglich S hat,“ und zeigt, daß für die Klasse aller nur von einem Lage- und einem Maßstabsparameter abhängigen Verteilungen (und damit für die Klasse aller Normalverteilungen) verteilungsfreie Stichprobenfunktionen existieren. *O. Ludwig.*

Watson, G. S.: Sufficient statistics, similar regions and distribution-free tests. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 262—267 (1957).

Die Arbeit bringt eine elementare Darstellung der Begriffe erschöpfende Funktion (sufficient statistic), beschränkte Vollständigkeit (bounded completeness) und des bekannten Satzes von Lehmann und Scheffé (dies. Zbl. 41, 463), daß dann, wenn eine Funktion existiert, die für alle Maße der Nullhypothese erschöpfend und beschränkt vollständig ist, jeder ähnliche (similar) Test von Neymanscher Struktur (d. h. ein bedingter Test) ist. Ist die minimale erschöpfende Funktion für die Maße der Nullhypothese und der Alternative die gleiche, so erhält man als bedingten Test nur den trivialen. Ist diese erschöpfende Funktion beschränkt vollständig, so folgt daraus, daß es keinen nichttrivialen ähnlichen Test gibt. Die Anwendung dieser Überlegungen auf das Fisher-Behrens-Problem führt jedoch zu keinem Ergebnis, da sich die minimale erschöpfende Funktion als nicht beschränkt vollständig erweist. Die Bildung bedingter Tests führt also hier einerseits zu keinen nichttrivialen Tests, andererseits wird aber die Möglichkeit der Existenz solcher Tests offen gelassen. Verf. gibt noch ein einfaches Beispiel, wo die gleiche Situation vorliegt, zum Unterschied vom Fisher-Behrens-Problem aber nichttriviale ähnliche Tests angegeben werden können. Abschließend werden bekannte Ergebnisse bezüglich verteilungsunabhängiger Tests rekapituliert und schließlich ein verteilungsunabhängiger Test für die Hypothese $\beta = 0$ in dem Modell $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ angegeben. Dabei sind

die x_i gegebene Konstante; die verbundene Verteilung der ε_i ($i = 1, 2, \dots, n$) wird als invariant unter den Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ vorausgesetzt.

J. Pfanzagl.

Weiss, Lionel: A test of fit for multivariate distributions. Ann. math. Statistics 29, 595—599 (1958).

The problem treated in this paper is to test the hypothesis that the density function $f(y_1, \dots, y_k)$ of a k -dimensional random variable $X = (Y_1, \dots, Y_k)$ coincides with a given "piecewise continuous" function $g(y_1, \dots, y_k)$ almost everywhere over a given region R , where $g(y_1, \dots, y_k) \geq B > 0$ at every point of R , and $1 \geq \int \dots \int_R g(y_1, \dots, y_k) dy_1 \dots dy_k > 0$. The hypothesis says nothing about $f(y_1, \dots, y_k)$ outside the region R . For this problem, the author considers a sphere "of type s ", which is defined as follows: Let $h(y_1, \dots, y_k)$ be a given nonnegative piecewise continuous function, and let X_1, \dots, X_n be independent k -dimensional random variables, each with the density $f(y_1, \dots, y_k)$. For a nonnegative number t and each i , construct a k -dimensional sphere with center at $X_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{ik})$ and of k -dimensional volume $t h(Y_{i1}, \dots, Y_{ik})/n$. Such a sphere is called "of type s " if it contains exactly s of the $(n-1)$ points $X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$. Let $R_n(t; s)$ denote the proportion of the n spheres which are of type s . Then, it is shown that $R_n(t; s)$ converges stochastically to

$$\left(\frac{t^s}{s!}\right) \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} h^s(y) f^{s+1}(y) \cdot \exp\{-t h(y) f(y)\} dy_1 \dots dy_k$$

as n increases. This result is used to construct a test of the above-mentioned hypothesis.

K. Matusita.

Maurice, Rita: Ranking means of two normal populations with unknown variances. Biometrika 45, 250—252 (1958).

A two-sample procedure is given for ranking means of two normal populations with unknown parameters. We take a sample of size n , from each population, $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$ and $(y_1, y_2, \dots, y_{n_2})$ respectively, estimate the sum of their variance $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$, use this estimate to decide about the size n_2 of the second samples and choose as the population with the larger mean that for which the total sample of $n_1 + n_2$ observations has the greater mean. The main problem consists in determining n_2 so that the correct selection be made with given probability P (or greater), when the true difference between the population means is $\delta > 0$. Taking

$$s^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} [(x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})]^2$$

as the estimate of $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$, n_2 shall be determined from

$$n_1 + n_2 = \max \{n_1, [s^2 h^2 / \delta^2] + 1\},$$

where $K(-h) = P$, K being the distribution function of Student's t with $n_1 - 1$ degrees of freedom. Another possibility is to take separate estimates of σ_x^2 and σ_y^2 and therefore two different values of n_2 . Expected total sample sizes are given.

F. Zitek.

Hemelrijk, Jan: Distributionfree tests against trend and maximum likelihood estimates of ordered parameters. Bull. Inst. internat. Statist. 36, Nr. 3, 15—25, (1959).

Literaturbericht (ohne Beweise) über die im Titel genannten Gebiete. Ah Testen gegen Trend werden nur solche Methoden berücksichtigt, die mit Kendalls Rangkorrelation zusammenhängen, insbesondere die Beiträge von Terpstra, van Eeden, Hemelrijk [Nederl. Akad. Wet., Ser. A 55 (1952)ff.]. Im zweiten Teil werden vornehmlich die Arbeiten von Brunk (dies. Zbl. 66, 385) und van Eeden (Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59 (1956); 60 (1957)] verglichen. H. Witting.

Anderson, T. W.: A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size. *Ann. math. Statistics* **31**, 165—197 (1960).

Das sequentielle Prüfverfahren, in dem zwei einfache Hypothesen gegenübergestellt werden, hat bestimmte Optimalitätseigenschaften im Vergleich mit anderen Testverfahren. Der erwartete Stichprobenumfang $E(n)$ ist von dem wahren Werte des unbekannten Parameters θ unabhängig; sind $\theta = \theta_0$ und $\theta = \theta_1$ die geprüften Hypothesen, dann ist $E(n)$ für jene Werte von θ zwischen θ_0 und θ_1 viel größer als für $\theta = \theta_0$ oder $\theta = \theta_1$. In der Arbeit ist eine neue Methode zur Erniedrigung von $E(n)$ für $\theta \in (\theta_0; \theta_1)$ vorgeschlagen, und zwar für den Fall der Normalverteilung mit bekannter Streuung, wobei θ das arithmetische Mittel ist. Bei dem Sequenzfortgang werden die beobachteten Werte addiert und die Summe mit zwei Konstanten verglichen. In der Arbeit ist diese Summe mit einem stochastischen Fortgang von Wiener (mit kontinuierlichem Zeitparameter) ersetzt; statt Konstanten muß man zwei lineare Funktionen von n nehmen. Es ist gleichzeitig die Unterbrechung des Fortganges für $n = N$ vorgesehen. Die Arbeit bringt Annäherungsformeln für die Operationscharakteristik und für $E(n)$. *V. Maly.*

Ajvazjan (Aivazian), S. A.: A comparison of the optimal properties of the Neyman-Pearson and the Wald sequential probability ratio tests. *Teor. Verojatn. Primen.* **4**, 86—93, engl. Zusammenfassung 93 (1959) [Russisch].

Let us consider a family of frequency functions $f(x, \theta)$ depending on a parameter θ . Let H_0 be the hypothesis that $\theta = 0$, H_θ a (simple) alternative. Then there are studied asymptotical (for $\theta \rightarrow 0$) properties of $n(\alpha, \beta, \varrho)$ and $\nu(\alpha, \beta, \varrho)$ and of their ratio. Here $n(\alpha, \beta, \varrho)$ is the number of independent observations necessary for distinguishing between H_0 and H_θ by means of the classical Neyman-Pearson likelihood ratio test, α and β being the probabilities of errors of first and second kind respectively, and ϱ an "informational distance" between H_0 and H_θ :

$$\varrho = \varrho(0, \theta) = \int [f(x, \theta) - f(x, 0)] \log [f(x, \theta)/f(x, 0)] dx.$$

ν denotes the average number of observations (made in the same sense) if we use Wald's sequential test. For the ratio ν/n the values are independent of ϱ ; some numerical values (for different α and β) are given in a table at the end of the paper.

F. Zitek.

Goodman, Leo A.: A note on Stepanov's tests for Markov chains. *Teor. Verojatn. Primen.* **4**, 93—96 (1959).

It is shown that a test proposed by Stepanov [*Teor. Verojatn. Primen.* **2**, 143—144 (1957)] cannot be used to testing hypotheses concerning the order of a Markov chain if the corresponding transition probability matrix is not specified. Some other criteria are proposed. See also another paper of the author (review below).

F. Zitek.

Goodman, Leo A.: On some statistical tests for M -th order Markov chains. *Ann. math. Statistics* **30**, 154—164 (1959).

In this paper, the author gives modified forms of the ψ^2 statistics defined by Good [I. J. Good, *Biometrika* **42**, 531—533 (1956)], and if the hypothesis $H(P_m)$ that the positively regular Markov chain concerned is governed by a complete system P_m of m th order transition probabilities is true, he shows that certain functions of a modified form of the ψ^2 statistics are asymptotically equivalent to certain likelihood ratio statistics. Further, it is shown that the similar statement can be made for certain functions of a different modified form of the statistics under the hypothesis H_m that the positively regular Markov chain concerned is of order m . Then the author treats the asymptotic distributions of the generalized ψ^2 statistics by Good when H_m and $H(P_m)$ hold, and generalizes the notions of the ψ^2 and likelihood ratio statistics and discusses their asymptotic distributions. *K. Matusita.*

Jenkins, G. M. and M. B. Priestley: The spectral analysis of time-series. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 1—12 (1957).

Die Arbeit bringt einen Überblick über die statistischen Methoden zur Analyse stationärer Zeitreihen und leitet damit ein Symposium über Spektralanalyse der Roy. statist. Society ein (siehe auch die folgenden drei Referate). Es werden vor allem eine Reihe von bekannten Ansätzen zum Schätzen der Spektraldichte, des Bandspektrums und des integrierten Spektrums referiert, die einen guten Einblick in den derzeitigen Stand der Spektralmethoden geben. Ergänzend dazu werden einige Probleme bei der Konstruktion von Konfidenzintervallen für Spektren behandelt und einige Bemerkungen über praktische Fragen (vor allem Fragen des Programmierens) bei der Anwendung der Spektralanalyse gemacht. *B. Schneider.*

Lomnicki, Z. A. and S. K. Zaremba: On estimating the spectral density function of a stochastic process. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 13—37 (1957).

Verff. bringen einen neuen Zugang zum Schätzen der Spektraldichte eines stochastischen Prozesses. Das wichtigste an diesem neuen Zugang ist die Definition des Maßes für die Abweichung zwischen Schätzfunktion und Parameter, das durch das Integral (erstreckt über den ganzen Bereich der Frequenz ω) der mittleren quadratischen Abweichung zwischen Schätzfunktion und Spektraldichte erklärt wird. Verf. beschränken sich auf Schätzfunktionen der Form

$$Z'_N(\omega) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N} C_{k,N} \cos 2\pi k \omega$$

(wobei $\lambda_{k,N}$ = Gewichte, die von dem Stichprobenumfang N abhängen, und $C_{k,N}$ = Stichprobenkovarianz der Zeitreihe) und auf die Behandlung des linearen diskreten Prozesses. Die Gewichte $\lambda_{k,N}$ sollen so gewählt werden, daß das oben eingeführte Abweichungsmaß ein Minimum und $Z'_N(\omega)$ konsistent wird. Die optimalen Gewichte werden explizit angegeben. Sie hängen allerdings von den Parametern des Prozesses ab und haben deshalb für das Schätzproblem keinen allzu großen Wert. Interessant ist, daß die Ableitungen dieser optimalen Schätzwerte die optimalen Schätzwerte für die entsprechenden Ableitungen der Spektraldichte sind. Für die Konsistenz der Schätzfunktion $Z'_N(\omega)$ und ihrer Ableitungen werden eine Reihe von Bedingungen angegeben. Der Konsistenzbegriff selbst wird in bezug auf das neu eingeführte Abweichungsmaß neu definiert. Verff. vergleichen dann mit diesen Konsistenz- und Optimalitätsbedingungen verschiedene früher aufgestellte Schätzfunktionen, und zwar Bartlett's gestutztes und geglättetes Periodogramm, und Tukeys und Grenanders integriertes Periodogramm. Diese Schätzfunktionen sind zwar nach der neuen Definition konsistent, können aber erheblich vom Optimum abweichen. Verff. schlagen deshalb eine neue Schätzfunktion vor, die folgende Gewichte besitzt: $\lambda_{k,N} = \rho^{|k|} / (a(N - |k|)^{-1} + \rho^{|k|})$. Für die Parameter a und ρ schlagen sie — bei Fehlen jeglicher Kenntnis der Struktur des Prozesses — die Werte $\rho = \frac{1}{2}$ und $a = 3$ vor; besser wäre allerdings, für ρ die mittlere Abnahmerate der Folge von Autokorrelationskoeffizienten des Prozesses und für a den Wert $a = (1 + \rho)/(1 - \rho)$ einzusetzen. Diese neue Schätzfunktion soll bei dem Markoff-Prozeß 1. Ordnung asymptotisch die beste Annäherung an das Optimum liefern. Interessant an den weiteren Ausführungen ist die Kritik an „Grenanders Unsicherheitsprinzip“ und der damit verbundenen Definition der Begriffe „resolvability“ und „reliability“. Bei einer — nach Meinung der Verff. — sinnvoller Definition dieser beiden Begriffe gelangt man zu Feststellungen, die dem Unsicherheitsprinzip gerade entgegengesetzt sind. In den letzten beiden Abschnitten werden alle Überlegungen noch einmal am Markoff-Prozeß 1. Ordnung demonstriert und für drei von Kendall konstruierte Zeitreihen die verschiedenen Schätzfunktionen berechnet. Es zeigt sich, daß selbst bei einer Stichprobe von 500 Meßwerten (die den Rechnungen zugrunde gelegt wurde) noch erhebliche Abweichungen zwischen Schätzfunktion und wahrer Spektraldichte

bestehen. Die von den Verff. neu eingeführte Schätzfunktion liegt bei allen drei Verfahren nahe am Optimum, allerdings liefert Bartlett's geschmoothes Periodogramm im wesentlichen dieselbe Approximation. *B. Schneider.*

Whittle, P.: Curve and periodogram smoothing. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 38—47 (1957).

Auch diese Veröffentlichung soll einen neuen Zugang zum Schätzen der Spektraldichte bringen, und zwar speziell zum Problem, das Schuster-Periodogramm $f(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j e^{i\omega j}$ in geeigneter Weise zu „glätten“ (smooth), so daß daraus ein konsistenter Schätzwert für die Spektraldichte $F(\omega)$ wird. Grundlage und Rechtfertigung dieses Vorgehens ist für den Verf. allerdings nicht so sehr das Erreichen der Konsistenz, er betrachtet die Inkonsistenz der Schätzwerte als wesentlich zum Problem gehörend, als vielmehr die Annahme, „daß die Spektralkurve der Grundgesamtheit selbst glatt ist“. Es ist das Hauptanliegen der Arbeit, diese Annahme in eine neue, exakte mathematische Form zu bringen. Dies geschieht durch das Einführen einer *a priori* Verteilung für die Parameter $F(\omega)$. Jedem stochastischen Prozed. soll eine Grundgesamtheit von Spektralkurven $F(\omega)$ zugeordnet sein. Diese Grundgesamtheit soll glatt genannt werden, wenn die Korrelation zwischen $F(\omega_1)$ und $F(\omega_2) - 1$ für $|\omega_1 - \omega_2| \rightarrow 0$ streng gegen 1 strebt. Zum Schätzen dieser glatten Spektralkurven verwendet Verf. folgenden Ausdruck: $\hat{F}_N = \sum_{j=1}^N a_j x_j$ (wobei a_j = Gewichte und $j = 1, 2, \dots, N$). Er bezeichnet diesen Schätzwert als optimal, wenn die Summe der Abweichungsquadrate zwischen \hat{F}_N und F , $\sum_{j=1}^N (x_j - F(\omega_j))^2$, erstreckt über $j = 1, 2, \dots, N$ 2. im Mittel (gebildet über alle Verteilungen, also über die Verteilung von x_j und die *a priori* Verteilung von F) ein Minimum ist. Verf. leitet aus dieser Forderung, die strenger als die entsprechende von Benedekti und Zarembka (s. vorstehendes Referat) ist, Bestimmungsgleichungen für die Gewichte a_j ab, die von den Produktmomenten der *a priori* Verteilung und den Kovarianzen der Periodogrammwerte γ abhängen. Für letztere wird eine Näherungsformel angegeben. Lösungen dieser Gleichungen werden für eine spezielle Klasse von Produktmomenten explizit ausgerechnet. Die Anwendung auf das Glätten von anderen Kurven, z. B. der Verteilungsdichte, wird diskutiert. *B. Schneider.*

Discussion on the symposium. J. roy. statist. Soc., Ser. B 19, 47—48 (1957).

Diskussion zu den drei vorstehend referierten Arbeiten. Es wurden folgende Beiträge gebracht: M. S. Bartlett wies besonders auf die Schätzmethode von O. J. Daniels II für das Bandispektrum hin, die das Analogon zum Gruppenverfahren beim Schätzen der Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt. Er vermittelte den Vergleich dieser Methode mit noch einiger anderen Spektralmethoden mit der Lomb-Scik-Zarembka-Methode. Im Gegensatz zu diesen beiden Autoren war er für den antagonisistischen Charakter der beiden Begriffe „geschätzte“ und „wahre“ ein „Grenzüberschreitensprinzip“. Zum Problem des Glättens eines Periodogramms (smoothing) erwähnte er eine neue Arbeit von Parzen (Optimum methods of spectral analysis of finite noise samples; Columbia University Report, nach der die theoretischen Eigenschaften des geglätteten Periodogramms sehr wenig von der speziellen Form der Gewichtsfunktion beeinflusst werden sollen. Wichtig für weitere Untersuchungen erscheint ihm das Schätzproblem bei gemischten Spektren. H. E. Daniels hatte Bedenken gegen die Verwendung einer *a priori* Verteilung in der Arbeit von Whittle und schlug ein anderes Verfahren zum Glätten des Periodogramms vor, das darauf hinaus läuft, daß ein Polynom $P_N(x) = x_0 + x_1 x + \dots + x_N x^N$ an das standardisierte Periodogramm $f^*(\omega) = f(\omega)/\sqrt{N}$ in $\omega = 0$ angepaßt wird, so daß das Integral

$$\int_0^1 |f^*(\omega) - P_N(x)|^2 dx$$
 ein Minimum wird. Als geglättetes Periodo-

gramm erhält man: $\hat{f}(\omega) = \alpha_0(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} h_k(u) f(\omega - u) du$, wobei $h_k(u)$ der k -te

Term in der Reihenentwicklung der Delta-Funktion nach Orthogonalpolynomen ist, die mit der Basisfunktion $h_0(u)$ assoziiert sind. Die Wahl von $h_0(u)$ und ihre Beziehung zur Varianz von $\hat{f}(\omega)$ soll in einer späteren Publikation diskutiert werden. **M. H. Quenouille** stellte als das Hauptproblem für das Schätzen des Spektrums die Frage heraus, was man mit den gewonnenen Schätzwerten weiter anfangen wolle. Die Beantwortung dieser Frage geschehe in etwa bei **Lomnicki-Zaremba** durch das Einführen des Abweichungsmaßes und bei **Whittle** zusätzlich durch das Einführen einer a priori Verteilung, mit der das Gewicht, das die einzelnen Werte des Spektrums für die Auswertung besitzen, in die Überlegungen mit einbezogen werden könne. Die Beziehung zwischen der Autokorrelationsanalyse und der Spektralanalyse verglich er mit der zwischen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung und ihrer charakteristischen Funktion. Er gebe bei den meisten praktischen Problemen erster den Vorzug. **M. B. Priestley** berichtete ausführlich über ein Experiment, das in den Laboratorien des Royal Aircraft Establishment durchgeführt wird und bei dem die verschiedenen Schätzmethoden auf verschiedene, künstlich erzeugte Zeitreihen mit bekannter Struktur angewandt werden. **North** wies darauf hin, daß man bei der Ermittlung des Spektrums eines Prozesses, der durch irgendeine Apparatur erzeugt oder aufgezeichnet wird, auch die Charakteristik dieser Apparatur beachten müsse. **Harold Jeffreys** machte eine Bemerkung über a priori Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit dem von ihm eingeführten subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff. **I. J. Good** gab ein Verfahren zur Konstruktion eines sogenannten gedämpften Periodogramms an und diskutierte kurz diesen Schätzwert. **Granger** wies auf die Notwendigkeit hin, vor der Analyse erst die Stationarität der Zeitreihe zu überprüfen, da nur dann die Spektralmethoden angewandt werden dürfen. **J. Wise** wies auf die Schwierigkeiten bei der Interpretation des Spektrums hin. Besonders wenn die Zeitreihe durch ein lineares oder nicht-lineares System erzeugt werde, sei die Anwendung von Spektralmethoden keineswegs selbstverständlich. An ihre Stelle solle dann besser eine Analyse der Systemstruktur treten, wie z. B. die Ermittlung der Transfer-Funktion bei einem linearen System. Gegen die Verwendung von a priori Wahrscheinlichkeiten wandte er sich nachdrücklich. Stattdessen schlug er vor, die Glattheit des Spektrums durch Festlegungen in der Größe der ersten und höheren Ableitungen von konsistenten Schätzwerten zu definieren. **Grenander** rechtfertigte dagegen die Verwendung der a priori Verteilung durch **Whittle**, die er für sehr aufschlußreich über die Beziehung zwischen der Form des Schätzwertes und der verfügbaren Information bezüglich des Spektrums hält. Er räumt aber ein, daß durch die Ableitungen des Spektralschätzwertes qualitativ dieselbe Information erhalten werden könne. An der Arbeit von **Lomnicki** und **Zaremba** kritisierte er, daß ihre Behandlung der beiden Begriffe „resolvability“ und „reliability“ nicht korrekt sei. **Rosenblatt** schloß sich im wesentlichen dieser Kritik an. Zur Arbeit von **Whittle** bemerkt er, daß dieser bei der Ableitung seiner Formeln schon zu Beginn Approximationsformeln (für die Kovarianzen der Periodogrammwerte) angewandt habe, die nicht zulässig seien. **P. Whittle** bemerkte zur Arbeit von **Lomnicki-Zaremba**, daß diese darin das Problem, praktisch einen optimalen Schätzwert zu bestimmen, auch nicht gelöst hätten, da ihre Optimalitätsbedingung von den unbekannten Parametern des Prozesses abhängen. Für nachteilig hält er die Beschränkung auf Gewichte λ_{kN} , die nicht von ω abhängen, da bei diesen durch eine lineare Transformation die Eigenschaft der Schätzfunktion wesentlich geändert werden könne. Er wandte sich auch gegen **Lomnicki-Zaremba's** Kritik an **Grenanders** Unsicherheitsprinzip. **Zaremba** wandte sich vor allem gegen die a priori Wahrscheinlichkeit in **Whittles** Arbeit. Den Unterschied in der Definition des Abweichungsmaßes bei seiner und **Whittles** Arbeit hielt er für nicht so beträchtlich und zeigte, daß man

nach Whittles Methode unter bestimmten Voraussetzungen zu ähnlichen optimalen Gewichten kommen kann, wie sie nach seiner Methode hergeleitet wurden. Die Autoren äußerten sich zu diesen Diskussionsbemerkungen: **Jenkins** und **Priestley** stellten vor allem wieder die praktischen Anforderungen und Schwierigkeiten in den Vordergrund. Die gebrachten Methoden und Beispiele wären noch sehr weit davon entfernt. Aber auch ein Verzicht auf die Spektralanalyse zugunsten einer Modellanalyse sei in der Praxis kaum möglich, da dabei zu viele Parameter geschätzt werden müßten, deren Bedeutung sehr vage sei. Sie gingen dann auf einige kleinere Diskussionsbeiträge kurz ein und machten abschließend einige Bemerkungen zum Schätzproblem bei gemischten Spektren. **Lomnicki** und **Zaremba** legten noch einmal ihre Meinung zum Unsicherheitsprinzip dar: Sie wollten unter „reliability“ nicht — wie es verschiedene Diskussionsredner taten — die Bandweite des Spektralschätzwertes verstanden wissen, da dieser Begriff nur bei Bandspektren anwendbar sei, sondern die Möglichkeit, die Spektralwerte zweier benachbarter Frequenzen zu unterscheiden. Das werde aber bei **Grenander's** Definition nicht herausgestellt. Zur Wahl ihres Abweichungsmaßes und zu ihren optimalen Gewichten bemerkten sie, daß die mittlere quadratische Abweichung zwischen Schätzwert und Spektraldichte in vielen Fällen der Größenordnung nach unabhängig von der Frequenz ist, dagegen sehr vom Schätzwert und den Parametern des Prozesses abhängt. Man könne deshalb keine einfachen Schätzwerte finden, die für alle — oder zumindest für die wichtigsten Prozesse optimal sind. **Whittle** wandte sich gegen den Vorschlag von **Daniels** und **Wise**, statt der a priori Verteilung irgendwelche Kriterien, die von der Differenzierbarkeit hergeleitet werden, zur Definition der Glattheit heranzuziehen, da diese Kriterien zu streng wären. Auf den Einwand von **Rosenblatt** entgegnete er, daß durch die bei seiner Herleitung des Spektralschätzwertes verwendete Näherungsformel die Gültigkeit der Ergebnisse nicht beeinträchtigt werde.

B. Schneider.

Pratt, J. W.: Admissible one-sided tests for the mean of a rectangular distribution. *Ann. math. Statistics* 29, 1268—1271 (1958).

Für die Rechteckverteilung mit unbekanntem Mittelwert θ und bekannter Spannweite wird eine wesentlich vollständige Klasse zulässiger Tests für $H_0: \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1: \theta > \theta_0$ angegeben.

O. Ludwig.

Pfanzagl, J.: Tests und Konfidenzintervalle für exponentielle Verteilungen und deren Anwendung auf einige diskrete Verteilungen. *Metrika* 3, 1—25 (1960).

In this paper, the author first makes a general remark on randomized tests and confidence intervals, and then treats tests and confidence intervals for the parameter θ of the exponential distribution with a density function of the type $C(\theta) \exp(\theta x)$, namely, he treats tests of hypothesis concerning θ , the difference $\theta_1 - \theta_2$, and the k sample problem for the exponential distribution. Finally, the results are applied to the binomial, Poisson, negative binomial, and Pascal distributions, which are obtained by suitable transformations of the parameter from the exponential distribution.

K. Matusita.

Weichselberger, K.: Über die Parameterschätzung bei Kontingenztafeln, deren Randsummen vorgegeben sind. II. *Metrika* 2, 198—229 (1959).

This is the second part (Part I, cf. this Zbl. 87, 151) of a paper on the problem of estimating the probabilities p_{ij} ($i = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, m$) in a multinomial distribution, if the sums $p_{i.} = \sum_{j=1}^m p_{ij}$, $p_{.j} = \sum_{i=1}^l p_{ij}$ are known, and this information is to be used in the estimate. In the first part the author studied the conditions for the existence of maximum-likelihood estimates and their properties. In this second part he considers in detail computational procedures for the maximum-likelihood estimates and studies the relation of his results to previous work in this problem,

viz. Deming's (this Zbl. 24, 55) and Stephan's (this Zbl. 60, 315) papers and the so called "method of iterative proportions". *J. Machek.*

Gumbel, E. J.: Statistical theory of extreme values. Bull. Inst. internat. Statist. 36, Nr. 3, 12—14 (1959).

Vgl. Verf.: 'Statistical theory of extreme values and some practical applications'. dies. Zbl. 56, 131.

Rios, Sixto: Problèmes des maxima et minima ayant relation avec l'inférence dans des populations finies. Bull. Inst. internat. Statist. 35, Nr. 2, 45—54 (1957).

The author concerns himself with a finite population and discusses interestingly in elementary mathematical terms the limitations imposed on estimation by this finiteness. A population of size N with elements x_1, x_2, \dots, x_N is supposed with $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ and $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$. Given $0 \leq x_i \leq M$ maxima are given for σ if (i) $0 \leq N\mu \leq M$ (ii) $M < N\mu \leq 2M$... (iii) $(N-1)M < N\mu \leq NM$. These are obtained by geometrical reasoning. The author next supposes μ and σ fixed and determines the maxima for the range. Finally the maximum and minimum values of the third moment, given μ and σ , are determined. The author has performed a useful service in drawing attention to these limitations which will operate in many randomisation problems. *F. N. David.*

Robertson, W. H.: Programming Fisher's exact method of comparing two percentages. Technometrics 2, 103—107 (1960).

Exact solutions to many statistical problems are now possible through the use of high speed computing equipment. This paper describes the applications of a high speed computer for determining the exact probability statement associated with the problem of comparing two percentages. *Zusammenfassung des Autors.*

Fréchet, M.: Les tableaux de corrélation et les programmes linéaires. Revue Inst. internat. Statist. 25, 23—40 (1957).

In Ergänzung früherer Studien (dies. Zbl. 45, 229 und 71, 128) zeigt Verf., daß es nur zwei Korrelationstafeln mit gegebenen Randsummen gibt, die statistisch monotone Beziehungen zwischen X und Y liefern, d. h. bei denen für $x_\alpha < x_i$ der kleinste Y -Wert bei $X = x_i$ mindestens gleich dem größten Y -Wert bei $X = x_\alpha$ ist (nicht abnehmend; entsprechend ist nicht zunehmend definiert). Für diese Tafeln nimmt der Korrelationskoeffizient Extremwerte an. Andere Korrelationsmaße werden diskutiert, und es wird die in der Theorie der linearen Programme wichtige Aufgabe behandelt, die Größe $S = \sum_i \sum_j t_{ij} n_{ij}$ zu maximieren, wenn die t_{ij} und zu den Elementen n_{ij} der Korrelationstafel die Randsummen vorgegeben sind. Numerische Beispiele werden gegeben. *O. Ludwig.*

Hannan, E. J.: Testing for serial correlation in least squares regression. Biometrika 44, 57—66 (1957).

Tests für die Hypothese, daß die Glieder einer Zeitreihe nicht autokorreliert sind, lassen sich sehr schwer konstruieren, wenn bei der Zeitreihe noch eine Regression vorhanden ist. Einige Ergebnisse konnten hier vornehmlich für den Fall hergeleitet werden, daß die Spaltenvektoren der Regressionsmatrix X Eigenvektoren der Korrelationsmatrix I der Residualglieder sind. In diesem Fall sind die nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Schätzwerte für die Regressionskoeffizienten gleichzeitig die besten linearen erwartungstreuen Schätzungen. Dieses letzte Ergebnis wurde von Grenander und Rosenblatt [Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 812—816 (1954)] weiter untersucht, und es wurden von den beiden Autoren Bedingungen für die Matrix X aufgestellt, unter denen die beiden Schätzungen asymptotisch dieselbe Korrelationsmatrix haben. Von diesen Bedingungen geht Verf. aus, um in allgemeinen Fällen Tests für die Autokorrelation von Zeitreihen zu erhalten. Als Teststatistik betrachtet er den Quotienten aus zwei quadratischen Formen in den Zeit-

reihenwerten y_i , wobei die Matrix der quadratischen Form des Zählers eine Spektraldarstellung besitzen und die Regressionsmatrix X die Bedingungen von Grenander und Rosenblatt erfüllen soll. (Diese Bedingungen sind z. B. erfüllt, wenn Regression auf Orthogonalpolynome betrachtet wird.) Verf. kann dann einen asymptotischen Ausdruck für die Momente der Teststatistik herleiten. Dieser Ausdruck wird für einige spezielle Testgrößen — vor allem für die Statistik von Durbin und Watson (dies, Zbl. 39, 358) — explizit berechnet. Dabei wird ausführlich die Regression auf Orthogonalpolynome behandelt. Im letzten Abschnitt wird dann noch auf das Problem eingegangen, beiden auch stochastische Größen in die Regression mit eingehen (sog. gemischte Regression). *B. Schneider.*

Siddiqui, M. M.: Distribution of a serial correlation coefficient near the ends of the range. *Ann. math. Statistics* 29, 852—861 (1958).

Es seien y_1, \dots, y_N Beobachtungen aus einer stationären Zeitreihe mit äquidistantem Zeitparameter, $E y_t = 0$ für alle t . Dann ist

$$r^* = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i y_{i-1} \right) \left[\left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_{i-1}^2 \right) \right]^{-1/2}$$

die bekannte Definition eines Korrelationskoeffizienten für die Nacheilung mit dem Schritt 1. — Die explizit nicht bekannte Verteilung von r^* wird in der Nähe der Grenzen ihres Wertebereichs betrachtet. y_1, \dots, y_N werden als Koordinaten eines euklidischen Raumes angesehen. $r^* = 1$ mit der Nebenbedingung $\sum y_i^2 = 1$ erzeugt eine Kurve auf der Einheitskugel. $P(r \geq r_0)$ für r_0 nahe bei 1 wird durch Integration über einen Streifen auf dieser Einheitskugel berechnet. *F. Wever.*

Sarmanov, O. V.: The maximum correlation coefficient (symmetrical case). *Doklady Akad. Nauk SSSR* 120, 715—718 (1958) [Russisch].

Let $f(x, y)$ be the density of a bivariate probability distribution that is symmetrical, $f(x, y) = f(y, x)$, let $p(x)$ be the marginal density and suppose that the kernel $K(x, y) = f(x, y) / \sqrt{p(x)p(y)}$ is integrable with respect to both variables. The maximum correlation coefficient R^+ corresponding to $f(x, y)$ is defined as $1/\lambda_1$, where $1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, 1 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2|, \dots$ is the spectrum of the kernel $K(x, y)$. In the paper it is proved that (1) a necessary and sufficient condition for the variates to be independent is that the maximum correlation coefficient be equal to zero, and (2) if the variates are linearly correlated, then the usual correlation coefficient is equal to the maximum correlation coefficient. The same theorems are modified for the case of discrete variables. *J. Machek.*

Sarmanov, O. V.: Maximum correlation coefficient (non-symmetrical case). *Doklady Akad. Nauk SSSR* 121, 52—55 (1958) [Russisch].

The results of the paper reviewed above are generalized to the case of non-symmetrical densities. *J. Machek.*

Benedetti, Carlo: Di alcune disuguaglianze collegate al campo di variazione di indici statistici. *Metron* 18, Nr. 3—4, 102—125 (1957).

Dai due gruppi di numeri reali (x_i) e (y_i) e $(i = 1, 2, \dots, n)$ subordinati alle condizioni

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0; \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1,$$

l'A. considera $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ e dimostra che si ha $\min_{i=1}^n x_i y_i = \frac{1}{n-1}$, se i due gruppi sono "cograduati, mentre si ha $\max_{i=1}^n x_i y_i = -\frac{1}{n-1}$, se i due gruppi sono contrograduati. Applica poi tali risultati alla determinazione del campo di variazione del coefficiente di correlazione del Bravais e dell'indice di dissomiglianza del Gini tra scarti standardizzati nel caso di distribuzioni cograduate e contrograduate. *G. Leti.*

Castellano, Vittorio: Contributi alle teorie della correlazione e della connessione tra due variabili. *Metron* 18, Nr. 3—4, 25—79 (1957).

The author gives a systematic summary of the theory of relations between the "modality" of two associated variables. ["A dictionary of statistical terms" by Kendall and Buckland is invaluable for the reader unfamiliar with Italian terminology; a reference to it should clarify any unfamiliar words in this review.] The discussion and results are in two parts. I. A list of topics here is: theory of relations from the point of view of interpolation — the correlation; the limitations involved in studying the problem of relations between two variables from the sole aspect of interpolation; insufficiency of the theory of correlation and regression; some particular aspects of the theory of relations between the modality of two characteristics (caratteri) as studied by the Italian school: the connection and concordance; the appropriateness of the term "connection" to indicate the existence of a relation between two variables. II. Theory of connection and, in particular, theory of global indices of connection. The author discusses in detail measures of dissimilarity of two cograduated distributions, and the construction of various indices (relative and absolute) of connection between two variables. Some numerical examples of global tables of cograduation are given, and the calculation of these indices illustrated. The global index of connection and methods for its approximate calculation are also discussed.

T. V. Narayana.

Mittmann, O. M. J.: On the variance of the integral of an empirical function. *Metron* 18, Nr. 3—4, 15—24 (1957).

The author defines v_u as the mean square of a moving average, where the moving average is over a length u . It is then suggested that the expected values of v_u , which are called v_u , can be expressed in the form (1): $v_u = b_1/u + b_2/u^2 + \dots + b_m/u^m$. From this an extrapolation formula is derived for v_u in terms of $v_{u/\lambda}$, v_{u/λ^2} etc. The three examples in which this extrapolation formula is used convinced the reviewer that v_u does not in general satisfy (1).

A. J. Miller.

Rider, Paul R.: Variance of the median of samples from a Cauchy distribution. *J. Amer. statist. Assoc.* 55, 322—323 (1960).

Verf. berechnet die exakten Werte der Varianz der Mediane für kleine Stichproben mit Cauchyscher Grundverteilung. Es zeigt sich, daß die asymptotische Formel $\pi^2/4n$ für diese Varianz eine schlechte Näherung für kleine n liefert.

H.-J. Roßberg.

St-Pierre, Jacques: Distribution of linear contrasts of order statistics. *Ann. math. Statistics* 29, 1264—1268 (1958).

Es seien x_0, x_1, \dots, x_n unabhängig voneinander normalverteilte Zufallsvariablen mit unbekannten Mittelwerten und der gemeinsamen Varianz $\sigma^2 = 1$. Es werden die Verteilungen linearer Funktion der Ranggrößen (order statistics) unter verschiedenen Annahmen über die Mittelwerte betrachtet. Insbesondere wird (für $n = 2$) die Verteilung von $z = x_{(0)} - c x_{(1)} - (1 - c) x_{(2)}$, wobei c eine Konstante ($0 \leq c \leq 1$) und $x_{(0)} > x_{(1)} > x_{(2)}$ ist, unter den Annahmen $H_0: \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, $H_1: \mu_0 = \delta > 0, \mu_1 = \mu_2 = 0$, $H_2: \mu_0 = 2\delta, \mu_1 = \delta, \mu_2 = 0$ behandelt und für $\delta = 1$ tabuliert.

O. Ludwig.

Zinger, A. A.: Independence of quasi-polynomial statistics and analytical properties of distributions. *Teor. Verоятn. Primen.* 3, 265—284, engl. Zusammenfassung 284 (1958) [Russisch].

Die Definition der quasi-polynomialen Statistik hat Linnik 1955 angegeben. Eine Funktion $S(X)$ des Vektors X wird danach als quasipolynomial bezeichnet, falls eine stetige Funktion $\varphi(x)$ und zwei Polynome gleichen Grades $r(X)$ und $R(X)$ existieren, wobei für alle X $r(X) \leq \varphi(S(X)) \leq R(X)$ ist. Diese Arbeit ist eine Verallgemeinerung der Ergebnisse, die Verf. in *Doklady Akad. Nauk SSSR* 110, 319—322 (1956) veröffentlicht hat. In der genannten Arbeit wird bewiesen, daß, wenn zwei un-

abhängige quasi-polynomiale Statistiken vorliegen, die für alle Koordinaten derselben zulässig sind, die Komponenten des Vektors X endliche absolute Momente beliebigen positiven Grades besitzen. [Das Polynom m -ten Grades $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wird als „für x_i zulässig“ bezeichnet, falls es eine weiter nicht zu vereinfachende Form x_i^m aufweist]. Verf. untersucht noch den Fall, daß eine dieser Statistiken linear ist und beweist, daß die charakteristischen Funktionen von Verteilungen der Vektorkomponenten auf die ganze komplexe Ebene fortgesetzt werden können und ganze Funktionen endlicher Ordnung sind. Die Arbeit enthält die Anwendungen der oben genannten Sätze.

W. Kryszicki.

Klepikov, N. P. and S. N. Sokolov: Non-linear confluence analysis. Teor. Veroyatn. Primen. 2, 473—475, engl. Zusammenfassung 475 (1958) [Russisch].

Es sei

$$f(x, x_0; y, y_0) = \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\frac{|\sigma_{ij}|}{(2\pi)^{e+1}}} e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l (y_i - y_{0i}) \sigma_{ij} (y_j - y_{0j})}$$

für festes $x_0 \in R_1$ und $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0l}) \in R_l$ und alle reellen x und alle $y = (y_1, \dots, y_l) \in R_l$ die Dichte einer Normalverteilung. $|\sigma_{ij}|$ bedeutet natürlich die Determinante der σ_{ij} , $i, j = 1, \dots, l$. Fragen der nichtlinearen Konfluenzanalyse

führen auf die Betrachtung von $(1) \int f(x, x_0; y, y_0) ds$, wobei $ds^2 = dx^2 + \sigma_x^2 \sum_{i,j=1}^l dy_i dy_j \sigma_{ij}$.

Unter der Annahme, daß y als Funktion von x um x_0 nach Taylor bis zu den Gliedern zweiter Ordnung entwickelt werden kann, wird das Integral (1) näherungsweise berechnet.

L. Schmetterer.

Brudno, A. L.: Zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate mittels der Streuung. Mat. Sbornik, n. Ser. 43 (85), 37—48 (1957) [Russisch].

Petrov hat in seiner Arbeit (dies. Zbl. 55, 376) folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Markov bewiesen (vgl. auch David und Neyman, dies. Zbl. 20,

40). Es seien N unabhängige nach $N \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_{ki}, \sigma_i^2 \right)$, $1 \leq i \leq N$ verteilte zufällige Variable gegeben, wobei $N > n$ ist, die α_k , $1 \leq k \leq n$, Parameter und die x_{ki} gegebene reelle Zahlen sind und die daraus gebildete Matrix den Rang n hat.

Unter allen erwartungstreuen Schätzungen für $\sum_{k=1}^n c_k \alpha_k$ [mit gegebenen reellen c_k],

die gewissen Regularitätsbedingungen genügen, haben die mittels der Methode der kleinsten Quadrate gewonnenen Schätzungen für die α_k kleinste Streuung. Verf. zeigt mit Hilfe eines langen Beweises, daß dies auch ohne Regularitätsbedingungen richtig ist. Benützt man die vom Ref. im Mittel.-Bl. math. Statistik 9, 147—152 (1957), entwickelten Methoden, kann man dies in wenigen Zeilen zeigen.

L. Schmetterer.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:

Gini, Corrado: Medie di serie dipendenti da due caratteri sconnessi. Metron 18, Nr. 3—4, 126—135 (1957).

L'A. considera distribuzioni riguardanti coppie di caratteri qualitativi (mutabili), le cui frequenze sono indicate in tabella a doppia entrata. E poichè i caratteri qualitativi possono essere rettilinei, ciclici e sconnessi, l'A. suppone di riferirsi a distribuzioni doppie le cui componenti siano due caratteri sconnessi (come ad es. la nazionalità, la professione, la coltura, ecc.) Per questi tipi di distribuzioni l'A. definisce come media aritmetica la coppia di modalità che rende minima la varianza. Analogamente definisce come mediana la coppia di modalità che rende minimo lo scostamento semplice medio. Da queste definizioni si ricava facilmente il procedimento pratico per le applicazioni concrete. Fa vedere che, mentre per le distribuzioni di

un solo carattere sconnesso, media aritmetica, moda e mediana coincidono con la modalità che presenta la massima frequenza, tale coincidenza non si verifica per le distribuzioni di coppie di caratteri sconnessi. *T. Salvemini.*

Gerard, Harold B. and Harold N. Shapiro: Determining the degree of inconsistency in a set of paired comparisons. *Psychometrika* 23, 33—46 (1958).

Let an individual S be asked to estimate the (subjective) probability of his success in some future undertaking in the following way. He is presented with all possible pairs out of n cards with a different odds for success printed on each card, and he is asked to select the member of each pair which better reflects what he thinks his chances are. One of the questions that may arise when this type of data is analyzed, is: has S been consistent, and, if not, how inconsistent has he been? In defining consistency the authors (1) assume that the objects which are to be compared and the place which S should take among them can be linearly arranged, on a line L , say (this is clearly possible in the above case of n odds and one subjective probability), (2) assume some a priori ordering of the objects (odds, in this case), and (3) use the concept of distance in the following way. Define an "answer" matrix $A = \|a_{ij}\|_n^n$, where $a_{ij} = +1$ if, in the comparison between the i -th odds and the j -th odds, S considers his probability of success to be nearer to the i -th odds than to the j -th odds, where $a_{ij} = -1$ in the reverse case, and where a_{ii} is defined equal to zero. Now, on the line L , assigne the coordinate P_i to the i -th odds, and X to the subjective probability of S 's success. Then the set of responses, or equivalently the answer matrix A , is called inconsistent if it is impossible to choose the coordinates X and P_i ($i = 1, \dots, n$) in such a way that A would be equal to the matrix $\|b_{ij}\|_n^n$ if b_{ij} is defined to be $+1$ if $d_i < d_j$, and -1 if $d_i > d_j$, where $d_i = |P_i - X|$ is the distance between the points determined by coordinates X and P_i . Note that according to assumption (2) above the coordinates P_i ($i = 1, \dots, n$) are subject to the condition $P_1 < P_2 < \dots < P_n$. The authors show that the necessary and sufficient condition for an answer matrix A (which is always skew symmetric) to be consistent is that the entries above the principal diagonal are divided in two connected regions separated by a boundary which consists of "steps" going up and to the right. They further define two fundamental types of inconsistency, viz. (α) intransitivity: a triplet of subscripts i, j, k is called intransitive if $d_i < d_j$ and $d_j < d_k$, but $d_k < d_i$ (note that the property of intransitivity leads to A being inconsistent, whatever be the true or a priori order of P_i, P_j, P_k), (β) separation: suppose $P_i < P_j < P_k$ defines the true or a priori order of P_i, P_j, P_k ; then, if $a_{ij} = +1$, $a_{jk} = -1$, X must be to the left of P_j and to the right of P_j at the same time, which is impossible; the inconsistency manifested by this triplet i, j, k is called a separation (note that for certain a priori orderings of P_i, P_j, P_k , the values $a_{ij} = +1$, $a_{jk} = -1$ do not constitute an inconsistency). The authors prove that the above definition of consistency is equivalent to the absence of intransitivities and separations. Of course it is possible that S 's responses are not consistent re the assumed a priori order of the P_i , but are consistent re a different order of the P_i ; if one would call this type of response consistent, this would mean that the above assumption (2) is dropped, and that separations are no longer considered to lead to inconsistencies; therefore the authors propose to denote this type of consistency, which is equivalent to the absence of intransitivities, by the term "relative consistency". Finally they give a formula for the number T of intransitivities: $T = 24^{-1} \cdot [n(n^2 - 1) - 3 \sum_k R_k^2]$, where $R_k = \sum_j a_{kj}$, and summations are from 1 to n . They also give a formula for the number S of separations:

$$S = 24^{-1} \cdot [n(n-1)(n-2) + 6 \sum_k (n-k) \hat{C}_k - 6 \sum_k (k-1) \hat{R}_k - 6 \sum_k \hat{R}_k \hat{C}_k],$$

where $\hat{C}_k = \sum_i \hat{a}_{ik}$, $\hat{R}_k = \sum_j \hat{a}_{kj}$, summations are from 1 to n , and $\hat{a}_{ij} = 0$ for

$i \geq j$, $\hat{a}_{ij} = a_{ij}$ for $i < j$. There are a few numerical examples which show that it is possible for an answer matrix to have intransitivities without separations, or separations without intransitivities. *H. R. van der Vaart.*

Geisser, Seymour: A method for testing treatment effects in the presence of learning. *Biometrics* **15**, 389—395 (1959).

Um festzustellen, ob verschiedene Behandlungen unterschiedliche Wirkungen erzeugen, geht der Experimentator meist so vor, daß er die Behandlungen zufällig auf die Versuchsobjekte verteilt und zur Auswertung der Daten die Varianzanalyse benutzt. Wenn es sich um Versuche mit Menschen handelt, so muß man damit rechnen, daß die Versuchspersonen während des Experiments etwas lernen, und die Wiederholungen daher anders zu bewerten sind als bei Experimenten, wo ein Lernvorgang nicht in Frage kommt. Verf. schlägt einen Versuchsplan vor, der hauptsächlich aus einem lateinischen Quadrat besteht. Dabei werden np Versuchspersonen zufällig in p gleichgroße Gruppen eingeteilt. Es werden p Behandlungen an p verschiedenen Tagen in der Anordnung eines lateinischen Quadrates auf die Individuen der p Gruppen angewandt. Geprüft wird die Hypothese, daß die Behandlungen verschiedene Wirkungen haben. Zur Auswertung wird die von Hotelling eingeführte Größe T^2 verwendet. Ein Zahlenbeispiel wird für $p = 3$ gegeben. *G. Reißig.*

Emmens, C. W.: The role of statistics in physiological research. *Biometrics* **16**, 161—175 (1960).

In der Physiologie können mit Hilfe statistischer Methoden wertvolle Resultate erzielt werden. Leider wird von dieser Möglichkeit bisher wenig Gebrauch gemacht. In der vorhandenen Literatur — Verf. hat das *Journal of Physiology* darauf untersucht — findet man nur gelegentlich Arbeiten, in denen die Standardfehler berechnet werden oder der t -Test angewandt wird. Korrelations- und Regressionsbetrachtungen sowie Varianzanalysen kommen ganz selten vor und dann auch nur in Spezialgebieten wie z. B. Genetik und Toxikologie. Verf. beschäftigt sich mit der Varianzanalyse — insbesondere bei der Anordnung in lateinischen Quadraten — und stellt fest, daß sie für physiologische Probleme oft sogar noch besser geeignet ist als für Landwirtschaft und Industrie. Er betrachtet vier verschiedene Arten von Experimenten und gibt jeweils die Versuchspläne und Ergebnisse an. Als Versuchstiere werden Mäuse verwendet. Es werden quantale und abgestufte Beobachtungen durchgeführt und dabei jedesmal Vergleiche zwischen verschiedenen Tieren und an ein- und demselben Tier angestellt. So entstehen die vier verschiedenen Typen. Abgestufte Beobachtungen vermitteln mehr Information als quantale. Im ersten Falle wird man etwa feststellen, wie lange das Tier überlebt und im zweiten Fall nur, ob es am Leben geblieben oder gestorben ist. Für Untersuchungen an ein- und demselben Tier kommen nur ganz bestimmte Probleme in Frage, z. B. solche, bei dem jedes Glied eines Organpaares getrennt behandelt werden kann, oder Blutuntersuchungen, die ja auch mehrmals an dem gleichen Tier durchgeführt werden können. Auf Vorteile der angewandten Methoden gegenüber der Probit-Analyse wird hingewiesen. Die angeführten Rechnungen wurden mit Tischrechenmaschinen durchgeführt. Mit der zunehmenden Verwendung von elektronischen Rechenanlagen wird auch der Anwendungsbereich der Statistik insbesondere für physiologische Probleme größer werden. Es muß jedoch stets beachtet werden, daß kompliziertere Versuchspläne wegen der größeren Kosten dann nicht gerechtfertigt sind, wenn für die praktischen Erfordernisse ein einfacher Plan das gleiche leistet. *G. Reißig.*

Anderson, Edgar: A semigraphical method for the analysis of complex problems. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **43**, 923—926 (1957).

In der Arbeit ist der Gebrauch einer neuen Methode zur graphischen Dokumentation von mehreren, an einem Individuum gemessenen Merkmalen vorgeschlagen. Die Abhängigkeit von zwei quantitativen Merkmalen ist graphisch mit einem Punktdiagramm dargestellt, in dem die Größe der beiden Merkmale durch die Lage der den

einzelnen Individuen entsprechenden Punkte gegeben ist; eine weitere Einteilung der Punkte in bezug auf andere quantitative Merkmale ist kaum möglich. Verf. zeichnet drei Stufen (hoch, mittel, niedrig) von fünf Merkmalen in Form der sog. „glyphs“ ein; jedem Individuum entspricht ein kleiner Kreis, von dem fünf Strahlen ausgehen. Die Richtung der Strahlen für ein bestimmtes Merkmal ist für alle Individuen dieselbe, die Länge entspricht den 3 Stufen. In der Arbeit werden die günstigste Lage der Ausgangspunkte der Strahlen und deren optimale Längenverhältnisse untersucht und die Ergebnisse diskutiert. Die Methode hat den Vorteil, daß die „glyphs“ sehr anschaulich sind, sie können sehr leicht analysiert werden, und man kann sie z. B. in eine Landkarte einzeichnen. Die Methode ist kurz an einem Beispiele aus der Landwirtschaft erklärt. Verf. versucht jetzt, sie in verschiedenen Gebieten der Wissenschaft zu benutzen; die Erfolge und Erfahrungen will er in einer Reihe von Arbeiten den Lesern mitteilen.

V. Maly.

Kendall, David G.: Birth-and-death processes and the theory of carcinogenesis. Biometrika 47, 13—21 (1960).

Verf. entwickelt Gedankengänge aus einer früheren Arbeit über Mutationen (G. Kendall, dies. Zbl. 49, 104) auf Probleme der Krebsforschung an. Zunächst wird die biologische Situation beschrieben und dann durch ein Modell dargestellt. Eine große Gesamtheit von normalen Zellen wird einer karzinogenen Behandlung (z. B. Bestrahlung) ausgesetzt. Die Wirkung zeigt sich dadurch, daß einige der normalen Zellen in Mutanten der ersten Art übergeführt werden. Aus Bequemlichkeitsgründen werden diese „graue Zellen“ genannt. Es wird vorausgesetzt, daß die Anzahl der im Zeitintervall (t_1, t_2) erzeugten grauen Zellen eine Poisson-Veränderliche mit

dem Erwartungswert $\int_{t_1}^{t_2} 2f(t) dt$ ist; $f(t)$ gibt die Intensität der karzinogenen Behandlung an und ist im allgemeinen eine Stufenfunktion. Jede graue Zelle erzeugt eine gutartige Geschwulst, deren Einzelteile sich so mit der Geburtsrate λ und Sterberate μ vermehren, wie eine Bevölkerung sich durch Geburts- und Sterbefälle verändert. Die grauen Zellen können in Mutanten der zweiten Art, sogenannte „schwarze Zellen“ übergehen, für die entsprechend die Raten L und M verwendet werden. Die beiden Gruppen unterscheiden sich dadurch, daß $\mu > \lambda$, aber $M < L$ ist. Das bedeutet, daß im zweiten Falle bösartige Geschwülste vorliegen. Verf. betrachtet zunächst den Spezialfall, daß nur eine graue Zelle als Ausgangspunkt für eine Geschwulst vorhanden ist, und geht dann zum allgemeinen Fall über. Es werden Formeln angegeben für den zu erwartenden Anteil an bösartigen Tumoren. Dieser hängt von der Intensität des Karzinogens ab. Neyman und Scott (On certain stochastic models of population dynamics, Science 1959, im Druck) nehmen an, daß die Wirkung der Dosis direkt proportional ist. Andere Forscher sind der Ansicht, daß ein gewisser Schwellenwert überschritten werden muß, ehe überhaupt eine Wirkung erzielt werden kann.

G. Reifig.

Schwartz, Lorraine und Stanley Wearden: A distribution-free asymptotic method of estimating, testing, and setting confidence limits for heritability. Biometrics 15, 227—235 (1959).

In genetischen Experimenten kann man nicht immer voraussetzen, daß die Zufallsvariablen normalverteilt sind. Verf. beschreibt eine verteilungsfreie Methode zur Schätzung der Erblichkeit. In dem Ausdruck $H = f\Delta_0/\Delta_p$ ist Δ_0 die Differenz der arithmetischen Mittel der zwei Gruppen der Nachkommenschaft und Δ_p das durchschnittliche Selektionsdifferential der Elterngeneration; f ist eine Konstante. H ist der Schätzwert, $E(H)$ der wirkliche Wert des Erblichkeitsfaktors. Sollen Angaben über das Vertrauensintervall oder den Wert gewisser Hypothesen gemacht werden, so muß man die Verteilung von H kennen. Der Verf. ordnet die Beobachtungswerte der Größe nach und gibt ihnen die Rangnummern H_r . Er zeigt, daß seine

Testgröße eine Funktion der von Mann und Whitney [Ann. math. Statist. 18, 50—60 (1947)] eingeführten Größe U ist und entsprechende Eigenschaften hat. Für den Erblichkeitsfaktor $E(H)$ bzw. $E(H_r)$ gibt er eine Punktschätzung und ein Vertrauensintervall an. Anschließend wird die Hypothese getestet, daß keine Vererbung vorliegt. Als Beispiel wird eine Schar Hennen betrachtet. Insbesondere soll festgestellt werden, ob die Stellung der Mutter innerhalb der Gemeinschaft von der Tochter geerbt wird. Dazu werden die Tiere in zwei Gruppen geteilt; die einen herrschen über die anderen.

G. Reißig.

Nikaidō, Hukukane: On a method of proof for the minimax theorem. Proc. Amer. math. Soc. 10, 205—212 (1959).

This proof does not depend on either separation theorems, or fixed point theorems (as do most of the proofs of the Minimax Theorem), but on methods of calculus, suggested by the argument (cf. Brown-v. Neumann this Zbl. 41, 255). — The precise statement of the theorem to be proved is as follows: Let X and Y be convex sets, compact with respect to certain Hausdorff topologies, in which the mappings $t \rightarrow (1-t)x + tu$: $[0, 1] \rightarrow X$ and $t \rightarrow (1-t)y + tv$: $[0, 1] \rightarrow Y$ are continuous, where $x, u \in X$ and $y, v \in Y$. Let the (pay-off) function $f(x, y)$ be a continuous concave function of x on X for any fixed $y \in Y$, and a continuous convex function of y on Y for any fixed $x \in X$. Then there exists $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ such that $f(x, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, y)$ for all $(x, y) \in X \times Y$. The proof begins with introducing $K(u, v; x, y) \equiv f(u, y) - f(x, v)$ with (u, v) and $(x, y) \in X \times Y$, whereby the problem is reduced to finding (\hat{x}, \hat{y}) such that $K(u, v; \hat{x}, \hat{y}) \leq 0$ for all (u, v) in $X \times Y$. The author adds remarks about special cases, such as games on the unit square, and matrix games, and also on the duality theorem of linear programming.

S. Vajda.

Williams, K. B. and K. B. Haley: An application of linear programming in the mining industry. Elektron. Datenverarbeitung Nr. 4, 5—10 (1959).

Zusammenfassung: In einem Gebiet des National Coal Board sind Koks-kohlen 37 verschiedener Qualitäten von 28 Schachtanlagen zu 7 Zentralwäschern zu transportieren. Das Mischprogramm für die Einsatzkohlen ist so aufzustellen, daß zwei Sorten Koks — Hochofenkoks und Gießereikoks — erzeugt werden können. Unter Berücksichtigung verschiedener Nebenbedingungen wird ein langfristiger Rahmen-Zuteilungsplan aufgestellt, der wöchentlich entsprechend dem Bedarf und den zur Verfügung stehenden Mengen geändert und neu festgesetzt werden kann. Unter der Voraussetzung eines 100%igen Beschäftigungsgrades mit konstanten Aufbereitungskosten und Erlösen besteht die Aufgabe darin, die Transportkosten zu minimieren. Die Optimalisierung des Transportproblems ergab eine jährliche Ersparnis von 8% (in diesem Fall gleich 240 000,— DM) der ursprünglichen Transportkosten. Im Anhang werden die mathematischen Formulierungen sowie ein Beispiel mit Lösungen nach dem Floodschen Berechnungsverfahren gegeben.

Zusammenfassung der Autoren.

Amoroso, Luigi: L'orizzonte economico nel pensiero di Maffeo Pantaleoni. Univ. Stud. Bari Ann. Inst. Statist. 30, 29—104 (1959).

Die Ausführungen sind dem Andenken an Maestro Pantaleoni gewidmet, der in den Jahren 1886 bis 1890 als erster Direktor an der Scuola Superiore di Commercio di Bari tätig war und sich durch seine Publikation „Principi di Economia Pura“ bekannt machte. Ausgehend von der Auffassung, daß die Probleme der Oekonomie sich sehr verschiedenartig vorstellen je nachdem, von welcher Warte aus sie untersucht werden — ähnlich wie eine Gegend sich anders präsentiert, je nachdem, von welchem Stockwerk eines Turmes sie überblickt werden kann — unterscheidet der Verf. insgesamt sieben Horizonte. Vom ersten aus ergibt sich die Möglichkeit, den inländischen Markt zu studieren, so insbesondere die Abhängigkeit der Preise von Angebot und Nachfrage. Die daraus folgenden Erkenntnisse bleiben jedoch mangelhaft, weil sie den Einfluß des Außenhandels unberücksichtigt lassen, ein Mangel der

dahin fällt, sobald man von der nächst höheren Warte aus den internationalen Markt in die Betrachtungen einbezieht. Man gewinnt damit einen Überblick über die Gleichgewichtsverhältnisse, die hauptsächlich durch die Unterschiede in der technischen Produktion bestehen. Ein noch vollständigerer Überblick wird durch das Studium der politischen Einflüsse erreicht. Derartige Betrachtungen veranlassen den Verf. zu einer Auseinandersetzung mit dem historischen Materialismus und schließlich dazu, den Gegenstand der Erörterungen vom höchsten — siebenten Horizont — aus zu betrachten. Diese letzteren Ausführungen erscheinen unter der Überschrift „La scienza sociale“. Sie werden unter philosophischen und religiösen Aspekten dargelegt, sind nicht unabhängig von gewissen persönlichen Auffassungen, zeugen jedoch von einer hohen Gesinnung. — Im Anhang erscheint eine Bibliographie der instruktiven Publikationen des Autors. *P. Nolfi.*

Searf, Herbert: Bayes solutions of the statistical inventory problem. *Ann. math. Statistics* 30, 490—508 (1959).

In this paper, the author treats the inventory problem, assuming that the costs to be considered for the determination of the inventory policy, that is, the ordering cost, the holding cost and the penalty cost, are linear. The criterion to be minimized is the sum of all discounted costs incurred in future periods. The author also assumes that the demand distribution is of the exponential type with an unknown parameter ω , and that an a priori distribution has been selected for the parameter ω . Now, at the beginning of the n th period, the information available to the decision maker is a knowledge of the present stock level x , and a record of all the previous demands $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$. All of the demand information may be summarized in the sufficient statistic $s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i$. Then, the author shows that there is a sequence of non-negative functions $\bar{x}_n(s)$ so that the optimal ordering rule is to purchase $\text{Min}(\bar{x}_n(s) - x, 0)$. These critical numbers seem to be quite difficult to obtain analytically, and he gives some of their properties. For instance, he shows that $\bar{x}_n(s)$ is a monotone increasing function of s , and permits the asymptotic expansion $\bar{x}_n(s) \sim x(s) + a(s)/n$, where $\bar{x}(s)$ and $a(s)$ are calculable quantities. *K. Matusita.*

Mills, Edwin S.: A note on seasonal inventories.

Brennan, Michael J.: Reply. *Econometrica* 28, 919—920, 921—922 (1960).

Boot, J. C. G. and G. M. de Wit: Investment demand: An empirical contribution to the aggregation problem. *Internat. econom. Review* 1, 3—30 (1960).

Ausgehend von der Aggregationstheorie von Theil wird nach der Investitionstheorie von Grunfeld die nachstehend aufgeführte Grundgleichung aufgestellt und an Hand des Erfahrungsmaterials von 10 großen amerikanischen Körperschaften, die im Jahre 1952 zusammen rund 7% des privaten Anlagekapitals der USA erfaßten, ausgewertet und getestet. Wird mit $I(t+1)$ die Brutto-Investition, d. h. einschließlich Erhaltungskosten der Anlagewerte, bezeichnet und bedeutet $F(t)$ die Höhe des ausgegebenen Aktienkapitals „Markt-Wert der Unternehmung“, $C(t)$ das bestehende effektive Aktienkapital, so folgt die Beziehung: $I(t+1) = q_1 c_1 + q_1 c_2 F(t) + (q_2 - q_1) C(t)$. c_1 und c_2 sind zwei Konstanten, während q_1 die veranlagte Investitionsrate und q_2 den Anteil des Grundkapitals $C(t)$ für die Re-Investitionen und die Unkosten bezeichnen. Wie die Verff. ausführen, haben die Vergleiche mit den Erfahrungswerten gezeigt, daß die angeführte Formel eine zuverlässige Voraussage gestattet und gegenüber den bisherigen diesbezüglichen Versuchen den Vorzug verdient. Ob und inwieweit die Methode sich allgemein zu bewähren vermag, kann von außen her nicht beurteilt werden, doch gewinnt man den Eindruck, daß hauptsächlich der in den Vordergrund gestellte Grundgedanke, durch direkte Bezugnahme auf die Erfahrungsdaten eine weitgehende Anpassung anzustreben, für eine allgemeine Verwertbarkeit der Methode spricht. *P. Nolfi.*

Fourgeaud, C. et A. Nataf: Consommation en prix et revenu réels et théorie des choix. *Econometrica* 27, 329—354 (1959).

Verff. haben sich zum Ziel gesetzt, gewisse Funktionen F aufzustellen, um die Konsumtion in Funktion des Einkommens und der Preise in möglichst einwandfreier Weise auszudrücken. Ihr Anliegen war, möglichst einfache Modelle des wirklichen Geschehens nachzubilden: diese einerseits auf mathematisch klare Grundsätze zu stellen und sie andererseits zugleich auch so zu gestalten, um mit genügender Schärfe den Einfluß der Preisveränderungen auf das Ausmaß der Konsumtion wenigstens für kürzere Zeitabschnitte in zuverlässiger Weise vorauszuberechnen. Durch eine exakte Analyse der Relation zwischen den Elastizitäten und den sich daraus ergebenden Hypothesen wird eine Lösung hergeleitet, die vom Standpunkt der mathematischen Ökonomie verwertbar erscheint. Es ergeben sich zwei Typen von Funktionen, aus denen insbesondere auch die Gleichungen der Indifferenzflächen abgeleitet werden können. — Wie am Schlusse des Berichtes ausgeführt wird, bildet die Tatsache, daß die Theorie der Auswahl die Erscheinungen der Realität mitunter nicht oder nur mangelhaft zu erklären vermag, die Hauptsorge des Theoretikers. Ein Ausbau der Theorie im Sinne einer weiteren „Bereinigung“ auf dem vorgezeichneten Wege erscheint deshalb besonders erwünscht. Erst dadurch dürfte es gelingen, mit der Zeit den praktischen Anforderungen und den realen Erscheinungen besser gerecht zu werden.

P. Nolfi.

Bronfenbrenner, Martin und Thomas Mayer: Liquidity functions in the american economy. *Econometrica* 28, 810—834 (1960).

Dietrichs, Bruno und Reimut Jochimsen: The long-run development of national income in Germany: A review article. *Internat. econom. Review* 1, 230—237 (1960).

Chuard, Jules: Sur le rendement des obligations amortissables par annuités constantes. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 60, 215—228 (1960).

Nachdem sich der Verfasser früher (dies. Zbl. 85, 358) mit der Renditenbestimmung von Wertpapieren mit festem Verfall befaßt hat, untersucht er in vorliegender Arbeit in analoger Weise die Renditenbestimmung mittels einer Arbeitsformel bei Annuitätenleihen. Die Ergebnisse der Arbeitsformel werden in zahlreichen numerischen Beispielen mit den genauen Werten in Vergleich gestellt.

Zusammenfassung des Autors.

Amsler, Marc-Henri: Note relative au calcul numérique des tarifs d'assurance de groupe TG 1960 $2\frac{1}{2}\%$. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 60, 269—273 (1960).

Es wird ein numerisches Verfahren angegeben, welches einem elektronischen Rechenautomaten ermöglicht, durch eine einzige Rekursionsformel unmittelbar aus der Überlebensordnung l_x sämtliche Elemente der Gruppenversicherungstarife TG 1960 $2\frac{1}{2}\%$ auszurechnen.

Zusammenfassung des Autors.

Raillard, Georges: Remarque sur les assurances en cas de décès sur deux têtes. *Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français* 70, 273—278 (1959).

Bekanntlich gestaltet sich die Prämienberechnung für Versicherungen auf mehrere Leben etwas umständlich, weil die entsprechenden Verbindungswerte benötigt werden. Bei Rentenversicherungen kann gezeigt werden, daß auf Grund von Näherungsmethoden, insbesondere durch Zurückführung auf ein Zentralalter, die Kalkulation wesentlich abgekürzt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird nachgewiesen, daß ähnliche Vereinfachungen sich auch bei Todesfallversicherungen auf mehrere Leben erzielen lassen, und zwar sowohl für Versicherungen auf das erste als auch für solche auf das zweite Ableben. Die Beweisführung erfolgt durch passende Zerlegung der Versicherungskombination auf zwei Leben. Dabei treten auch hier die besonderen Vorzüge der Makehamschen Sterbeformel deutlich zum Vorschein.

P. Nolfi.

Wyss, Hans: Kriterien für die Solvabilität einer Lebensversicherungsgesellschaft? *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 60, 171—186 (1960).

Verf. geht von der richtigen Feststellung aus, daß durch die Aufstellung von Kriterien für die Beurteilung eines Tatbestandes nicht verhindert werden kann, daß

immer wieder wesentliche Merkmale einer Erscheinung verwischt werden. Daraus folgt, daß die Vorgabe eines umfassenden Kriteriums eine sorgfältige Abwägung hinsichtlich seiner Aussagekraft erfordert. — In der Lebensversicherung stellt sich diese Aufgabe bei der Prüfung der Solvenz einer Gesellschaft, so z. B. durch die Aufsichtsbehörde. Hier ist hauptsächlich zu entscheiden, welche Sicherheiten hinsichtlich Deckung der Sterbefälle und Schutz vor Kapitalverlusten geboten werden. Diese Obliegenheit erlangte besondere Bedeutung in Beratungen zur Einführung einer zwischenstaatlichen Freizügigkeit in der Staatsaufsicht der Versicherungsgesellschaften. Im Vordergrund stand der Gedanke, die Zulassung von Versicherungsinstitutionen zum Geschäftsbetrieb durch Aufstellung eines internationalen Solvabilitäts-Kriteriums zu erleichtern. Ein beachtenswerter Vorstoß in dieser Richtung ist der Plan Campagne. Wie der Verf. jedoch überzeugend darlegt, vermag dieser Plan trotz seiner unverkennbaren Vorzüge noch kein universales Kriterium im dargelegten Sinn zu vermitteln. Weitere Untersuchungen in dieser Richtung erscheinen unerlässlich sowohl für die Aufsichtsbehörde als auch für die Versicherungsgesellschaften.

P. Nolfi.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Hartmanis, Juris: A note on the lattice of geometries. Proc. Amer. math. Soc. 8, 560—562 (1957).

L'A. stabilisce che il reticolo $LG(S)$ [Proc. Amer. math. Soc. 7, 571—577 (1956)] sopra un insieme finito S è complementato (Teor. 1); che esistono solo omomorfismi banali di $LG(S)$ (Teor. 2), e che il gruppo degli automorfismi di $LG(S)$ è isomorfo al gruppo simmetrico su S (Teor. 3). Tali teoremi appaiono come casi particolari di risultati più generali conseguiti dall'A. in una ricerca successiva (v. la recensione seguente).

L. Lombardo-Radice.

Hartmanis, Juris: Lattice theory of generalized partitions. Canadian J. Math. 11, 97—106 (1959).

L'A. chiama partizione di tipo n su di un insieme finito S (composto da n , o più, elementi) una collezione di sottoinsieme (o „blocchi“), P , di S , composto ciascuno da almeno n elementi, tale che n elementi distinti sono contenuti esattamente in un blocco. Per $n = 1$ si hanno le ordinarie partizioni, per $n = 2$ le „geometrie su S “, nelle quali i blocchi sono le „rette“ [Proc. Amer. math. Soc. 7, 571—577 (1956)]. Si introduce un ordinamento parziale tra le partizioni di tipo n su S ponendo $P_1 \leq P_2$ quando ogni blocco della partizione P_1 è contenuto in un blocco della P_2 . Si vede allora che dette partizioni formano un reticolo completo, $LP_n(S)$. $LP_n(S)$ è isomorfo al reticolo dei sottospazi di una opportuna geometria (Teor. 1). L'A. passa poi alla caratterizzazione delle geometrie, per le quali il reticolo dei sottospazi è isomorfo a un qualche $LP_2(S) = LG(S)$ per un opportuno S ; tale caratterizzazione è da lui conseguita con il Teor. 2. L'A. estende poi al caso di n qualunque lo studio reticolare di $LP_n(S)$ da lui svolto per $n = 2$ in una precedente Nota (v. la recensione precedente); dimostra, tra l'altro, che $LP_n(S)$ è complementato (Teor. 4), che $LP_n(S)$ è privo di omomorfismi non banali (Teor. 5); che il gruppo degli automorfismi di $LP_n(S)$ è isomorfo al gruppo simmetrico su S . Risulta, infine, da questo lavoro e dai precedenti prima richiamati, che ogni reticolo finito è isomorfo a un subreticolo di un $LP_n(S)$, se $n \geq 2$; resta ancora aperto il problema (posto a suo tempo da Garrett Birkhoff) se lo stesso risultato sia, o no, valido per $n = 1$.

L. Lombardo-Radice.

Havel, Václav: Eine Bemerkung zum Staudtschen Satz in der Moufang-Ebene. Czechosl. math. J. 7 (82), 314—317, russ. Zusammenfassung 317 (1957).

In einer früheren Arbeit [*] (dies. Zbl. 66, 139) hatte Verf. fälschlicherweise behauptet, man könne den Beweis von L. K. Hua (dies. Zbl. 50, 260), daß jeder Semihomomorphismus eines nullteilerfreien assoziativen Ringes ein Homomorphismus oder Antihomomorphismus ist, auf Alternativringe übertragen. Der Fehler wurde von L. A. Skornjakov (Ref. Žurn. Mat. 1956, 6833) bemerkt. In der vorliegenden Note wird zunächst die in [*] behauptete Äquivalenz von Semihomomorphismen und Jordanhomomorphismen für Alternativringe der Charakteristik $\neq 2$ bestätigt. Dann wird das Hauptergebnis aus [*] in einer berichtigten Form bewiesen: Jede umkehrbare Abbildung zwischen zwei Geraden einer Moufangebene der Charakteristik $\neq 2$, welche die harmonische Lage von Punktequadrupeln erhält, setzt sich aus einer Projektivität und einer von einem Semiautomorphismus des Koordinatenbereichs induzierten Abbildung zusammen. Ein Semiautomorphismus läßt sich dabei als ein die Identität $(x^2)^\sigma = (x^\sigma)^2$ erfüllender Automorphismus σ der additiven Gruppe des Alternativkörpers kennzeichnen.

H. Salzmann.

● Vyšín, Jan: Das Axiomensystem der Euklidischen Geometrie. [Soustava axiomů eukleidovské geometrie.] Praha: Nakladatelství Československé Akademie Věd 1959. 209 S. Kčs 18,90 [Tschechisch].

In this book the axiomatic foundations of euclidean geometry are given in the way following D. Hilbert's method. The straight lines and planes are considered as sets of points. In the introduction the development and importance of axiomatic method are explained. The proper contents are divided into three chapters, dealing with the geometry of the straight line, plane and space respectively. The author pays a great attention to the constructions of equivalent sets of axioms. E. g. for the second group of axioms (in the Hilbert's sense) there are given three equivalent sets of axioms with the following basic concepts: "equivalent ordered couples of points", "between", "the straight line separating two points". 10 theorems equivalent to parallel axiom are dealt with. Many models, in which particular groups of axioms are valid, are constructed in details. Mostly only such theorems following from introduced axioms are derived, which are needed for a proof of equivalence of axioms. The book is written clearly, in the main parts no special mathematical knowledges are needed, several basic concepts of projective and euclidean geometry are used in the constructions of the models. In text, no references to the literature are given.

M. Sekanina.

Nguen Kan Toam: Einige neue Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung im elliptischen Raume. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 1 (8), 136—144 (1959) [Russisch].

Eigenschaften von Kegelschnitten und Quadriken in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie sind in älterer Zeit von Killing (Nicht-euklidische Raumformen, Leipzig 1885) und Coolidge (The elements of non-euclidean geometry, Oxford 1909) behandelt worden, in neuerer Zeit durch B. A. Rozenfel'd (Nichteuklidische Geometrien, Moskau 1955 [Russisch]). Verf. fügt den dort entwickelten Grundtatsachen weitere für den elliptischen S_3 , meist ohne Beweis, hinzu. Zunächst ist die größere Komplikation aller Dinge gegenüber dem euklidischen Fall zu beachten. So hat eine Ellipse im allgemeinen 3 Zentren und ein Ellipsoid 4 Fokalkegel sowie dual dazu auch 4 Fokalkegelschnitte. Durch je 3 der 4 Spitzen der Fokalkegel werden die 4 Hauptebenen der Quadrik definiert. Man unterscheidet damit die Ellipsoide von den Hyperboloiden. Die Ellipsoide besitzen zum Unterschied von den Hyperboloiden eine nicht reell schneidende Hauptebene. Verf. gibt nun zunächst einige metrische Beziehungen zwischen den Konstanten der Quadriken und ihren Fokalgebilden. Diese Konstanten, die Analoga der Halbachsen, treten im Falle der elliptischen Geometrie natürlich als Winkelgrößen auf. Dann werden einige Örter bestimmt, z. B. folgende: Ort der Mitten aller Strecken, deren Geraden einen festen Punkt P enthalten; Einhüllende aller Ebenen, deren Schnittkegelschnitt mit der

Quadrik ein Zentrum auf einer festen Geraden hat. Beides sind Örter 3. Grades. Bemerkenswert ist auch die Übertragung des folgenden, im euklidischen R_3 von Carcanague [Revue Math. spéc. 66, 189–191 (1956)] gefundenen Satzes. Der Ort der Zentren aller Sphären, die einen Kreis unter konstantem Winkel schneiden und den Punkt F enthalten, ist eine Quadrik mit F als Brennpunkt. Im S_3 zerfällt der auf dieselbe Weise definierte Ort in zwei Quadriken, die sich doppelt berühren. Es wird ferner noch kurz auf den Fall der Drehquadriken eingegangen, die wieder durchaus analog zum R_3 sind, sowie auf die Hyperkegel eines vierdimensionalen euklidischen, elliptischen oder hyperbolischen Raumes. Bei diesen gilt das besondere Interesse den sphärischen Schnitten.

W. Burau.

Elementargeometrie:

• Kostovskij, A. N.: Geometrische Konstruktionen mit dem Zirkel allein. [Geometričeskie postroenija odnim cirkuleŋ.] (Populäre Vorlesungen über Mathematik, Lfg. 29). Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 63 S. R. 0,90. [Russisch].

Das klar geschriebene und mit übersichtlichen Figuren versehene Büchlein wendet sich an Leser, die nur elementargeometrische Vorkenntnisse haben. Im ersten Kapitel werden die klassischen Mohr-Mascheronischen Konstruktionen entwickelt. Verf. beweist nicht nur die Lösbarkeit aller mit Zirkel und Lineal lösbaren Konstruktionsaufgaben, sondern gibt auch für viele Einzelaufgaben besonders einfache Lösungen. Nach einer Behandlung der Inversion folgen im zweiten Kapitel Konstruktionen mit dem Zirkel allein, wenn die Zirkelöffnung nach oben oder unten beschränkt ist.

H. Lenz.

Finsler, P.: Näherungskonstruktionen für den Kreisumfang. Elemente Math. 14, 121–123 (1959).

Verf. beschreibt eine einfache Näherungskonstruktion für den ganzen Kreisumfang, welcher der Näherungswert $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{97} = 3,141476 \dots$ für π entspricht, und gibt eine verschärfte Konstruktion mit dem Näherungswert $x(1 + 30^{-3}) = 3,14159265127 \dots$ an. Einige weitere, bekannte Konstruktionen werden erwähnt.

L. Kosmák.

Court, N. A.: Four intersecting spheres. Amer. math. Monthly 67, 241–248 (1960).

Vier einander schneidende Kugeln (A) , (B) , (C) , (D) bestimmen, zu je 3 genommen, vier Paare (e) von Punkten. (M) sei die zu den gegebenen Kugeln orthogonale Kugel. $(T) = ABCD$ sei das von den Mittelpunkten jener Kugeln gebildete Tetraeder. $(T') = A'B'C'D'$ sei das zu (T) bezüglich (M) polarreziproke Tetraeder; (d) die adjungierten Kugeln (A') , (B') , (C') , (D') mit Mittelpunkten in den Ecken von (T') und orthogonal zu (M) . Die 8 Punkte (e) bestimmen $2^4 = 16$ „Schnitt-Tetraeder“ der gegebenen Kugeln. Sie zerfallen in 8 „Paare von komplementären Schnitt-Tetraedern“, von denen jedes Paar alle 8 Punkte umfaßt. Die Tetraeder jedes Paares sind perspektiv, das Zentrum der Perspektivität ist der Mittelpunkt M der Kugel (M) . Ihre acht Perspektivitätsebenen fallen mit den acht Ähnlichkeitsebenen der vier adjungierten Kugeln zusammen. Die Radikalebene der Umkugeln eines Paares von komplementären Schnitt-Tetraedern fällt mit der Perspektivitätsebene der beiden betrachteten Tetraeder zusammen. Die beiden Kugeln sind invers bezüglich (M) und werden isogonal von jeder der gegebenen Kugeln geschnitten. Verf. beweist die Eigenschaften dieser Konfiguration.

M. Zacharias.

Sydlér, J.-P.: Sur quelques polyèdres équivalents obtenus par un procédé en chaînes. Elemente Math. 14, 100–109 (1959).

Die Frage, ob die Dehnschen notwendigen Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit von Polyedern hinreichen, ist noch immer ungelöst. Verf. setzt die Reihe

seiner Untersuchungen dieses Problemkreises fort. Er betrachtet Ketten von Ebenen π_i durch einen festen Punkt P , so daß π_i auf π_{i+1} senkrecht steht; insbesondere geschlossene Ketten. Mit ihrer Hilfe konstruiert Verf. Paare zerlegungsgleicher Polyeder.
H. Lenz.

Sydler, J.-P.: Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0). *Elemente Math.* 15, 97—99 (1960).

Deux polyèdres sont dits équivalents (mod. 0) lorsque leur différence est équivalente à un cube. Nous allons donner des exemples de couples de tétraèdres jouissant de cette propriété.

Lenhard, H.-Chr.: Zerlegung von Tetraedern in Orthogonaltetraeder. *Elemente Math.* 15, 106—107 (1960).

In „Ungelöste Probleme Nr. 13“ führt H. Hadwiger aus, daß für die Dimensionen $k > 2$ ungeklärt sei, ob sich ein Simplex in lauter Orthogonalsimplexe zerlegen läßt. Im Fall $k = 3$ habe ich jedoch ein Verfahren gefunden, Tetraeder so in Orthogonaltetraeder zu zerlegen, daß deren Anzahl höchstens 12 beträgt.
Aus der Einleitung.

Aškinuze, V. G.: Über die Zahl der halbbregulären Polyeder. *Mat. Prosvesčenie* 1, 107—118 (1957) [Russisch].

Unter einem halbbregulären oder archimedischen Polyeder versteht man ein solches, das von regulären, aber nicht kongruenten Polygonen berandet ist, wobei aber die Polygonsterne aller Punkte zueinander kongruent sein sollen. Abgesehen von den Prismen und Antiprismen gibt es 13 kombinatorisch mögliche Typen halbbregulärer Polyeder. Verf. untersucht als Beispiel 2 dieser Typen genauer. Der erste Typ wird von 32 Dreiecken und 6 Quadraten berandet, wobei an jeder Ecke 4 Dreiecke und ein Quadrat zusammenstoßen; der zweite Typus wird von 8 Dreiecken und 16 Quadraten begrenzt, wobei an jeder Ecke 3 Quadrate und ein Dreieck zusammenstoßen. Mittels sorgfältiger und durch 10 Bilder unterstützter Diskussion der ebenen Netze und der Möglichkeiten, aus ihnen entsprechende Polyeder zusammenzulegen, ergibt sich im ersten Fall genau eine metrische Realisierbarkeit eines Polyeders vom genannten Typ, im zweiten Fall gibt es jedoch 2 verschiedene, nicht isomorphe Realisierungen.
W. Burau.

Vogler, H.: Ein räumliches Analogon zur Aufgabe von Ottajano. *Elemente Math.* 15, 101—103 (1960).

Die im Jahre 1788 von A. Giordano aus Ottajano gestellte Aufgabe besteht darin, ein n -Seit zu konstruieren, das einem gegebenen Kreis ein- und gleichzeitig einem gegebenen n -Eck umschrieben ist. Hier soll nun die Übertragung des Problems auf den Raum vorgenommen werden: Es ist ein (im allgemeinen windschiefes) n -Seit gesucht, das einer gegebenen einteiligen Quadrik Φ ein- und gleichzeitig einem gegebenen (im allgemeinen nicht ebenen) n -Eck umschrieben ist.
Aus der Einleitung.

Kooistra, R.: Einige Ungleichungen. *Elemente Math.* 15, 79—80 (1960).
 F : Flächeninhalt eines Dreiecks Δ ; F_P : Flächeninhalt des Fußpunktdreiecks eines Punktes P im Innern des Umkreises von Δ . Aus $F_P \leq \frac{1}{4} F$ werden durch spezielle Wahl von P Ungleichungen abgeleitet.

Schopp, J.: The inequality of Steensholt for an n -dimensional simplex. *Amer. math. Monthly* 66, 896—897 (1959).

Die Ungleichung von G. Steensholt für Dreiecke (vgl. dies. Zbl. 71, 362) wurde von V. Thébault auf Tetraeder ausgedehnt [*Amer. math. Monthly* 64, 744—745 (1957)]. Verf. beweist die Ausdehnung der Steenholtischen Ungleichung für ein n -dimensionales Simplex.
M. Zacharias.

Algebraische Geometrie:

Terpstra, Fedde J.: On the neighbour points of a projective space. *Math. Ann.* 133, 160—172 (1957).

On définit les points proches au moyen de transformations quadratiques cremonniennes du S_n . On obtient ainsi un exposé systématique de la théorie plus simple, en plusieurs endroits, que ceux connus jusqu'au présent. Voici un des résultats les

plus intéressants: Etant donnée une succession de points P_0, P_1, \dots, P_r , dont chacun est voisin du premier ordre du précédent, la succession (chaîne de P_0 à P_r) est déterminée univoquement par P_0 et P_r . (N. du Rap. L'affirmation de l'A. selon laquelle la théorie est applicable au cas d'un corps de base k non algébriquement fermé, ne semble justifiée que si l'on se borne à considérer des points rationnels par rapport à k .)

G. Ancochea.

Turri, Tullio: Le trasformazioni birazionali dello spazio aventi superficie di punti uniti. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 29, 6—9 (1959).

L'A. se propose de démontrer qu'une transformation birationnelle de l'espace, non cyclique, ayant une surface de points unis, est une transformation de Jonquières. Il se base sur l'existence d'une congruence linéaire de courbes rationnelles invariantes pour la transformation. Cette existence n'est pas prouvée.

L. Godeaux.

Turri, Tullio: „Regolarità“ delle superficie normali invarianti in un'omografia ciclica. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 29, 1—5 (1959).

L'A. veut démontrer qu'une surface algébrique normale F , invariante pour une homographie cyclique, est régulière. En premier lieu, il se base sur le fait que si F contient un système continu de systèmes linéaires et si l'un de ceux-ci est invariant pour l'homographie, il en est de même des autres. La démonstration qu'il en donne est erronée. Une seconde démonstration est également erronée.

L. Godeaux.

Severi, Francesco: Sulle irregolarità delle varietà algebriche. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 27, 3—13, 149—154 (1959).

I. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 35, 153, vgl. auch dies. Zbl. 84, 170) hat Verf. einen neuen Beweis für die Relation von Severi-Kodaira in Aussicht gestellt, der auf einer neuen (nur mit den Mitteln der klassischen algebraischen Geometrie geführten) Herleitung der Beziehung $i_{d-1} = q_d + q_{d-1}$ beruhen sollte. Dieser Beweis wird hier für eine in einen S_{d+1} eingebettete Varietät V_d geführt, deren Singularitäten nur aus einer Doppelmannigfaltigkeit W_{d-2} bestehen. Das ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn die Hypothese, daß jede irreduzible Varietät V_d ein singularitätenfreies Modell in einen Raum genügend hoher Dimension besitzt, als richtig angenommen wird. i_k ($k = 1, 2, \dots, d$) bedeuten die Anzahlen linear unabhängiger Differentialformen 1. Gattung des Grades k auf V_d , q_k die k -te Irregularität von V_d . Der Beweis gelingt mit Hilfe der Postulationsformel und eines Satzes von Hodge, wonach ein d -faches Integral auf V_d identisch verschwindet, wenn alle Perioden verschwinden. — Bedeutet A eine beliebige, topologisch allgemeine (s. dies. Zbl. 84, 170) Hyperfläche auf der V_d , so folgt unter der Voraussetzung (die im zweiten Teil der Arbeit als überflüssig nachgewiesen wird), daß die letzte Irregularität von A mit der vorletzten, q_{d-1} , von V_d übereinstimmt, die Regularität der adjungierten Schar $|A'|$. — II. Verf. setzt die Hypothese, daß die letzte Irregularität q_d einer irreduziblen, nicht singulären V_d ($q_d = P_g - P_a$, d. i. Differenz von geometrischem und arithmetischem Geschlecht der V_d) ein topologischer Charakter der V_d ist. Dann haben alle irreduziblen, singularitätenfreien, topologisch allgemeinen Untervarietäten W_k von V_d dieselbe letzte Irregularität q_k , und diese ist auch gleich der k -ten Irregularität von V_d ($k = 1, \dots, d-1$). Die Irregularitäten q_k sind genau so wie die Anzahlen i_k absolute birationale Invarianten. Ferner folgt: Wenn A eine topologisch allgemeine Hyperfläche der V_d ist, so schneidet die adjungierte Schar $|A'|$ auf A eine kanonische Schar $|AA'|$ aus, deren Defekt gleich i_{d-1} ist. Damit ist auch wieder die fundamentale Relation $i_{d-1} = q_d + q_{d-1}$ bewiesen. Der Satz über die Regularität der adjungierten Schar kann jetzt schärfer formuliert werden: Notwendig und hinreichend dafür ist die Bedingung, daß A topologisch allgemein ist.

W. Gröbner.

Severi, Francesco: Sopra una relazione fondamentale fra taluni importanti caratteri di una varietà algebrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 28, 527—531 (1960).

Es handelt sich um die Formel von Severi-Kodaira für das arithmetische Geschlecht P_a der Varietät V_d (Bezeichnungen wie im vorstehenden Referat): $P_a = i_d - i_{d-1} + \dots + (-1)^{d-1} i_1$. Verf. beweist zunächst, daß der Defekt des kanonischen Systems $|AA'|$ gleich i_{d-1} ist. Daraus folgt $i_{d-1} = q_d + q_{d-1}$ und die obige Formel. Auch die Definition der k -ten Irregularität q_k kann etwas kürzer gefaßt werden als in der vorhergehenden Arbeit. W. Gröbner.

Severi, Francesco: Sur les irrégularités des variétés algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 635—638 (1960).

E. Marchionna (siehe dies. Zbl. 84, 170 und Severi, Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica, Vol. 3, Rom 1959) hat mit den Mitteln der klassischen algebraischen Geometrie die Formel $q_d + q_{d-1} = \delta + \sigma$ bewiesen (Bezeichnungen wie in den vorstehenden Referaten; δ ist der Defekt des Systems $|AA'|$, σ dessen Irregularität oder Überschuß). Nimmt man für A ein genügend hohes Vielfaches eines hyperebenen Schnittes, so ist sicher $\sigma = 0$. Daraus folgt $i_{d-1} = q_d + q_{d-1}$. Ferner kann der Satz von der Regularität der adjungierten Schar $|A'|$ so ergänzt werden: Wenn die adjungierte Schar $|A'|$ nicht regulär ist, so ist ihr Überschuß gleich der Anzahl σ_{d-1} der linear unabhängigen Differentialformen 1. Gattung des Grades $d-1$ auf der V_d , die auf A verschwinden. W. Gröbner.

Orgeval, Bernard d': A propos des variétés à n dimensions, possédant un congruence de variétés de dimension inférieure. Accad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 146—154 (1957).

Verf. untersucht die n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, welche eine Kongruenz von Mannigfaltigkeiten der Dimension $m < n$ enthalten, d. h. ein System, wo durch jeden gegebenen Punkt genau eine Mannigfaltigkeit V^m hindurchgeht. Es wird vorausgesetzt, daß alle Mannigfaltigkeiten V^m birational gleich sind. Dann ist es möglich zu beweisen, zuerst für die Flächen ($n = 2$) mit einem Kurvenbüschel, dann durch Erweiterung der Methode für die n -dimensionale Mannigfaltigkeiten V^n , daß V^n noch eine andere Kongruenz von Mannigfaltigkeiten der Dimension $n - m$ enthält, die auch untereinander birational gleich sind. Es bleiben jedoch einige Fragen offen, ob in allen denkbaren Fällen die betreffenden Mannigfaltigkeiten existieren können und ob man durch die Konstruktion nur die schon bekannten von L. Roth eingeführten paraabelschen Mannigfaltigkeiten bekommt oder auch andere Mannigfaltigkeiten, die allgemeiner sind. Dies hängt von der Verifizierung einer Hypothese von F. Severi ab, die bisher nur für den Fall $m = 2$ bewiesen wurde. J. Metelka.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 45, 362—372 (1959).

Es werden die regulären algebraischen Flächen untersucht, $p_a = p_g = 0$, $2 < P_2 \leq 10$, deren bikanonisches System irreduzibel ist. Wenn das bikanonische und das tetrakanonische System einfach sind, dann existiert auf der Fläche eine (natürlich nicht kanonische) Kurve Γ von solcher Art, daß 2Γ eine bikanonische Kurve ist, vom Geschlechte gleich dem Geschlechte P_2 der Fläche. Weiter sind dann $\Gamma + \Gamma'$ die trikanonischen und $2\Gamma'$ die tetrakanonischen Kurven der Fläche. Es ist noch nicht bekannt, ob die Fläche in allen Fällen existieren kann, ist es aber so, dann ist sie ein Abbild einer Involution zweiter Ordnung ohne invariante Punkte, welche auf einer Fläche mit Geschlechtern $p'_a = p'_g = 1$, $p^{(1')} = 2P_2 - 1$, $P'_2 = 2P_2$ liegt. J. Metelka.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls dont le système bicanonique est irréductible. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér. 46, 47—52 (1960).

Verf. untersucht weitere Eigenschaften der trikanonischen, tetrakanonischen und pentakanonischen Systeme einer Fläche, welche genau so gegeben wird, wie

die Fläche im vorstehenden Referat. Es wird gezeigt, daß diese Systeme mittels zweier linearen regulären Systeme von Kurven zusammengesetzt werden können, welche in speziellen Fällen auch zusammenfallen. Verf. hat der Untersuchung der nichtrationalen Flächen mit $p_a = p_g = 0$ eine große Serie von Artikeln gewidmet, die schon im Jahre 1931 beginnt. Wir wollen hier von den neueren Arbeiten auf die in diesem Zbl. 83, 368, 369; 85, 154, 155 sowie vor- und nachstehend besprochenen Arbeiten als auch die in Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 45, 52—68, 188—196 (1959) aufmerksam machen.

J. Metelka.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces algébriques de genres nuls à courbes bicanoniques irréductibles. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 7, 309—322 (1959).

Verf. untersucht eine algebraische Fläche F vom arithmetischen Geschlecht $p_a > 2$, welche eine zyklische Involution p -ter Ordnung enthält, und die Fläche F' , das Abbild dieser Involution. Die Hauptresultate des Artikels sind: a) Ist das arithmetische Geschlecht der Fläche F' $p'_a > 0$, so hat das kanonische System von F p lineare Teilsysteme, $p-1$ von ihnen von der Dimension p'_a und eins — das Urbild des kanonischen Systems von F' — von der Dimension $p'_a - 1$. — b) Ist $p'_a = 0$, so ist $p = p_a + 1$ und das kanonische System von F hat $p-1$ isolierte Kurven. — c) In demselben Falle, wie bei b), hat die Fläche F' irreduzible bikanonische Kurven; es ist $p'_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = s$ oder $s-1$, je nachdem die Ordnung der Involution $p = 2s$ oder $p = 2s-1$. Das projektive Modell der Fläche F , bei welchem sich die kanonischen Kurven von F auf die Hyperebenenschnitte eines projektiven Raumes abbilden, liegt auf s Hyperquadriken für ungerades p und auf keiner Hyperquadrik für gerades p . In weiterem werden noch einige Eigenschaften der n -kanonischen Systeme der Fläche F für p prim abgeleitet.

J. Metelka.

Spampinato, Nicolò: La congruenza $(S_3)_{12}$ dell' S_{15} immagine dell' S_3 quadri-complesso di C. Segre ambiente di ∞^{12} sistemi lineari ∞^2 di rigate cubiche del Cayley. Ricerche Mat. 8, 163—171 (1959).

Wenn eine algebraische Fläche $f(x_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) der Ordnung n des komplexen dreidimensionalen Raumes ins quadripotentielle Gebiet fortgesetzt wird, so begegnet man einer Hyperfläche V_{14}^n des Raumes S_{15} , mit folgender Gleichung:

$$6 \sum t_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + 6 \sum y_i z_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum y_i y_j y_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} = 0.$$

Sie enthält ∞^{12} Cayleysche Regelflächen eines von der gegebenen Form unabhängigen Systems. Es werden hier die Einzelheiten dieser Darstellung entwickelt.

E. Togliatti.

Spampinato, Nicolò: Ipersuperficie dell' S_{11} , composta con una congruenza di coniche, determinata da una forma dell' S_3 . Ricerca, Rivista Mat. pur. appl., II. Ser. 10, Nr. 2, 1—6 (1959).

Die hier betrachtete Hyperfläche entsteht durch Fortsetzung ins tripotentielle Gebiet einer algebraischen Form der Ordnung n , $f(x_i)$, des gewöhnlichen dreidimensionalen komplexen Raumes. Sie hat die Gleichung:

$$2 \sum z_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \left(\sum y_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^{(2)} = 0,$$

wo die x_j, y_j, z_j ($j = 1, 2, 3, 4$) homogenen Koordinaten im S_{11} bedeuten. Diese Hyperfläche hat die Ordnung n , und enthält ∞^9 Kegelschnitte einer ∞^{10} Kongruenz 1. Ordnung, die von der gegebenen Form $f(x_i)$ unabhängig ist, und die hier beschrieben wird.

E. Togliatti.

Gibson, R. O. and J. G. Semple: Cayley models of some homaloidal curve-systems of S_3 . Proc. London math. Soc., III. Ser. 7, 75—86 (1957).

Anfangspunkte der vorliegenden Abhandlung ist die bekannte Cayleysche analytische Darstellung einer algebraischen V_d^n eines Raumes S_r ; für $d = 1, r = 3$, d. h. für eine algebraische Kurve des S_3 , besteht diese aus der Gleichung n -ten Grades $\Phi(p) = 0$, in den Plückerschen Linienkoordinaten p_{ij} , des aus den Treffgeraden der

Kurve gebildeten Strahlenkomplexes. Die Gleichung $\Phi(p) = 0$ kann auch in der Form geschrieben werden: $\Phi(p) + (p_{01} p_{23} + p_{02} p_{31} + p_{03} p_{12}) \psi(p) = 0$, wo $\psi(p)$ eine beliebige Form der Ordnung $n - 2$ bedeutet; man kann die Willkürlichkeit von $\psi(p)$ benutzen, um die Gleichung zu normalisieren, z. B. durch Nullsetzen einiger geeignet gewählter Koeffizienten. Wenn dann die Koeffizienten einer solchen Gleichung als Punktkoordinaten eines Raumes angenommen werden, so erhält man eine eindeutige und ausnahmslose Abbildung aller Kurven einer C enthaltenden Familie. — Ist jetzt τ eine Cremona-Transformation zwischen zwei Räumen S_3 und T_3 und sind n, N die Ordnungen der Kurven C von S_3 und D von T_3 , die den Geraden von T_3 und S_3 entsprechen, so kann man eine normierte Cayleysche Gleichung von C bilden; diese Gleichung hat die Form $\Phi(p, P) = 0$, wo die p_{ij} und die P_{ij} Plückersche Linienkoordinaten in S_3 und T_3 sind; sie gibt gleichzeitig die Bedingungen dafür, daß die Gerade p_{ij} von S_3 eine Kurve C schneidet und eine Gerade P_{ij} von T_3 eine Kurve D schneidet; sie wird hier die Complexgleichung der Transformation τ genannt. Nimmt man die Koeffizienten $\varphi_i(P)$ der Gleichung $\Phi(p, P) = 0$ als Punktkoordinaten ξ_i in einem geeigneten Raume, und bedenkt man, daß die P_{ij} durch die übliche Plückersche Gleichung miteinander verbunden sind, so erhält man eine eindeutige (nicht mehr ausnahmslose) Abbildung des ∞^4 -Systems aller Kurven C auf die Punkte einer Quadrik des Raumes S_5 . — Der weitere Teil der Abhandlung enthält die Anwendung dieser Gedanken und die Ausführung der Rechnungen in den folgenden vier Fällen: 1. τ ist eine (2, 2)-Transformation allgemeiner Art und C ist das System aller Kegelschnitte, die einen gegebenen Kegelschnitt zweimal treffen und einen festen Punkt gemein haben; 2. τ ist eine (2, 3)-Transformation allgemeiner Art und C besteht aus C^3 , die eine Gerade zweimal treffen und drei feste Punkte gemein haben; 3. τ ist die (3, 3)-Transformation, die die Geraden von T_3 in den Kurven C^3 von S_3 verwandelt, die vier feste Punkte gemein haben; 4. C besteht aus C^3 , die vier feste Geraden je zweimal treffen und τ ist die (3, 3)-Transformation, die jene vier Geraden und ihre zwei Transversalen als Fundamentallinien besitzt. Schließlich folgen noch einige Bemerkungen über die allgemeine (3, 3)-Transformation.

E. G. Togliatti.

Andreatta, Antonio: Le superficie cubiche singolari reali. Periodico Mat., IV. Ser. 37, 86—100 (1959).

L'articolo esaurisce le più importanti questioni di realtà che offrono le superficie cubiche singolari. — La trattazione è sobria e, di proposito, ha carattere elementare; essa tuttavia colma opportunamente una lacuna in quanto sinora, sotto l'aspetto della realtà nell'ambito proiettivo, soltanto le superficie cubiche generali avevano ricevuto, e da tempo, una trattazione sistematica. — Per i tre tipi di rigata cubica reale si giunge fino all'introduzione di equazioni canoniche in campo reale, per le altre superficie cubiche singolari reali si escogita un metodo generale di studio evitando in tal modo una molesta distinzione in casi e sottocasi. *V. E. Galafassi.*

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Cech, Eduard: Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions. Czechosl. math. J. 7 (82), 599—631 (1957).

Eine Kurve C des Euklidischen Raumes E_n wird durch das System der Koeffizienten K_i ihrer Frenetschen Formeln erfaßt. Nach Einführung des Begriffes „Differentiationsklasse“ (classe différentielle) einer skalaren und allgemeiner einer vektoruellen Funktion — cl $f(t) = r$ bedeutet die genau r -malige stetige Differenzierbarkeit von $f(t)$ nach t — wird die „Differentiationsklasse“ der Kurve C als (endliche) Folge der Differentiationsklassen des beweglichen Punktes X von C , der Tangente T_1 , der Schmiegeebene $T_2 \dots$ des oskulierenden T_{n-1} von C in Abhängigkeit des regulären Parameters t erklärt. Die Wahl der ausgezeichneten Parameter $\sigma_i = \int K_i dt$

($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) — σ_0 bedeutet also die Bogenlänge von C — gestattet den Begriff „Differentiationstypus“ von C einzuführen. Er wird als Gesamtheit der Differentiationsklassen von C für die sukzessive Wahl von $t = \sigma_0, t = \sigma_1, \dots, t = \sigma_{n-1}$ definiert. — Verf. behandelt nun in erster Linie das Problem der Bestimmung der Differentiationsklasse von C aus den Differentiationsklassen der Koeffizienten K_i und in zweiter Linie die Aufgabe der Bestimmung des Differentiationstypus von C , wenn die Differentiationsklassen der Krümmungen k_i von C bekannt sind. — Für $n = 2$ sind die Verhältnisse leicht zu überblicken. Schon für $n = 3$, insbesondere aber für $n = 4$ erfolgt eine Fülle von Fallunterscheidungen und Aufspaltungen, die Verf. in Form von umfangreichen Tabellen bewältigt. H. R. Müller.

Schelling, Hermann von: Remarks on the intrinsic equations of twisted curves. Amer. math. Monthly **67**, 356—363 (1960).

Die Bestimmung einer Raumkurve aus Krümmung k_1 und Windung k_2 als Funktionen der Bogenlänge s_1 kann nach Darboux auf die Integration einer Riccati-schen Differentialgleichung zurückgeführt werden, von der man mehrere Lösungen kennen muß, was bei einer numerischen Auswertung großen Aufwand erfordert. Verf. gibt ein anderes, weniger aufwendiges Verfahren an. Setzt man

$$\operatorname{tg} \alpha(s_1) = k_1/k_2, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

und bestimmt die Funktionen $x(s_1)$ und $y(s_1)$ aus $dx/ds_1 = -k/\sqrt{1-r^2} \cos \alpha$, $dy/ds_1 = -k/\sqrt{1-r^2} \sin \alpha$, $r^2 = x^2 + y^2$, bei beliebigen Anfangswerten x_0, y_0 , ($x_0^2 + y_0^2 < 1$), so erhält man aus $r = \cos \beta$ die geographische Breite $\beta(s_1)$ des sphärischen Hauptnormalenbildes der gesuchten Kurve, dessen geographische Länge dann aus β und k ermittelt werden kann. Schließlich ist die Raumkurve durch ihr sphärisches Hauptnormalenbild festgelegt. P. Günther.

Franckx, Ed.: Sur les surfaces réglées gauches. Bull. Soc. roy. Sci. Liège **28**, 138—140 (1959).

La note contient la réciproque d'une propriété démontrée antérieurement (ce Zbl. **66**, 152). On considère une surface réglée $\bar{P} = \bar{M} + u \bar{i}$ où M décrit une courbe (C) rapportée à son arc s et \bar{i} est un vecteur unitaire. Sur la tangente en M à (C) on prend un point Q tel que $MP = MQ$ et du point Q on descend une perpendiculaire à la direction du vecteur $\partial \bar{P} / \partial s$. Cette droite pivote autour d'un point fixe situé sur le vecteur qui passe par M et a la direction $d\bar{i}/ds$ si et seulement si (C) est la ligne de striction de la surface. Gh. Th. Gheorghiu.

Drăgilă, P.: Sur la correspondance par parallélisme de deux surfaces. Proc. Amer. math. Soc. **9**, 189—200 (1958).

K. M. Peterson stellte die folgende Behauptung auf [Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, II. Sér. **1**, 5—43 (1905)]: „Sind zwei Flächen des dreidimensionalen euklidischen Raums durch parallele Normalen in entsprechenden Punkten aufeinander bezogen, so gehen durch jeden Punkt der einen Fläche zwei (reelle) Richtungen, die zu den entsprechenden Richtungen der anderen Fläche parallel sind. Diese beiden Richtungen sind dann bezüglich beider Flächen konjugiert.“ Verf. zeigt, an einem Gegenbeispiel, daß der erste Teil dieser Behauptung falsch ist. Weiter wird eine Beziehung des „Quasiparallelismus“ der Parameterkurven zweier durch $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$ und $\bar{y} = \bar{y}(u, v)$ gegebenen Flächen dadurch definiert, daß für alle u, v die Beziehungen: $\partial \bar{x}(u, v) / \partial u = \lambda(u, v) \partial \bar{x}(u, v) / \partial v$ und $\partial \bar{y}(u, v) / \partial v = \mu(u, v) \partial \bar{x}(u, v) / \partial u$ mit stetig differenzierbaren Funktionen λ und μ von u und v gelten sollen. Diese Beziehung des Quasiparallelismus steht in einem gewissen Gegensatz zu der durch die erwähnte Behauptung Petersons gegebenen Beziehung des „Parallelismus“ der Parameterkurven von \bar{x} und \bar{y} , bei der dieselben auf \bar{x} und \bar{y} konjugierte Netze bilden. Verf. zeigt nämlich, daß es parallel aufeinander bezogene Flächen mit quasiparallel aufeinander bezogenen Parameterkurven gibt, ohne daß die Parameterkurven auf

beiden Flächen konjugierte Netze zu sein brauchen, wie durch zahlreiche Beispiele (darunter auch von Regelflächen) belegt wird. *K. Leichtweiß.*

Werner, Helmut: The existence of surfaces of constant mean curvature with arbitrary Jordan curves as assigned boundary. *Proc. Amer. math. Soc.* **11**, 63—70 (1960).

Es sei Γ eine geschlossene Jordankurve im dreidimensionalen Raum, die in der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ enthalten ist, und H eine reelle Zahl mit $|H| < \frac{1}{2}$. In der vorliegenden Note wird die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung H bewiesen, die von Γ berandet wird. Dieser Satz stellt eine Erweiterung der vom Ref. und vom Verf. für den Fall rektifizierbarer Jordankurven bewiesenen Resultate (dies. Zbl. **55**, 153; **77**, 349)] auf den Fall beliebiger Jordankurven dar.

E. Heinz.

Garsia, Adriano: On surfaces with a rectilinear geodesic circle. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **46**, 201—213 (1958).

Verf. fragt nach Flächen im R^3 , die eine gradlinige Strecke AB enthalten, so daß die geodätische Entfernung zwischen einem festen Flächenpunkt F und den Punkten der Strecke AB konstant ist. Derartige Flächen spielen bei der Ausbreitung von Detonationsfronten eine Rolle. Es werden alle diejenigen Flächen mit der genannten Eigenschaft konstruiert, für welche zusätzlich jede Kurve, die zu der Schar der von F ausgehenden geodätischen Linien konjugiert ist, in einer Ebene durch AB verläuft. Man erhält jede solche Fläche S als Enveloppe einer Schar von Kegeln, deren Spitzen auf der Verlängerung von AB liegen und die S längs der von F ausgehenden geodätischen Linie berühren; jedes Flächenstück S ist durch die willkürliche Wahl einer gewissen ebenen Kurve bestimmt; die Konstruktion der Flächen S erfordert die Lösung eines einfachen partiellen Differentialgleichungssystems für zwei unbekannte Funktionen.

P. Günther.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Urban, Alois: Théorème fondamental de la théorie du contact des courbes. *Czechosl. math. J.* **7** (82), 273—294 (1957).

Čech gave the necessary and sufficient conditions that two curves (in S_n) having a contact of order $s-1$ do actually have a contact of order $s+\sigma-1$, with $1 \leq \sigma \leq s$. The restriction $\sigma \leq s$ is removed here.

E. Bompiani.

Drăgăilă, Pavel: Sur les transformations T des congruences de droites. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **45**, 1049—1062 (1959).

Es handelt sich hierbei um ergänzende Betrachtungen zu der Arbeit von S. Finikoff, dies. Zbl. **6**, 79.

N. K. Stephanidis.

Calapso, Maria Teresa: Intorno ad una trasformazione delle congruenze paraboliche. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **27**, 202—204 (1959).

Some complements to a previous note of the author (this Zbl. **87**, 366) related with a paper of B. Segre (this Zbl. **87**, 363).

J. A. Santaló.

Talantova, N. V.: Biaxialer Raum parabolischen Typus. *Izvestija vysš. učebn. Zaved., Mat.* **3** (10), 214—228 (1959) [Russisch].

In a 3-space consider the subgroup of projective transformations which leave invariant a given linear congruence of parabolic type; such a space B_3 having the subgroup for the fundamental group is called a biaxial space of parabolic type, and the projective transformations are called motions in B_3 . The axis of the linear congruence with Plücker coordinates $p^{\alpha\beta}$ (or its tangential $p_{\alpha\beta}$), called the absolute axis, plays an important rôle in the geometry of B_3 . The corresponding congruence and all the complexes of parabolic type containing it are also said to be absolute. Lines in B_3 may then be classified into three kinds: (1) Singular or improper lines

which belong to the absolute congruence; (2) isotropic lines intersecting the absolute axis but not belonging to the absolute congruence, and (3) ordinary or proper lines not intersecting the absolute axis. Let $a^{\alpha\beta}$ be Plücker coordinates of a complex of the absolute pencil and let $A_\beta^\alpha = a^{\alpha\sigma} p_{\beta\sigma}$; then the transformations of points $\bar{x}^\alpha = A_\beta^\alpha x^\beta$ and of planes $N \bar{\xi}_\alpha = A_\alpha^\beta \xi_\beta$ give rise to absolute involutions in which the corresponding elements are said to be conjugate. The points \bar{x} and the planes $\bar{\xi}$ are incident with the absolute axis. Utilizing the canonical tetrahedron of reference with two pairs of conjugate points as its vertices and then reducing the matrix $\|A_\beta^\alpha\|$ to a special one with elements 0 except $A_1^1 = A_2^2 = 1$, the author defines the motions by means of the equations $y^\alpha = G_\beta^\alpha x^\beta$, where the matrix $\|G_\beta^\alpha\|$ obeys the condition $\bar{y}^\alpha = G_\beta^\alpha \bar{x}^\beta$, and further determines the corresponding 8-parametric group of motions in B_3 as well as two invariant complexes $p^{\alpha\beta}$ and $c^{\alpha\beta} = \Delta(\sigma - 1) a^{\alpha\beta} - S p^{\alpha\beta}$ in the absolute pencil of complexes. When these two latter coincide together, namely, $\sigma = 1$, the group is called principal. More especially, when every complex of the absolute pencil is invariant, namely, $\sigma = 1$ and $S = 0$, then the group is called the group of parallel transports according to its similarity to ordinary parallelism. By taking the improper line through a generic point x of a surface $x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2)$ as the first normal $(x \bar{x})$ and the improper line on the tangent plane of the surface at x as the second normal $(y_1 y_2)$, where the point y_i ($i = 1, 2$) lies on the tangent $(x \partial_i x)$, the author has normalized the surface by means of Norden's method and demonstrated the fundamental theorem of surfaces in B_3 . In the remaining part of the paper are solved two problems of finding (1) the principal correspondence between a surface and a plane, namely, a correspondence in which the corresponding points lie on a general improper line, and (2) the explicit equations to a surface of null curvature.

Su Buchin.

Barabošin, N. M.: Dual-konforme Transformation des Geradenkomplexes. Izvestija vyssh. učebn. Zaved., Mat. 3 (10), 22—29 (1959) [Russisch].

Dans ce mémoire, l'A. définit une transformation des complexes de droites, qu'il appelle dualo-conforme et qui généralise la transformation K des complexes, introduite par K. N. Tichockij (ce Zbl. 60, 366). Il utilise les nombres duaux de Clifford et Study et les notions géométriques liées à ces nombres, comme celle d'angle dual de deux droites, dont on trouve l'exposé dans des ouvrages classiques, comme les „Vorlesungen über Differentialgeometrie“ de W. Blaschke. Une correspondance biunivoque entre les rayons de deux complexes est appelée transformation dualo-conforme de l'un en l'autre si elle conserve l'angle dual de deux génératrices voisines sur une surface réglée quelconque d'un complexe. L'A. établit l'existence de couples de complexes qui sont entre eux en correspondance dualo-conforme; un tel couple dépend d'une fonction arbitraire de trois arguments. Dans cette correspondance, les rayons singuliers des complexes se correspondent. L'A. signale deux invariants dont il donne la signification géométrique, relative aux éléments focaux des congruences du complexe. Il termine en présentant deux cas particuliers. Les calculs sont conduits suivant la méthode des formes extérieures de Cartan et l'A. se réfère à l'exposé de S. Finikov.

M. Decuypere.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Dolbeault, Pierre: Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe. II. Ann. of Math., II. Ser. 65, 282—330 (1957).

La première partie v. ce Zbl. 72, 406. Ces deux chapitres sont consacrés à l'étude locale des formes méromorphes, et à leur cohomologie. Grâce à des décompositions locales mettant en évidence le diviseur polaire de la forme, on montre que toute p -forme méromorphe fermée est, pour $p > 1$, le cobord local d'une $(p - 1)$ -forme

méromorphe autour de tout point où le diviseur polaire est irréductible et sans singularité; soit $\varrho = \pi\varrho_k = 0$ la décomposition en facteurs irréductibles du diviseur polaire autour d'un point 0; dans le cas où $p = 1$, il existe des coefficients A_k tels que, pour toute 1-forme π , on ait: $\pi - \sum_k \frac{A_k d\varrho_k}{\varrho_k} = d\psi$, ψ fonction méromorphe;

le diviseur $\sum A_k \varrho_k$ est le résidu de la forme π en 0. L'A. étudie ensuite la classe de cohomologie associée au système des parties singulières d'une p -forme; il montre qu'elle provient par dualité de Poincaré d'un cycle porté par l'ensemble polaire; pour qu'un diviseur soit le résidu d'une 1-forme, il suffit qu'il soit homologue à zéro lorsque la variété ambiante est Stein ou Kähler. Dans le Chapitre IV, l'A. étend un résultat antérieur de L. Schwartz sur le prologement d'une forme semi-méromorphe ω (quotient d'une forme C^∞ par une fonction holomorphe) par un courant (note VP ω : Valeur principale de ω); on tolère cette fois sur le diviseur polaire Γ la présence d'une sous-variété (elle-même régulière) Γ^2 de points singuliers de codimension deux. D'autres hypothèses sur le plongement local de Γ_2 dans Γ sont toutefois nécessaires, et la technique, qui utilise la représentation des ensembles analytiques par des polynômes distingués, est très délicate. Si le courant T prolonge la p -forme P , on peut donner de $d''T$ l'expression: $d''T = d'S + 2\pi i \sum_k \text{VP } \mathfrak{U}^k$ où S est un courant de type $(p-1, 1)$, d'' fermé sur $\Gamma - \Gamma_2$ et les \mathfrak{U}^k sont des $(p-1)$ -formes dans des représentations locales des composantes irréductibles de Γ . Si le diviseur polaire ne comporte que des facteurs de multiplicité un, le courant S est nul. On appelle résidu de la forme P la classe d'équivalence du courant $2\pi i \sum \text{VP } \mathfrak{U}^k$ modulo les cobords de $(p-2)$ -formes méromorphes autour de 0. L'A. donne pour terminer des théorèmes globaux sur la classe d'un résidu, notamment dans le cas Kähler et Stein, qui généralisent ceux du Chapitre précédent.

R. Thom.

Vesentini, Edoardo: On a class of compact Kähler varieties. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 46, 183—200 (1958).

Verf. untersucht kompakte zusammenhängende Kählersche Mannigfaltigkeiten V , zu denen es eine holomorphe Abbildung $\pi: V \rightarrow B$ auf den komplexen projektiven Raum B gibt ($0 < \dim B < \dim V$). Es wird vorausgesetzt, daß der Rang von π überall gleich der Dimension von B ist. Aus diesen Annahmen kann man im Gegensatz zum differenzierbaren Fall nicht schließen, daß (V, B, π) ein holomorphes Faserbündel ist. Man hat also auch keine Spektralsequenz zur Verfügung, mit deren Hilfe man Beziehungen zwischen den komplexanalytischen Invarianten von V und denen von B herstellen könnte. Verf. gelingt es trotzdem, einige Zusammenhänge aufzustellen. Er beweist z. B.: Es existiert eine echte algebraische Untermannigfaltigkeit Q' von B ($\dim Q' < \dim B$) derart, daß die Homomorphismen $H^{p,0}(V) \rightarrow H^{p,0}(\pi^{-1}(x))$ injektiv sind für $p = 0, 1, \dots, n = \dim V$ und für jeden Punkt $x \in B - Q'$. Insbesondere gilt also, daß $g_p = \dim H^{p,0}(V)$ für $p \geq n - b + 1$ ($b = \dim B$) verschwindet. [Verf. beweist einen allgemeineren aber ganz entsprechenden Satz über die Dolbeaultsche Gruppe $H^0(V, \Omega^p(F))$, wo das Geradenbündel F von der Form $\pi^*(H^k)$ ist ($k \leq 0$, H das zur Hyperebene von B gehörige Geradenbündel).] — Die Arbeit schließt mit einigen Bemerkungen über spezielle Fälle ($\dim V = 2, \dim B = 1$, V ist dann also eine kompakte Kählersche Fläche mit einer linearen Schar nicht singulärer Divisoren).

F. Hirzebruch.

Vesentini, Edoardo: On a class of compact Kähler varieties. II. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 47, 75—79 (1959).

“One of the results of a previous paper (vgl. das vorstehende Referat), dealing with the holomorphic projection of a compact Kähler variety onto a complex projective space B , can be extended — in a suitable form — to a more general situation, where B is any non-singular projective variety. The present note is devoted to this

generalization. Its aim is also to give some more details of the above mentioned result, whose proof, as given in the previous paper, was incomplete". Verf. gelingt es auch zu zeigen, daß die Mannigfaltigkeit Q' , die im vorstehenden Referat erwähnt wurde, leer ist.

F. Hirzebruch.

Guggenheimer, H.: Complexes avec automorphismes non admissibles. Bull. Res. Council Israel, Sect. A 6, 83—93 (1957).

Soit C un espace vectoriel gradué sur un corps valué K et ∂, \mathcal{Q} deux endomorphismes de degré -1 à carré nul sur C . Le travail comprend une étude des propriétés homologiques des complexes (C_∂) et $(C_{\mathcal{Q}})$ si ∂, \mathcal{Q} satisfont certaines relations de commutation de la forme $\mu_r \partial \mathcal{Q} + \nu_r \mathcal{Q} \partial = 0$ où $\mu_r, \nu_r \in K \setminus 0$ et r est un entier. Pour pouvoir utiliser la théorie des chaînes harmoniques l'A. suppose qu'ils existent des applications semi-linéaires S_r biunivoques de C_r dans C_r^* (dual de C_r) satisfaisant aux axiomes: 1) $\|x\| = \sqrt{|\langle x, Sx \rangle|}$ est une norme dans C_1 , 2. $|\langle x, Sy \rangle| = |\langle y, Sx \rangle|$, et pour les espaces qui ne sont pas de dimension finie 3. $\delta S_r(C_r) \subset S_{r-1}(C_{r+1})$, δ étant le transposé de ∂ . Après avoir donné dans ces conditions le théorème fondamental sur les chaînes harmoniques l'A. démontre les théorèmes suivants: T. I. $A_r(\partial) = A_r(\mathcal{Q})$ où p. ex. $A_r(\partial) = \{x | x \in C_r, \partial x = 0, \delta Sx = 0\}$ est l'espace des chaînes ∂ -harmoniques de C_r . T. II. $A_r(C) \cong A_r(C') + A_r(C - C')$, C' étant un sous-complexe de C stable par ∂ et \mathcal{Q} . Comme application on déduit: T. III. Soit V une variété kählerienne compacte avec une sous variété analytique M . Le nombre de classes de cohomologie dans $H^r(V, M)$ qui ne contiennent pas de forme harmonique est $\dim H^r(V, M) - \dim H^r(V) + \dim H^r(M)$, $H^r(V, M)$ étant calculé comme $\{\alpha | d\bar{\partial}\alpha = 0\} - \{\alpha | \alpha = d\beta + \bar{\partial}\gamma\}$. Si \mathcal{Q} est engendré par un automorphisme T de C c'est à dire $\mathcal{Q}_r = T_{r-1}^{-1} \partial_r T_r$ alors $TA_r(C) = A_r(C)$ et on déduit: T. IV. Un sous-complexe stable C' ne peut exister que si $A_r(C')$ est une somme directe de certains domaines de transitivité de T .

T. Hangan.

Guggenheimer, H.: Quelques résultats sur les variétés riemanniennes closes à groupe d'holonomie donné. I. Bull. Res. Council Israel, Sect. A. 6, 94—102 (1957).

Soit M^{4l} une variété riemannienne à $4l$ dimensions dont le groupe d'holonomie restreint est tel qu'il existe sur M^{4l} une forme extérieure ψ de degré 4 et de rang maximum à dérivée covariante nulle. Soient A et V les opérateurs qui à toute p -forme α^p font correspondre les formes $A\alpha^p = \psi \wedge \alpha^p$ et $V\alpha^p = (-1)^p * A * \alpha^p$. L'A. introduit de même un opérateur de dérivation \tilde{d} de degré 3 qui à toute p -forme de composantes $a_{i_1 \dots i_p}$ fait correspondre la $(p+3)$ -forme de composantes $h_{[ij]a_{i_1 \dots i_p, r}}$ où, désigne la dérivation covariante. Avec d (opérateur de différentiation extérieure) et \tilde{d} il définit des groupes de cohomologie $\bar{H}^r(\alpha, \tilde{\alpha})(M) = \{\alpha^r | d\alpha + \tilde{\alpha}x = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = d\beta + \tilde{\alpha}\gamma\}$. On dit qu'une forme α^r est de classe s si $\alpha^r = A^s \alpha_0^{r-4s}$, $\forall \alpha_0^{r-4s} = 0$. Soient C^r C_s^r , H_s^r respectivement les groupes de toutes les formes globales de degré r , des formes de degré r et de classe s et des formes harmoniques de degré r de classe s . L'A. démontre les théorèmes suivants: T. I. Pour $r \leq l$ on a les décompositions en somme directe

$$C^r = C_0^r + \dots + C_{[r/4]}^r, \quad H^r = H_0^r + \dots + H_{[r/4]}^r.$$

Pour $r \leq l - 4 \forall A$ est un automorphisme de C^r et de H^r . T. II. Pour $r \leq l$, $j \leq [\frac{1}{2}(l-r)]$, A^j est un isomorphisme de H^r dans H^{r+4j} . T. III. Soit V^{4k} une sous-variété fermée de M^{4l} dont le groupe d'holonomie de la métrique induite par celle de M^{4l} est de même type que celui de M^{4l} . Il existe alors une suite exacte

$$\dots \rightarrow \bar{H}^r(M, V) \rightarrow H^r(M) \rightarrow H^r(V) \rightarrow \bar{H}^{r+4}(M, V) \rightarrow \dots$$

Les résultats obtenus sont appliqués au problème des modifications des variétés.

T. Hangan.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Mampel, K. L.: Eine elementare Behandlung des Umdrehungsproblems von Kakeya, Math.-phys. Semesterber. 5, 239—251 (1957).

Verf. knüpft an eine Arbeit von Nyström (dies. Zbl. 47, 98) an und vervollkommnet sie — bei Kakeyas Aufgabe K ohne Nebenbedingung — in bezug auf die wirkliche Herstellung von Lösungsgebieten beliebig geringer Fläche. Er vollzieht sie auf zwei Stufen: Aus Páls gleichseitigem Dreieck \mathfrak{P} (der Lösung von K bei konvexem Bereich) mit der Grundlinie a , der Höhe h , der Fläche $P = \frac{1}{2} a h$ gewinnt er (I) durch Zerschneiden dieses „Kerns“ \mathfrak{P} in 2^n gleiche Teildreiecke D_r , von der Spitze S her zur Grundlinie, und durch Überschieben \mathfrak{U} der D_r nach bestimmter Vorschrift, eine Gebietsfolge \mathfrak{F} nullstrebigen Flächeninhalts. Die Umdrehbarkeit der Strecke s von der Länge h geht dabei verloren. Verf. stellt sie (II) durch Hinzufügen gewisser Zusatzgebiete wieder her. Die Einzelheiten von I und II kann dieser kurze Bericht, zumal ohne die Stütze der vom Verf. beigegebenen Zeichnungen, nur andeuten: I. h wird in $n + 2$ gleiche Teile geteilt; durch die Teilpunkte werden, von oben nach unten gezählt, Parallelen p_0, p_1, \dots, p_{n+2} zu a gezogen. Die D_r werden zu 2^{n-1} Paaren D_{2r-1}/D_{2r} , kurz δ_r , vereint, und in jedem δ_r der rechte Paarling um die Strecke $a/[2^{n-1}(n+2)]$ nach links verschoben. Die so entstehende Gestalt jedes Paares, — dessen Paarlinge auf p_2 eine gemeinsame Querlinie haben —, gilt bei den weiteren Schritten als starr. Beim zweiten werden benachbarte Paare $\delta_{2r-1}, \delta_{2r}$ zu je einem von 2^{n-2} Viererbüscheln ν_r vereint und der rechte Paarling von jedem ν_r so weit nach links geschoben, daß die genannten Paare auf p_3 eine gemeinsame Querlinie haben. Beim n -ten Schritt bricht das Verfahren mit der Herstellung des n -ten Gliedes von \mathfrak{F} ab; es hat die Fläche $\mathfrak{F}_n = 2 P/(n+2)$, $\mathfrak{F}_n \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$. — II. Die Trennlinie t_r von D_r und D_{r+1} spalte sich durch \mathfrak{U} in t'_r und t''_r ; in D_r kann man s um S nur bis zu t'_r drehen. Verf. zieht zu a die Parallelen q_k , q_{k-1} in den Abständen kh , $(k-1)h$, so angeordnet, daß a zwischen q_k und p_0 , q_{k-1} zwischen p_0 und q_k liegt, ferner die Mittelparallele zu t'_r und t''_r , die q_k in $S_{r/r+1}$ schneidet. Diesen Punkt verbindet er mit S_r und S_{r+1} durch zwei (linienhafte) Gleise $g_{r/(r+1)}$, $g_{r/(r+1)'}'$; sie und das Stück von q_{k-1} zwischen ihnen bilden das Zusatzdreieck $Z_{r/r+1}$. In dieses hinunter kann man s aus D_r auf $g_{r/(r+1)}$ verschieben, weiter s in $Z_{r,r+1}$ um $S_{r/r+1}$ drehen und von dort schließlich auf $g_{r/(r+1)'}'$ nach D_{r+1} herauf verschieben. — Alle Z haben zusammen die Fläche $Pn/[(k+1)(n+2)]$, — beliebig klein, wenn k groß genug. — In dem bisher entstandenen Gebiete I , das aus dem zersplitterten Kern, den Verschiebegleisen und den Zusatzdreiecken besteht, kann man s um 60° drehen; zu voller Umwendung führt die Zusammenstellung dreier I zu einem Gesamtgebiet \mathfrak{Q} . — Verf. zeigt, daß \mathfrak{Q} auf einer Kreisscheibe Platz hat, deren Mitte der Drehmittelpunkt von \mathfrak{Q} und deren Halbmesser $a(k+1)$ ist. L. Koschmieder.

Proskurjakov, I. V.: Über eine Eigenschaft des n -dimensionalen affinen Raumes, die mit dem Satz von Helly zusammenhängt. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 1 (85), 219—222 (1959) [Russisch].

Eine Menge \mathfrak{P} aus $n + 2$ Punkten des n -dimensionalen affinen Raumes läßt sich in zwei Teilmengen zerlegen, deren konvexe Hüllen einen Punkt gemein haben. Daraus folgt leicht der Satz von Helly, wie F. W. Levi 1951 (dies. Zbl. 44, 191) unter allgemeineren Voraussetzungen gezeigt hat. Verf. beweist dieses Ergebnis aufs Neue und zeigt, daß die Zerlegung von \mathfrak{P} eindeutig ist, wenn die Punkte aus \mathfrak{P} in allgemeiner Lage sind. Zwei dieser Punkte gehören genau dann nicht zu derselben Teilmenge, wenn sie auf derselben Seite der von den übrigen n Punkten aufgespannten Hyperebene liegen. H. Lenz.

Leichtweiss, Kurt: Über die affine Exzentrizität konvexer Körper. Arch. der Math. 10, 187—199 (1959).

Verf. beweist unter anderem: \mathfrak{B} sei ein n -dimensionaler konvexer Körper mit inneren Punkten. α bzw. β sei das minimale Verhältnis von Umkugelradius zu Inkugelradius bzw. Durchmesser zu Dicke für ein affines Bild von \mathfrak{B} . γ sei die n -te Wurzel aus dem Volumenverhältnis von kleinstem umbeschriebenem und größtem einbeschriebenem Ellipsoid. Für die affinen Invarianten α, β, γ gelten folgende Ungleichungen: $\beta \leq \alpha$ (Gleichheit genau für die Körper mit Mittelpunkt), $1 \leq \gamma \leq \alpha \leq n$ (Gleichheit links genau für die Ellipsoide, rechts genau für die Simplexe), $1 \leq \beta \leq \sqrt[n]{n}$ (Gleichheit links für die Körper konstanter Breite und ihre affinen Bilder, rechts u. a. für die Parallelotope und ihre polarreziproken Bilder). Ist $\alpha > \sqrt[n]{n}$, so hat \mathfrak{B} keinen Mittelpunkt. Im Fall $n > 3$ kann auch für oben nicht genannte Körper die Gleichheit $\beta = \sqrt[n]{n}$ gelten. Jeder nach den obigen Ungleichungen für α, β, γ mögliche Wert wird wirklich für gewisse konvexe Körper angenommen, z. B. für geeignete Parallelkörper von regulären Simplexen bzw. Würfeln. Die durchsichtigen Beweise werden durch geschickte Anwendung der klassischen Theorie der konvexen Körper gewonnen.

H. Lenz.

Sakakura, Eiichi: Isoperimetry on the surface. Yokohama math. J. 5, 209—222 (1957).

Es handelt sich um Isoperimetrie bezüglich einer der Fläche aufgeprägten Metrik der Krümmung Null, für die naturgemäß die klassischen Sätze gelten. Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen wurden von vielen Autoren untersucht (vgl. etwa A. Huber, dies. Zbl. 56, 158) im Gegensatz zur Behauptung des Verf.

G. Bol.

Federer, Herbert: Curvature measures. Trans. Amer. math. Soc. 93, 418—491 (1959).

A great amount of results of the theory of convex subsets of Euclidean n space E_n and of classical integral and differential geometry in the large refer to sets with sufficiently smooth boundary. The extension to more general types of sets is an interesting problem; the present paper is a contribution of far-reaching importance in relation with that problem. The author introduces the concept of sets with positive reach; the reach of a subset A of E_n is the largest ε (possibly ∞) such that if $x \in E_n$ and the distance $\delta_A(x)$ from x to A is smaller than ε , then A contains a unique point, $\xi_A(x)$, nearest to x . For each bounded Borel subset Q of E_n and for $0 \leq r \leq \text{reach}(A)$ the n dimensional measure of

$$E_n \cap \{x: \delta_A(x) \leq r \text{ and } \xi_A(x) \in Q\}$$

is given by a polynomial

$$\sum_{i=0}^n r^{n-i} \alpha(n-i) \Phi_i(A, Q),$$

where $\alpha(j)$ is the j -dimensional measure of the spherical ball with unit radius in E_j . This is the generalized Steiner's formula for parallel convex bodies; the coefficients $\Phi_i(A, Q)$ are countably additive with respect to Q and define the "curvature measures" $\Phi_i(A, \cdot)$, a generalization of the "Quermaßintegrale" of Minkowski. If $\dim A = k$ then $\Phi_i(A, \cdot) = 0$ for $i > k$, $\Phi_k(A, \cdot)$ is the restriction of the k dimensional Hausdorff measure to A , and the measures $\Phi_i(A, \cdot)$ corresponding to $i < k$ depend on second order properties of A . The Gauss-Bonnet theorem generalizes to the proposition that if A is a compact set with positive reach, then the total curvature $\Phi_0(A, A)$ equals the Euler-Poincaré characteristic of A . The new version of the principal integralgeometric formula states that if μ is a Haar measure of the group of isometries of E_n , A and B are subsets of E_n with positive reach, and B is compact, then $A \cap g(B)$ has positive reach for μ -almost all isometries g , and

$$\int \Phi_i[A \cap g(B), \chi \cdot (\psi \circ g^{-1})] d\mu g = \sum_{k+h=n+i} c_{n,k,h} \Phi_k(A, \chi) \Phi_h(B, \psi),$$

whenever χ and ψ are bounded Baire functions on E_m , χ with bounded support;

here $c_{n,k,h}$ are constants determined by the choice of μ . The proof of this principal kinematic formula uses a new integral formula concerning Hausdorff measure which may be expected to have further applications. Suppose X and Y are m and k dimensional Riemannian manifolds of class 1, $m \geq k$, and $f: X \rightarrow Y$ is a Lipschitzian map. For $y \in Y$ compute the $m-k$ dimensional Hausdorff measure of $f^{-1}\{y\}$ and integrate over Y with respect to k -dimensional Hausdorff measure. It is shown that this integral equals the integral over X , with respect to m -dimensional Hausdorff measure of the Jacobian whose value at x is the norm of the linear transformation of k -vectors induced by the differential of f at x . This result is a counterpart of a classical integral formula for area which deals with the case when $m \leq k$. Though very different in the form, the purposes of the paper are related with those of H. Hadwiger (this Zbl. 86, 155); it would be interesting to compare the results of both authors to see which contain the other. *L. A. Santaló.*

Kurita, Minoru: On the volume in homogeneous spaces. Nagoya math. J. 15, 201—217 (1959).

Let M be the homogeneous space G/H , where G is a Lie group of dimension r and H a closed connected subgroup of dimension $r-n$. Let $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$ be the cartesian coordinates of the euclidean space E_n and consider a domain D on the hyperplane $u=0$. Let ψ be a 1-1 mapping of D into M such that $\psi(D)$ be an $(n-1)$ -dimensional submanifold of M . By a 1-parametric motion represented by $S_t \in G$ ($t=t(u)$, $0 \leq u \leq 1$), $\psi(D)$ generates a set in M . Theorem: The algebraic volume (appropriately defined) generated by $\psi(D)$ has the form $V = \sum_p X_p Y_p$ where X_p are quantities determined by $\psi(D)$ and Y_p are quantities determined by the motion. If $\psi(D)$ is transformed into itself transitively by a connected closed subgroup of G , the form of V admits some simplifications. The case of the Euclidean space with points as its elements gives a known theorem of Koenigs [J. Math. pur. appl., IV. Sér. 5, 321—343 (1889)] and Hadamard [Bull. Soc. math. France 26, 264—265 (1898)]; the cases of euclidean space with either hyperplanes or straight lines as its elements give new results which are considered in detail. *L. A. Santaló.*

Birch, B. J.: On 3 N points in a plane. Proc. Cambridge philos. Soc. 55, 289—293 (1959).

The principal result is Theorem I: Given 3 N points in a plane, we can divide them into N triplets such that the N triangles formed by the triplets have a point in common. The main part of the proof consists in establishing that if a mass distribution with certain mild integrability conditions is given in euclidean space of n dimensions, then there is a point in the space such that every closed half-space with it on the boundary contains at least $1/(n+1)$ of the total mass. The case $n=2$ was proved by B. H. Neumann [J. London math. Soc. 20, 226—237 (1945/46)] by a more elementary but much longer argument; the general case is due to R. Rado, (this Zbl. 61, 96) but the author was unaware of this, and his proof is independent and brief. The method is also used to derive some "max min" inequalities first proved for the plane by B. H. Neumann (this Zbl. 26, 359) and generalized to n dimensions by W. Süss (this Zbl. 31, 278) and others. *B. H. Neumann.*

Topologie:

Schmidt, Jürgen: Eine Studie zum Begriff der Teilfolge. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 63, 28—50 (1960).

Den Begriff der Teilfolge einer gefilterten Punktfamilie (g, \mathfrak{B}) — g eine eindeutige Abbildung der Menge B in den topologischen Raum E , \mathfrak{B} ein Filter über B —, insbesondere einer gerichteten Familie und damit auch einer gewöhnlichen Folge, kann man, der Zweierheit von Index- und Wertebereich entsprechend, im wesentlichen

auf zwei Weisen einführen: erstens, indem man den Indexbereich einer Transformation unterwirft, zweitens, indem man den Wertebereich im Sinne des Bourbakischen Feinheitsvergleichs verfeinert. Gestützt darauf, daß die Aussage „wenn x Limespunkt von (g, \mathfrak{B}) , so x Limespunkt von (f, \mathfrak{A}) “ für alle Topologien von E “ genau dann gilt, wenn $f\mathfrak{A}$ feiner ist als $g\mathfrak{B}$ (Satz 1 und (5), Duales für Adhärenzpunkte in Satz 2 und (5)), sieht Verf. die Definition einer Teilfolge (präziser: gefilterten Teilfamilie) (f, \mathfrak{A}) von (g, \mathfrak{B}) durch die Relation „ $f\mathfrak{A}$ feiner als $g\mathfrak{B}$ “ als die natürliche an. (Nöbelings Teilfolge-Begriff, der nur $f = g$ zuläßt und auf dem Feinheitsvergleich der Indexfilter \mathfrak{A} und \mathfrak{B} beruht, ist damit, wenn auch für viele Zwecke technisch ausreichend, ein enger Spezialfall.) Naheliegend ist nach dem einleitend Gesagten die Frage, welche Indextransformationen von (g, \mathfrak{B}) zugelassen werden dürfen, um gerade alle Teilfolgen von (g, \mathfrak{B}) in diesem Sinn zu erhalten: Es zeigt sich, daß die gefilterte Familie (f, \mathfrak{A}) mit dem Indexbereich A genau dann eine Teilfolge von (g, \mathfrak{B}) ist, wenn es eine mehrdeutige Abbildung φ aus (nicht notwendig von) A in B gibt derart, daß $g\varphi X \subseteq fX$ für alle $X \subseteq A$ und \mathfrak{A} feiner ist als $\varphi^{-1}\mathfrak{B}$ (Satz 3). Fordert man von den Wertebereichen der gefilterten Familien (f, \mathfrak{A}) und (g, \mathfrak{B}) , den Teilfolge-Begriff einschränkend, $fA \subseteq gB$, d. h., der klassischen Vorstellung von einer Teilfolge entsprechend, eine Verengung des Wertebereichs beim Übergang von der Grund- zu der Teilfolge, so darf man sich auf mehrdeutige Abbildungen φ von A in B mit $g\varphi = f$ und „ \mathfrak{A} feiner als $\varphi^{-1}\mathfrak{B}$ “ beschränken (Satz 4). Überraschend ist nach Meinung des Ref., daß die konventionellen, explizit oder implizit mittels Indextransformationen definierten Teilfolge-Begriffe (M. Fréchet: $A = B =$ Menge der natürlichen Zahlen, als Indextransformationen φ werden zugelassen monotone eindeutige Abbildungen von A in sich; J. W. Tukey: $A = B =$ feste „universelle“ gerichtete Menge, zugelassen bezüglich der Richtungsrelation extensive eindeutige Abbildungen φ von A in sich; G. Nöbeling bzw. E. J. McShane: $A = B$, A und B unabhängig voneinander gefiltert bzw. gerichtet, zugelassen nur die identische Selbstabbildung φ der Menge A ; G. Birkhoff: A konfinale Teilmenge der gerichteten Menge B , zugelassen nur die identische Selbstabbildung φ der Menge A) nach den Sätzen 3 und 4 hier als enge Spezialfälle erscheinen, von J. L. Kelleys [General topology, New York 1955 (dies. Zbl. 66, 166), p. 70] Teilfolge-Begriff abgesehen, bei dem substantiell — verglichen mit den in Satz 4 beschriebenen Indextransformationen — lediglich die Mehrdeutigkeit von φ aufgegeben wird. Die filtertheoretische Bedingung „ \mathfrak{A} feiner als $\varphi^{-1}\mathfrak{B}$ “, bei Kelley ordnungstheoretisch formuliert, erfährt beim Verf. eine präzise topologische Deutung als Unterhalbstetigkeit der Abbildung φ (bei geeigneter Erweiterung und Topologisierung der Indexbereiche A und B).

G. Grimeisen.

Shirai, Tameharu: A remark on the ranked space. II. Proc. Japan. Acad. 33, 139—142 (1957).

Pour la première partie, voir ce Zbl. 71, 381. L'A. démontre le théorème de Baire dans un espace rangé complète ne satisfaisant pas à l'axiome (C) de Hausdorff (mais vérifiant l'axiome (B)) en admettant une définition modifiée de la notion d'ensemble non-dense.

A. Appert (M. R. 21, Nr. 1576)

Nollet, Louis: A propos de la locale compacité des espaces topologiques. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 28, 5—13 (1959).

Compactness being understood in the sense of Lefschetz, i. e. not involving T_2 -condition, three definitions of local compactness are possible, according we require for each point the existence (1) of a base of compact neighborhoods (c. n.), (2) of a c. n., (3) of a relatively-c. n. They are shown to be equivalent for T_2 -spaces, as well as for spaces in which each point has a base of closed neighborhoods. In the general case, as the author shows by examples, neither of (1), (3) implies the others; hence, the converses of the trivial implications (1) \Rightarrow (2), (3) \Rightarrow (2) fail to be true. Definition (1) is derived from a general rule of localisation stated as follows for any

property P expressed in terms of set families: let $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ be a family of subsets of a space X , then \mathfrak{F} is said to be locally- P at $x (x \in X)$ if there exists a base of neighborhoods U of x such that $\mathfrak{F}_U = \{U \cap F_\alpha\}$ is P . In the reviewer's opinion, it would be worth while to investigate more carefully such a rule: if P can be expressed in different terms (as compactness, by coverings or by filters), we are not sure of the equivalence of both local- P 's. Local finiteness is also examined, and some results are stated. (There is something uncorrect in the proof, p. 7—8, however easy to be re-established). Local connectedness, though asserted to be definable by the same rule ("nous le montrons au n° 2" — as one reads in the Introduction) is not dealt with. The reviewer has not succeeded in trying to apply the rule of localisation, as given by the author, to the case of connectedness. *M. Dolcher.*

Isiwata, Takesi: Normality of the product space of a countably compact space with its any compactification. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 6, 181—184 (1958).

Following theorems are proved. (I) Let X be a normal T_1 -space containing a countably-compact not compact subset, and let \hat{X} be any its compactification; then $X \times \hat{X}$ is not normal. (II) Let X be a completely regular countably-compact not compact T_1 -space, $x^* \in \hat{X} - X$; then $\hat{X} \times \hat{X} - (x^*, x^*)$ is not normal. (III) Let X , x^* be as in (II), and let Y be compact, satisfying the first countability axiom at y_0 (not isolated point); then $Z = \hat{X} \times Y - (x^*, y_0)$ is not normal. In the case of the Čech compactification, Z has a unique uniformity. The results are, as the author observes, generalizations of some critical examples given by J. Dieudonné and others for the same purpose, where X and Y are sets of ordinals. *M. Dolcher.*

Glicksberg, Irving: Stone-Čech compactifications of products. Trans. Amer. math. Soc. 90, 369—382 (1959).

Let $\mathbf{P} X_\alpha$ denote the product of a set $\{X_\alpha\}$ of topological spaces, and let $\beta(X)$ denote the Stone-Čech compactification of X . The main result of this paper is the following. Let the spaces X_α be completely regular, and suppose the set $\mathbf{P}_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha$ be infinite for every α_0 . Then, $\beta(\mathbf{P} X_\alpha) = \mathbf{P} \beta(X_\alpha)$ holds if and only if $\mathbf{P} X_\alpha$ is pseudo-compact (i. e., each real-valued continuous function on it is bounded). The argument by which the sufficiency of the condition is proved enables the author to find out a pretty nice class of Stone-Čech compactification as follows. Suppose that $\{X_\alpha\}$ is a set of uncountably many compact Hausdorff spaces, each having at least two points; for $b \in \mathbf{P} X_\alpha$, let X^b denote the subspace of $\mathbf{P} X_\alpha$ consisting of all points x such that $x_\alpha = b_\alpha$ except for at most countably many α . Then $\mathbf{P} X_\alpha$ is the Stone-Čech compactification of its subspace X^b . Finally, by means of the main result, the author states some pseudo-compactness criteria for a product space $\mathbf{P} X_\alpha$, utilizing the notion of P -point (due to Gillman and Henriksen, this Zbl. 56, 108; 58, 100) and of \mathfrak{s}_γ -compactness. *M. Dolcher.*

Bingen, Franz: Métrisation des espaces topologiques. Bull. Soc. math. Belgique 9, 107—114 (1957).

Verf. bezeichnet mit R^I die Menge der reellen Funktionen x auf einer gegebenen Menge I , für die $x(i) \neq 0$ höchstens für endlichviele i gilt; R^I wird durch $\varrho(x, y) = \left[\sum_i (x(i) - y(i))^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ metrisiert. Es wird (neben einigen bekannten Tatsachen, die mit den Metrisationssätzen zusammenhängen) bewiesen, daß jeder metrische Raum R mit einem Unterraum des Produktes von abzählbarvielen R^I homöomorph ist (wobei die Mächtigkeit von I gleich der kleinsten Mächtigkeit einer offenen Basis von R ist). Für ein verwandtes (etwas schärferes) Ergebnis siehe P. Alexandroff, Uspechi mat. Nauk 15, Nr. 2 (92), 25—95 (1960), S. 41. *M. Katětov.*

Whyburn, G. T.: On convergence of mappings. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 311—318 (1958).

In this paper (dedicated to C. Kuratowski) the A. considers sequences of mappings between locally compact separable metric spaces (generalized continua) and examines conditions for the almost uniform convergence of such sequences. Certain theorems concerning sequences of real valued functions of a real variable are then deduced as an application of the previous study. *A. Mallios.*

Czászár, Á. et J. Czipser: Sur les courbes irramifiées. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 9, 315—328 (1958).

On sait, d'après un résultat de K. Menger [cfr. Kurventheorie (ce Zbl. 5, 415), p. 257] que: un espace de Hausdorff compact connexe séparable non ramifié (c'est-à-dire, où tout point possède une base de voisinages dont les frontières consistent en un ou en deux points) est homéomorphe au segment ou à la circonférence. Si l'on renonce à l'hypothèse de la compacité l'espace peut encore être homéomorphe à la droite ou à la demi-droite. En supprimant dans ces énoncés l'hypothèse de la séparabilité, il gardent leur validité pourvu qu'on généralise les 4 espaces dits, remplaçant les nombres réels par un ensemble ordonné quelconque dont l'ordre est continu [F. Frankl, *Fundamenta Math.* 11, 96—104 (1928)]. Ici on démontre tout cela par une voie plus directe, sans recours au „*n*-Beinsatz“ de K. Menger. La méthode suivie permet aux AA. d'obtenir assez aisément un résultat nouveau: si un continu non dégénéré ne contient que des points de ramification d'ordre fini et ceux-ci sont en nombre fini, il est la réunion d'un nombre fini d'arcs généralisés, n'ayant deux à deux que des extrémités communes. A l'égard des arcs ordinaires (donc avec l'hypothèse de la séparabilité) ce résultat avait été obtenu par K. Menger en 1926 (cfr. op. cit. p. 266). *M. Dolcher.*

Curtis, M. L. and M. K. Fort jr.: The fundamental group of one-dimensional spaces. *Proc. Amer. math. Soc.* 10, 140—148 (1959).

Sei X ein eindimensionaler separabler Raum. Dann wird bewiesen, daß $\pi_1(X)$ kein Element endlicher Ordnung hat. Sei S die Vereinigungsmenge der Kreise $S_n = \{(x, y) \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\}$ in der Ebene. Ist jetzt X überdies zusammenhängend und lokal zusammenhängend, so ist, wie bewiesen wird, $\pi_1(X)$ entweder endlich erzeugt und frei, oder $\pi_1(X)$ enthält eine Untergruppe, die mit $\pi_1(S)$ isomorph ist. Die Elemente von $\pi_1(X)$ lassen sich durch einfach gestaltete loops repräsentieren. Zwei solcher loops repräsentieren das gleiche Element von $\pi_1(X)$ genau dann, wenn sie im Sinne von Fréchet äquivalent sind. *J. Weier.*

Gary, John: Higher dimensional cyclic elements. *Pacific J. Math.* 9, 1061—1071 (1959).

Higher dimensional cyclic elements were introduced in finite dimensional spaces by Whyburn (this Zbl. 8, 277) and generalized, in part, by Puckett (this Zbl. 19, 46) and Simon (this Zbl. 77, 168). In the first part of this paper the author extends some of this work to compact Hausdorff spaces using Čech homology and cohomology with a field as coefficient group and then, in the second part of the paper, considers the zero-dimensional cyclic elements in a locally connected continuum showing that, for the most part, their useful properties do not generalize to this setting. *W. R. Utz.*

Dowker, C. H.: Imbedding of metric complexes. *Princeton math. Series* 12, 239—242 (1957).

Un sous-espace R d'un espace M est dit G_δ dans M , si R est une intersection dénombrable d'ouverts dans M ; on dit que R est un G_δ absolu, si R est un G_δ pour tout plongement dans un espace métrique M quelconque; définition analogue d'un F_σ absolu. L'A. démontre alors: Théorème 1. Pour qu'un complexe métrisable K soit un G_δ absolu, il faut et il suffit que toute chaîne de cellules $a_1 < \dots < a_i < a_{i+1} \dots$, où a_i est dans le bord de a_{i+1} , soit de longueur finie. Théorème 2. Tout complexe K métrique est un F_σ absolu. En ce dernier cas on construit explicitement les fermés dont K est réunion dénombrable. *R. Thom.*

Skljarenko (Sklarenko), E.: On the imbedding of normal spaces into bicompacts of the same weight and dimension. Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 36—39 (1958) [Russisch].

Der folgende Satz wird bewiesen: es sei R ein normaler Raum, $A_k \subset R$ abgeschlossen, $k = 1, 2, \dots$; dann gibt es einen kompakten Raum $R^* \supset R$ derart, daß 1. das Gewicht von R^* gleich dem von R ist, 2. $\dim A_k = \dim A_k$ (wo \bar{A}_k die Abschließung von A_k in R^* ist). Dabei bedeutet \dim die Überdeckungsdimension; das Gewicht eines Raumes ist die kleinste Mächtigkeit einer offenen Basis.

M. Katětov.

Skljarenko (Sklarenko), E.: Some remarks on spaces having an infinite number of dimensions. Doklady Akad. Nauk SSSR 126, 1203—1206 (1959) [Russisch].

Mit D^∞ wird das Cantorsche Diskontinuum bezeichnet; R ist ein kompakter metrischer Raum; R heißt abzählbardimensional, falls $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, wobei A_n nulldimensional ist. Es werden u. a. folgende Sätze bewiesen (vgl. J. Nagata, dies. Zbl. 81, 168): 1. ist R nicht abzählbardimensional, so hat für jede stetige Abbildung f von D^∞ auf R mindestens eine Menge $f^{-1}(y)$ die Mächtigkeit des Kontinuums; 2. ist R ein abzählbardimensionaler (bzw. k -dimensionaler) Raum ohne isolierte Punkte, so bilden die stetigen Abbildungen f von D^∞ auf R , für welche jedes $f^{-1}(y)$ endlich ist (bzw. höchstens $k+1$ Punkte enthält), eine dichte Menge im Raume aller stetigen Abbildungen von D^∞ auf R .

M. Katětov.

Dugundji, J.: Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces. Compositio math. 13, 229—246 (1958).

Using the covering definition of dimension, the author generalizes to arbitrary metric spaces Y the following implications and equivalences, which are well known to hold for separable metric spaces: 1. If Y is an ANR, then it is locally contractible, and hence LC^∞ ; these properties are equivalent only for finite-dimensional spaces. 2. If Y is an AR, then it is contractible and locally contractible, and hence C^∞ and LC^∞ ; these properties are equivalent only for finite-dimensional spaces. 3. If Y is n -dimensional, then it is an ANR if and only if it is LC^n . 4. Y is an AR if and only if it is a contractible ANR; equivalently, Y is an AR if and only if it is a C^∞ ANR. — Several alternative characterizations of LC^n and ANR by means of partial realization, homotopy, or factorization, are also given.

T. Ganea.

Bourgin, D. G.: Fixed points on neighborhood retracts. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 371—374 (1957).

Als eine Anwendung früherer Resultate des Verf. (dies. Zbl. 73, 397) über den Index einer stetigen Abbildung beweist Verf.: X sei ein absoluter Retrakt und Y_1, \dots, Y_n ($n > 1$) offene Teilmengen von X , deren abgeschlossene Hüllen \bar{Y}_v paarweise fremde absolute Retrakte sind; ist f eine stetige Abbildung von

$$X - \bigcup \{Y_v; v = 1, \dots, n\}$$

in X , welche den Rand jedes Y_v in \bar{Y}_v abbildet, dann hat f einen Fixpunkt in $X - \bigcup \{Y_v; v = 1, \dots, n\}$. Dieser Satz verallgemeinert ein Resultat von Bagemihl [Fundamenta Math. 40, 3—12 (1953)] und liefert verschiedene Folgerungen, wie: S^m sei die m -Sphäre, σ_λ , $\lambda = 1, \dots, l$, abgeschlossene, paarweise fremde n -Simplexe in S^m und $S = S^m - \bigcup \{\sigma_\lambda; \lambda = 1, \dots, l\}$; f sei eine stetige Abbildung von S in S^m derart, daß der Rand jedes σ_λ in σ_λ abgebildet wird, S im Bild $f(S)$ enthalten ist und wenigstens ein Punkt von S nur ein Urbild besitzt. Dann hat f einen Fixpunkt in S , falls $l \neq 0, 2$ gilt.

H. Röhrli.

Kuratowski, K.: Sur l'extension de la notion de fonction rationnelle à l'espace Euclidien n -dimensionnel. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 281—287 (1958).

Let F be an arbitrary compact subset of the Euclidean n -space E_n , select points p_i ($i = 1, 2, \dots$) each belonging to a different bounded component of $E_n - F$, and let $P_n = E_n - \{0\}$. It is proved that for any map $f: F \rightarrow P_n$ there exist integers m, k_1, \dots, k_m such that f is homotopic to a "rational function" $(x - p_1)^{k_1} \dots (x - p_m)^{k_m}$ defined in terms of cohomotopic multiplication (K. Borsuk, this Zbl. 40, 102); if $E_n - F$ is connected, i. e. if it has no bounded components, then f is homotopic to a constant map and $m = 0$.
T. Ganea.

Darbo, Gabriele: Sulle coincidenze di mappe ponderate. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 29, 256—270 (1959).

Seien X, W Hausdorffsche Räume und $f, g: X \rightarrow W$ bewertete Abbildungen mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring A mit Einselement. Sind x ein Punkt aus X und $T_f(x), T_g(x)$ die minimalen Träger von f, g in x , so heiße x wie üblich Koinzidenz von (f, g) , falls $T_f(x) \cap T_g(x) \neq \emptyset$. Weiter seien A eine von Koinzidenzen des Paares (f, g) freie Teilmenge von X und W' die Diagonale von $W \times W$. Sei $\lambda_{f,g}$ die durch (f, g) trivialerweise bestimmte Abbildung von X in $W \times W$. Dann bestimmt $\lambda_{f,g}$ in naheliegender Weise einen Homomorphismus

$$L_{f,g}^q: H_q(X, A) \rightarrow H_q(W \times W, W \times W - W').$$

Verf. kann nachweisen, daß dieser Homomorphismus eine große Zahl geometrischer Koinzidenzeigenschaften von (f, g) festhält. Interessante Sätze wie folgender werden bewiesen: Sind $f_i, g_j: X \rightarrow W$ bewertete Abbildungen, und sind sie in A paarweise koinzidenzfrei, und sind λ_i, μ_j Elemente aus dem gemeinsamen Bezugsring A , so gilt $L_{f,g}^q = \sum \lambda_i \mu_j L_{f_i, g_j}^q$ für die Abbildungen $f = \sum \lambda_i f_i$ und $g = \sum \mu_j g_j$.
J. Weier.

O'Neill, Barrett: On the Leray isomorphism theorem. Proc. Amer. math. Soc. 9, 460—462 (1958).

The author proves the following theorem: Let $\Phi: A \rightarrow \bar{A}$ be a differential graded homomorphism of differential graded sheaves (operators of degree $+1$) on X (paracompact space). Suppose n is an integer and: 1. $\Phi: H^p(X, H^k(A)) \rightarrow H^p(X, H^k(\bar{A}))$ is onto if $p + k = n$, univalent if $p + k = n + 1$.

$$2. \quad \Phi: H\left(\sum_{p \geq 0} H^p(X, A)\right) \rightarrow H\left(\sum_{p \geq 0} H^p(X, \bar{A})\right)$$

is an isomorphism. 3. The degrees of A, \bar{A} are bounded below, or X is of finite cohomology dimension. Then: $\Phi: H^n(\Gamma(A)) \rightarrow H^n(\Gamma(\bar{A}))$ is onto, and $\Phi: H^{n+1}(\Gamma(A)) \rightarrow H^{n+1}(\Gamma(\bar{A}))$ is univalent.
V. Poenaru.

Smale, Stephen: A Vietoris mapping theorem for homotopy. Proc. Amer. math. Soc. 8, 604—610 (1957).

It is well-known that the homotopy group analog of the Vietoris mapping theorem for homology is not true in general, and that some strong conditions on the spaces and/or maps must be imposed to obtain a comparable result. The author here determines a set of local conditions sufficient to establish the desired counterpart, and obtains further results of interest in themselves. For any map $f: X \rightarrow Y$, let f_r denote the induced homomorphism $\pi_r(X) \rightarrow \pi_r(Y)$. Call a space Z r -SLC if each $z \in Z$ has a neighbourhood U with $\text{Im}[\pi_r(U) \rightarrow \pi_r(Z)] = 0$. The author obtains the following results: Let X, Y be locally compact separable metric, and $f: X \rightarrow Y$ onto, such that $f^{-1}(C)$ is compact for all compact C . Assume that for each $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ is C^n and LC^n , ($n \geq 0$). Then: (a). If X is LC^{n+1} , so also is Y . (b) If X is LC^n and $(n+1)$ -SLC and if for each y , $\text{Im}[\pi_{n+1}[f^{-1}(y) \rightarrow \pi_{n+1}(x)] = 0$, f_{n+1} is a monomorphism. (c) If X is LC^n and Y is LC^n , $(n+1)$ -SLC, then f_{n+1} is an epimorphism. Combining these gives the required analog: (d) If X is LC^{n+1} , the f_i is an isomorphism for $0 \leq i \leq n$, and an epimorphism for $i = n + 1$.
J. Dugundji.

Adams, J. F.: An example in homotopy theory. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 922—923 (1957).

J. H. C. Whitehead raised the question whether two CW-complexes of the same n -type for each n are necessarily of the same homotopy type. The following example provides a negative answer. Let $d \geq 2$ and let R_m be obtained from S^d by killing all homotopy groups from the m th upwards ($m > d$). Then if $X = \prod_{m > d} R_m$ and $Y = S^d \times X$ it is not hard to see that X and Y are of the same n -type for each n , but of different homotopy types.

P. J. Hilton.

Kan, Daniel M.: On the homotopy relation for c. s. s. maps. Bol. Soc. mat. Mexicana, II. Ser. 2, 75—81 (1957).

Ist \mathcal{C} irgendeine Kategorie, so bezeichne \mathcal{C}^V die Kategorie der s. s. (= semi-simplizialen = c. s. s.) Objekte über \mathcal{C} . Gibt es in \mathcal{C} zu jeder (endlichen) Familie von Objekten eine direkte Summe, so wird eine Homotopierelation zwischen Abbildungen von \mathcal{C}^V definiert, die mit der üblichen übereinstimmt, falls \mathcal{C} die Kategorie der Mengen ist. Weitere wichtige Spezialfälle sind: \mathcal{C} = Kategorie der (a) Mengen mit Grundpunkt, (b) Gruppen, (c) Moduln über einem festen Ring. Aus einem (kovarianten) Funktor $\Gamma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^V$ erhält man in naheliegender Weise einen Funktor $D(\Gamma): \mathcal{C}^V \rightarrow \mathcal{D}^V$ ($(D(\Gamma)A)_n = (\Gamma A_n)_n$, $A \in \mathcal{C}^V$). Es wird bewiesen, daß jedes solche $D(\Gamma)$ Homotopien erhält, d. h. aus $f \simeq g$ in \mathcal{C}^V folgt $D(\Gamma)f \simeq D(\Gamma)g$ in \mathcal{D}^V , falls in \mathcal{C} und \mathcal{D} direkte Summen existieren. (Für den Fall, daß \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien von Moduln sind, vgl. A. Dold, dies. Zbl. 82, 377. Eine weitere Verallgemeinerung ohne Verwendung von direkten Summen findet sich in Dold-Puppe, Homologie nicht-additiver Funktoren, erscheint demnächst in Annales de l'Institut Fourier). Als Anwendung wird gezeigt: Ist $f: A \rightarrow A'$ ein s. s. Homomorphismus zwischen zusammenhängenden freien s. s. Gruppen und $g: B \rightarrow B'$ der induzierte s. s. Homomorphismus der abelsch gemachten s. s. Gruppen $B = A/[A, A]$, $B' = A'/[A', A']$, so ist f genau dann eine Homotopieäquivalenz (über der Kategorie der Gruppen), wenn g es ist.

D. Puppe.

Kan, Daniel M.: On c. s. s. categories. Bol. Soc. mat. Mexicana, II. Ser. 2, 82—94 (1957).

Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit direkten Summen. Es wird ein Funktor $\text{Hom}(A, B)$ definiert, der jedem Paar von s. s. Objekten A, B über \mathcal{C} eine s. s. Menge zuordnet. Der Homotopiebegriff in \mathcal{C}^V (s. vorstehendes Referat) ist darin enthalten: $\text{Hom}(A, B)_0$ besteht aus den s. s. Abbildungen $A \rightarrow B$, $\text{Hom}(A, B)_1$ aus den Homotopien zwischen ihnen. Nach Wahl eines festen Objekts $X_0 \in \mathcal{C}$ wird erklärt, was in \mathcal{C}^V unter einer Faserabbildung (speziell: Kantsches Objekt) bzw. einer freien Abbildung (spezielles: freies Objekt) zu verstehen ist. Ist $f: B \rightarrow A$ frei und $g: C \rightarrow D$ eine Faserabbildung, so gilt für die induzierten Abbildungen zwischen den s. s. Mengen $\text{Hom}(A, C)$, $\text{Hom}(A, D)$, $\text{Hom}(B, C)$, $\text{Hom}(B, D)$ ein allgemeiner Satz, aus dem insbesondere folgt: (1) Ist f frei und C ein Kantsches Objekt, so ist $\text{Hom}(f, C): \text{Hom}(A, C) \rightarrow \text{Hom}(B, C)$ eine Faserabbildung. (2) Ist A frei und g eine Faserabbildung, so ist $\text{Hom}(A, g): \text{Hom}(A, C) \rightarrow \text{Hom}(A, D)$ eine Faserabbildung. (3) Ist A frei und C ein Kantsches Objekt, so ist $\text{Hom}(A, C)$ ein Kantsches Objekt. Aus (1) folgt weiter ein Homotopieerweiterungssatz, aus (2) ein Satz über das Hochheben von Homotopien. Aus (3) ergibt sich, daß die Homotopie für s. s. Abbildungen $A \rightarrow C$ eine Äquivalenzrelation ist. $X \in \mathcal{C}^V$ wird durch $X_n = X_0$, $X_\alpha = \text{Identität } (\alpha: [m] \rightarrow [n] \text{ monoton})$ definiert und die Homotopiegruppen für irgendein $A \in \mathcal{C}^V$ durch $\pi_n(A) = \pi_n(\text{Hom}(X, A))$. Dann gilt folgende Übertragung eines Satzes von J. H. C. Whitehead: Sind $A, B \in \mathcal{C}^V$ freie Kantsche Objekte und ist $f: A \rightarrow B$ eine s. s. Abbildung über \mathcal{C} , so ist f genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn es Isomorphismen aller Homotopiegruppen induziert. *D. Puppe.*

Halpern, Edward: On the primitivity of Hopf algebras over a field with prime characteristic. Proc. Amer. math. Soc. **11**, 117—126 (1960).

Let T be a C^0 homotopy-associative and -commutative H -space, and p a prime. The author gives a condition under which the cohomology (Hopf) algebra $H^*(T; Z_p)$ is primitive: If (a): $H^*(T; Z_p)$ is a polynomial ring $Z_p[X]$, where $X \in H^*(T; Z_p)$ and consists of even degree elements on case $p \neq 2$, and (b): for each $x \in X$ and $i \geq 0$, $St_p^i(x)$ (St_p^i = Steenrod operation) is in the subalgebra generated by x , then $H^*(T; Z_p)$ is primitive. An immediate application yields: A necessary condition that T be homotopically equivalent to a cartesian product $E_1 \times \dots \times E_n$, where each $H^*(E_i; Z_p) \approx Z_p$ or $Z_p[x]$, is that $H^*(T; Z_p)$ be primitive. *J. Dugundji.*

Weier, Joseph: Conséquences d'un résultat de M. J. P. Serre. C. r. Acad. Sci., Paris **247**, 907—908 (1958).

The note contains remarks concerning the problem of lifting a map $f: S^m \rightarrow S^n$ ($m > n > 0$) to the tangent $(n-1)$ -sphere bundle over S^n . *T. Ganea.*

Auslander, L. and R. E. MacKenzie: On the topology of tangent bundles. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 627—632 (1959).

Let $J(M)$ be the tangent bundle of a manifold, and β its usual fiber bundle topology. The authors characterize β by proving that any topology τ in the set $J(M)$ satisfying the following five conditions coincides with β . (1) $J(M)$ is a τ -regular space, (2) Each point has a τ -neighborhood whose β -closure is β -compact, (3) the projection is τ -continuous, (4) The τ -subspace topology on each fiber coincides with the induced β topology, (5) For any continuous vector field on an open $U \subset M$, the associated $\chi: U \rightarrow J(M)$ is a τ -continuous cross-section. The authors also show that condition (2) is essential in the sense that a topology may satisfy all conditions other than (2), and still not be the β topology. *J. Dugundji.*

Massey, W. S.: On the cohomology ring of a sphere bundle. J. Math. Mech. **7**, 265—289 (1958).

The first part of the paper is concerned with relations between cup products in the total space and triple products in the base space of a locally trivial orientable sphere space (E, π, B, S^{k-1}) . Let

$$\dots \xrightarrow{\psi} H^{q-k}(B) \xrightarrow{\mu} H^q(B) \xrightarrow{\pi^*} H^q(E) \xrightarrow{\psi} H^{q-k+1}(B) \xrightarrow{\mu} \dots$$

be the associated Gysin sequence in the form given by R. Thom (this Zbl. **49**, 400), where μ is the multiplication by the characteristic class $W_k \in H^k(B)$. It is proved that if $u \in H^p(B)$, $v \in H^q(B)$, $u \cdot v = 0$, and $\mu(v) = 0$, then

$$(-1)^{p+1}(\pi^*)^{-1}[(\pi^* u) \cdot (\psi^{-1} v)]$$

coincides with the coset of the subgroup

$$[H^{p+q-1}(B) W_k + u \cdot H^{q+k-1}(B)] \text{ in } H^{p+q+k-1}(B)$$

given by the triple product $\langle u, v, W_k \rangle$ as defined previously by H. Uehara and W. S. Massey (this Zbl. **77**, 364); the coefficients are in an arbitrary commutative ring. Next, a result originally due to G. Hirsch (this Zbl. **65**, 165) is improved to yield: if $u \in H^p(B)$, $v \in H^q(B)$, and $\mu(u) = \mu(v) = 0$, then $(-1)^{p+k+1} \psi[(\psi^{-1} u) x (\psi^{-1} v)]$ coincides with the coset of the subgroup

$$[H^{p+k-1}(B) \cdot v + u \cdot H^{q+k-1}(B)] \text{ in } H^{p+q+k-1}(B)$$

given by the triple product $\langle u, W_k, v \rangle$. The second part of the paper deals with the cohomology ring of a sphere bundle whose characteristic class vanishes. Roughly stated, the cohomology ring of the bundle appears as a quadratic extension of that of the base space. It follows that the structure of the cohomology ring of such a sphere bundle depends on two invariants: the first is essentially a Stiefel-Whitney class, while the second is related to a Pontrjagin class if the fibre is of even dimension. As an application the formula giving the secondary obstruction to a cross section of a 2-sphere bundle is put in a more convenient form. Also, it is shown that certain

orientable n -dimensional manifolds cannot be differentiably embedded in the Euclidean space of dimension approximately $\frac{3}{2}n$. T. Ganea.

Massey, W. S.: On the Stiefel-Whitney classes of a manifold. Amer. J. Math. 82, 92—102 (1960).

The author establishes some important relations in the Stiefel-Whitney classes of a manifold: he shows that, for a wide class of pairs of integers (n, k) , there exists no n -manifold with a non-vanishing k -dimensional dual Stiefel-Whitney class. The following three general theorems are proved: Theorem 1: Let M^n be a compact connected n -manifold, and $0 < q < n$. If the dual Stiefel-Whitney class $w_{n-q} \neq 0$, then n is the sum of exactly q powers of 2 (exponents 0 and repeated allowed). Furthermore, if either (a) $q = 1$ or (b) Letting h be the smallest exponent in the above representation of n , an odd number of exponents are $= h + 1$, or (c) $n \equiv 2 \pmod{4}$ and $h = 1$, then M^n must also be non-orientable. (This has as immediate consequence that if $w_{n-1} \neq 0$, then n is a power of 2 and M^n is non-orientable.) For the Stiefel-Whitney classes themselves, he proves Theorem 2: If n is even, and M^n orientable, then the Stiefel-Whitney class $w_{n-1} = 0$. (This extends a result of Wu, who had established this only for $n \equiv 2 \pmod{4}$, and also generalizes Whitney's theorem that w_3 is always zero in an orientable M^4 .) Theorem 3: If $n \equiv 3 \pmod{4}$, and M^n is orientable, then $w_n = w_{n-1} = w_{n-2} = 0$. Examples are given to show that Theorems 2 and 3 cannot be improved. The following Lemmas, of independent interest, play a basic role: (a) The homomorphism $H^k(M^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(M^n; \mathbb{Z}_2)$ defined by $x \rightarrow x \cdot w_{n-k}$ is a sum of iterated Steenrod squares (so that Theorem 1 is reduced to the question of the existence of non-trivial iterated squares). (b) If $x \in H^1(M^n; \mathbb{Z}_2)$, $\text{Sq}^j x^k = 0$ if k is a power of 2, unless $j = 0$ or k . All orientability considerations result from the well-known characterization " $\text{Sq}^1(H^{n-1}(M^n; \mathbb{Z}_2)) = 0$ " of " M^n is orientable". J. Dugundji.

James, I. M.: The intrinsic join: A study of the homotopy groups of Stiefel manifolds. Proc. London math. Soc., III. Ser. 8, 507—535 (1958).

Sei $O_{m,k}$ die Stiefelsche Mannigfaltigkeit aller k -Beine (= orthonormierte Systeme von k Vektoren) im m -dimensionalen Vektorraum über den reellen bzw. komplexen Zahlen bzw. über den Quaternionen. In drei Arbeiten untersucht der Verf. die Frage nach der Existenz von Schnittflächen in der Faserung $O_{m,k} \rightarrow O_{m,1} = S^{dm-1}$ ($d = 1, 2$ bzw. 4) und verwandte Probleme (vgl. die nachstehenden Referate). Die vorliegende erste Arbeit dient der Vorbereitung. Es wird eine stetige Abbildung $O_{m,k} * O_{n,k} \rightarrow O_{m+n,k}$ definiert [$*$ bezeichnet den Verbindungsraum (join)], die im Fall $k = 1$ den bekannten Homöomorphismus $S^{dm-1} * S^{dn-1} \rightarrow S^{d(m+n)-1}$ liefert. Daraus erhält man eine bilineare, assoziative Operation $\pi_i(O_{m,k}) \times \pi_j(O_{n,k}) \rightarrow \pi_{i+j+1}(O_{m+n,k})$ in Verallgemeinerung der „join“-Operation bei den Homotopiegruppen von Sphären. Die Beziehungen dieser Operation zu den Homomorphismen, die in der exakten Homotopiefolge der Faserung $O_{m,k} \rightarrow O_{m,l}$ ($l < k$, Faser $O_{m-l,k-l}$) vorkommen, und zu einigen anderen Operationen werden eingehend untersucht. Eine besondere Rolle spielt dabei der Randoperator $\delta: \pi_i(O_{m,l}) \rightarrow \pi_{i-1}(O_{m-l,k-l})$. Zum Schluß werden Relationen angegeben, die die Homotopiefolgen der Faserungen $O_{m,k} \rightarrow O_{m,l}$ für verschiedene Werte von m, k, l miteinander verknüpfen.

D. Puppe.

James, I. M.: Cross-sections of Stiefel manifolds. Proc. London math. Soc., III. Ser. 8, 536—547 (1958).

Diese Arbeit enthält weitreichende Resultate über die Existenz von Schnittflächen in der Faserung $O_{m,k} \rightarrow O_{m,1}$ (vgl. vorstehendes Referat). Das Hauptergebnis lautet: Zu jedem $k \geq 1$ gibt es ganze Zahlen $a_k, b_k, c_k \geq k$, so daß im reellen (komplexen, quaternionalen) Fall genau dann eine Schnittfläche existiert, wenn m ein positives Vielfaches von a_k (b_k, c_k) ist, mit event. Ausnahme gewisser Werte von k im reellen Fall, die Verf. irregulär nennt. Alle $k \leq 9$ sind regulär, und es ist

nicht bekannt, ob irreguläre k überhaupt existieren. Ist aber k irregulär und bezeichnet a_k (in der Arbeit a'_k) die kleinste Zweierpotenz $\geq k$, so hat $O_{m,k}$ (im reellen Fall) genau dann eine Schnittfläche, wenn $m = l a_k$ mit einer ganzen Zahl $l \geq 2$. Außer in diesem Fall und für einige kleine Werte von k sind die Zahlen a_k, b_k, c_k nicht explizit bekannt, aber ihre Primfaktoren werden angegeben: a_k ist eine Potenz von 2. Eine Primzahl p ist genau ein Teiler von b_k (c_k), wenn $p \leq k$ ($p < 2k$) ist. Ferner bestehen folgende Beziehungen: a_{2k} teilt $2b_k$, b_{2k} teilt $2c_k$. Hat $O_{m,k+1}$ eine Schnittfläche, so offenbar auch $O_{m,k}$, folglich ist $a_k(b_k, c_k)$ ein Teiler von $a_{k+1}(b_{k+1}, c_{k+1})$. Im reellen Fall wird umgekehrt bewiesen: Hat $O_{m,k}$ ($m > k$) eine Schnittfläche, so auch $O_{2m, k+1}$. Daraus folgt $a_{k+1} = a_k$ oder $2a_k$. (Ist k regulär, $k+1$ irregulär, so folgt übrigens $a_{k+1} = a_k$; ist k irregulär, $k+1$ regulär, so folgt $a_{k+1} = 2a_k$). Bezeichnet G_q die q -te stabile Homotopiegruppe der Sphären, d. h. $G_q = \pi_{q+n}(S^n)$, $n > q+1$, so gilt: $G_{2k-1}(G_{4k-1})$ enthält ein Element der Ordnung $b_{k+1}/b_k(c_{k+1}/c_k)$. Daraus folgt: Zu jeder Primzahl p gibt es unendlich viele k , so daß G_{4k-1} ein Element der Ordnung p enthält. — Ein q -Schnitt in $O_{m,k}$ wird definiert als eine Abbildung $S^{dm-1} \rightarrow O_{m,k}$, deren Zusammensetzung mit der Projektion $O_{m,k} \rightarrow O_{m,1} = S^{dm-1}$ den Grad q hat. Die genannten Ergebnisse über Schnittflächen (1-Schnitte) werden aus allgemeineren Sätzen über q -Schnitte gewonnen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist die „join“-Operation in den Homotopiegruppen der Stiefelschen Mannigfaltigkeiten (s. vorstehendes Referat). Einhängungssätze von Freudenthal und von Serre werden von Sphären auf Stiefelsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. Zum Schluß werden einige Bemerkungen über „Stiefelsche Mannigfaltigkeiten“ für Cayleysche Zahlen gemacht.

D. Puppe.

James, I. M.: Spaces associated with Stiefel manifolds. Proc. London math. Soc., III. Ser. 9, 115—140 (1959).

Sei P_m der $(m-1)$ -dimensionale reelle, komplexe oder quaternionale projektive Raum mit der üblichen Zellenzerlegung $P_m = c^0 \cup c_1 \cup \dots \cup c_{m-1}$ ($\dim c_q = dq$, $d = 1, 2, 4$). Durch Identifizieren von $P_{m-k} \subset P_m$ zu einem Punkt entsteht $P_{m,k} = P_m/P_{m-k} = c^0 \cup c_{m-k} \cup \dots \cup c_{m-1}$ ($m > k$). Verf. definiert daneben „quasi-projektive“ Räume $Q_m = e^0 \cup e_0 \cup \dots \cup e_{m-1}$ ($\dim e_q = d(q+1) - 1$) und mit ihrer Hilfe $Q_{m,k} = Q_m/Q_{m-k} = e^0 \cup e_{m-k} \cup \dots \cup e_{m-1}$ ($m \geq k$). $Q_{m,k}$ stimmt im reellen Fall mit $P_{m,k}$ und im komplexen mit der Einhängung von $P_{m,k}$ überein ($m > k$). (Die vom Verf. behaupteten entsprechenden Aussagen über P_m und Q_m selbst sind nicht richtig. Sie werden aber auch nicht weiter benutzt.) Im Fall der Quaternionen besteht kein Zusammenhang dieser Art. Die Bedeutung von $Q_{m,k}$ liegt darin, daß es in natürlicher Weise so in die Stiefelsche Mannigfaltigkeit $O_{m,k}$ (s. die vorstehenden Referate) eingebettet werden kann, daß $Q_{m,k} \rightarrow Q_{m,1} = S^{dm-1}$ die Einschränkung von $O_{m,k} \rightarrow O_{m,1} = S^{dm-1}$ ist (natürliche Projektionen, $k \geq 1$), $Q_{m,k}$ heißt reduzibel, wenn $Q_{m,k} \rightarrow Q_{m,1}$ ein Rechts-Homotopieinverses besitzt — oder gleichwertig, wenn die Zelle e_{m-1} von $Q_{m,k}$ durch eine nullhomotope Abbildung angeheftet ist. (Analoge Definition für $P_{m,k}$.) Mit Hilfe der genannten Einbettung wird gezeigt: $O_{m,k}$ hat genau dann eine Schnittfläche, wenn $Q_{m,k}$ reduzibel und im reellen Fall $m \geq 2k$ oder $k = 1$ ist. Im übrigen wird das Schnittflächenproblem selbst nicht weiter behandelt sondern die verwandte Frage, wann $Q_{m,k}$ und $P_{m,k}$ S -reduzibel sind, d. h. nach hinreichend oft iterierter Einhängung reduzibel werden. Im Zusammenhang damit steht die Klassifikation der $Q_{m,k}$ und $P_{m,k}$ nach ihrem S -Homotopietyp. Die mannigfachen Ergebnisse sind im 2. Abschnitt der Arbeit übersichtlich zusammengestellt. Hier sei nur erwähnt: $Q_{m,k}$ ist genau dann S -reduzibel, wenn m ein positives Vielfaches von a_k, b_k bzw. c_k ist (für die Definition dieser Zahlen s. vorstehendes Referat). Bemerkenswert ist, daß hier kein irregulärer Fall ausgenommen werden muß. Im reellen und komplexen Fall gilt das gleiche für $P_{m,k}$, da es denselben S -Typ wie $Q_{m,k}$ hat. Im Fall der Quaternionen haben $P_{m,k}$ und $Q_{m,k}$ für $k \geq 3$ sicher verschiedenen S -Homotopietyp, und $P_{m,k}$ ist nicht

S-reduzibel. Der Fall $k = 2$ wird explizit durchgerechnet. Die Beweise beruhen auf der Konstruktion und näheren Untersuchung von zwei Abbildungen $O_{m,k} * P_{n,k} \rightarrow P_{m+n,k}$, $O_{m,k} * Q_{n,k} \rightarrow Q_{m+n,k}$.
D. Puppe.

Bing, R. H.: The Cartesian product of a certain nonmanifold and a line is E^4 . Ann. of Math., II. Ser. **70**, 399—412 (1959).

The author previously constructed an upper semicontinuous decomposition of E_3 into points and tame arcs, such that the decomposition space, B is not homeomorphic to E_3 . In the present paper, it is proved that $B \times E_1 = E_4$. If \bar{B} is the one point compactification of B , the author also proves that: $\bar{B} \times [0, 1] = S_3 \times [0, 1]$, $\bar{B} \times S_1 = S_3 \times S_1$. There is also proved that there is a periodic transformation of period 2 of E_4 into itself that has as its fixed point set a homeomorphic image of B (and a similar result for S_4 and \bar{B}). Finally, a result by A. Shapiro asserting that $U \times E_1 = E_4$ (where U is a manifold constructed by J. H. C. Whitehead, different from E_3) is stated.
V. Poenaru.

Kister, James: Small isotopies in euclidean spaces and 3-manifolds. Bull. Amer. math. Soc. **65**, 371—373 (1959).

Let M be a manifold with metric d and $H(M)$ the set of all homeomorphisms of M onto itself. If $f, g \in H(M)$ we shall design by $\varrho(f, g) : \sup d(f(x), g(x))$. f and g are said to be ε -isotopic if there is an isotopy $H_t \in I$, such that: $H_0 = f$, $H_1 = g$, $\varrho(H_t, H_{t_1}) \leq \varepsilon$ if $t_1, t_2 \in I$. The author proves that if $f, g \in H(E_n)$ and $\varrho(f, g) \leq \varepsilon$ they are ε -isotopic.
V. Poenaru.

Curtis, M. L.: An imbedding theorem. Duke math. J. **24**, 349—351 (1957).

Dans cette Note, l'A. discute un certain nombre de critères pour reconnaître si une variété généralisée de dimension 3 est une variété topologique. Un contre-exemple construit par Bing montre qu'un critère proposé par Wilder (existence d'un plongement dans R^4), même associé à des conditions d'homotopie locale proposées par Griffiths, ne suffit pas à assurer qu'on ait affaire à une vraie variété.
R. Thom.

Davis, Chandler: Another subdivision which can not be shelled. Proc. Amer. math. Soc. **9**, 735—737 (1958).

The author proves that there exists a subdivision of the 3-cell into three pieces which can not be shelled.
V. Poenaru.

Ore, Oystein: Note on Hamilton circuits. Amer. math. Monthly **67**, 55 (1960).

In einem Graph mit m Punkten gibt es eine Hamiltonsche Linie, wenn für je zwei nicht durch eine Kante verbundene Punkte die Summe ihrer Grade mindestens m ist.
H. Künnet.

Grötzsch, Herbert: Zur Theorie der diskreten Gebilde. II: Ein Satz über Vierkantnetze auf der Kugel, mit Anwendung auf beliebige Netze und halbgerade Dreikantnetze auf der Kugel. III: Kongruenzklassen von Dreikantnetzen auf der Kugel und diesbezügliche Fragestellungen. IV: Beweis des Ecken transformationssatzes (2,1) für Dreikantnetze auf der Kugel. V: Beziehungen zwischen Vierkant- und Dreikantnetzen auf der Kugel. VI: Ein Kantentransformationssatz für gerade Dreikantnetze mit Viereckssystem auf der Kugel. VII: Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. VIII: Transformationen modulo 2 und modulo 3 von Netzen. IX: Über Heawoodsche Gleichungen und Möglichstgleichverteilung von Signaturen. X: Über Heawood'sche Kantengleichungen. XI: Elementare Eigenschaften von Vierkantnetzen XII: Heawoodsche Eckengleichungen für halbgerade Dreikantnetze auf der Kugel. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, math.-naturw. R. **6**, 697—704, 785—788, 789—798 (1957); **7**, 353—358, 447—456; **8**, 109—120 (1958); 337—343, 747—754, 1067—1072 (1959); **9**, 103—108, 109—114 (1960).

(Teil I, s. dies. Zbl. 70, 184). Wird eine beliebige Fläche T in einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiete, auch Gebiete höheren Geschlechts eingeteilt, so entsteht ein „Netz“ N . Dieses wird mit N_r bzw. $N_r(\vartheta, \rho)$ bezeichnet, wenn die Gebietsränder einen regulären Graph r -ten Grades G_r bilden, bzw. außerdem die Anzahl der Randkanten jedes Gebiets $\equiv \rho \pmod{\vartheta}$ ist. Punkte und Kanten zählen immer so oft als Ecken und Randkanten eines Gebietes, wie sie bei Umlaufung des Randes angetroffen werden. Dabei doppelt zu zählende Kanten heißen „singulär“. Ein Gebiet heißt „gerade“ bzw. „ungerade“, wenn die Zahl seiner Randkanten (Rk) gerade bzw. ungerade ist. — Auf der Kugel sind $N_4(\vartheta, \rho)$ bei zusammenhängendem G_4 nur mit $\rho \leq 3$ möglich, $N_4(\vartheta, 0)$ nur für $\vartheta = 2$ und $\vartheta = 3$, $N_4(\vartheta, 1)$ nur, wenn $\vartheta \not\equiv 0 \pmod{3}$. (XI) — In N_3 heißt eine von einer Ecke eines Gebietes Γ ausgehende Kante „Außenkante“ (Ak) von Γ , wenn sie nicht Rk von Γ ist. — Man erhält eine Ecken-, bzw. Kantensignierung von N , wenn jede Ecke bzw. Kante mit $+1$ oder

1 signiert wird. Die Summe der Signierungen aller Ecken bzw. Kanten eines Gebietes wird mit $\Sigma(I)_e$ bzw. $\Sigma(I)_k$ bezeichnet. Kongruenzen $\Sigma(I) \equiv \rho \pmod{\vartheta}$ sind Heawoodsche Kongruenzen. Hier wird u. a. untersucht, für welche Netze sich diese Kongruenzen zu Gleichungen verschärfen lassen. Andere Sätze beziehen sich auf folgende Transformationen von Netzen: 1. Kantentransformation in N_3 : Eine Kante, die Rk der Gebiete Γ_1 und Γ_3 , Ak der Gebiete Γ_2 und Γ_4 ist, wird ersetzt durch eine Kante, die Rk der Gebiete Γ_2 und Γ_4 und Ak von Γ_1 und Γ_3 ist. 2. Auflösung einer Ecke 4. Grades in zwei Ecken 3. Grades durch Einfügen einer neuen Kante. 3. Auflösung einer Ecke $2m$ -ten Grades ($m > 2$) durch sukzessive Abspaltung von Ecken 4. Grades bei Einführung je einer neuen Kante in $m - 1$ Ecken 4. Grades, die dann wieder in $2m - 2$ Ecken 3. Grades aufgelöst werden können. 4. Aufweitung einer Ecke e vom Grade m , indem man e durch ein m -Eck ersetzt. — Jeder Eulersche Graph auf T läßt sich durch Auflösung seiner Ecken in einen paaren G_3 transformieren. Jeder G_3 mit einem Faktor 1. Grades F im Raum oder auf T läßt sich durch Transformation von Kanten aus F in einen paaren G_3 verwandeln. (VIII)

— Die Kanten von N_4 lassen sich zu paarweise kantenfremden geschlossenen Kantenzügen, „Erzeugende“ von N_4 genannt, zusammenfügen, wobei sich in jeder Ecke die Erzeugenden schneiden. Eine Erzeugende, die sich selbst schneidet, heißt von zweiter Art, sonst von erster Art. Jedes N_4 mit zusammenhängendem G_4 und n Erzeugenden läßt sich auf mindestens 2^{n-1} verschiedene Weisen durch Auflösung der Ecken in ein $N_3(2, 0)$ transformieren. (XI) — Faßt man die ungeraden Gebiete eines N_3 beliebig paarweise zusammen, so läßt sich N_3 so signieren, daß die Summe der Signaturen der Ecken für jedes ungerade Gebiet ± 1 , für jedes gerade Gebiet und jedes Paar ungerader Gebiete 0 ist, wobei, wenn der Graph G_3 von N_3 einen Faktor 1. Grades F enthält, die Endpunkte der Kanten von F verschieden signiert werden können. (IX) — N sei ein beliebiges Netz auf T mit k Kanten, das keinen Nullkreis, d. h. Kreis aus einer Kante ohne Eckpunkt, enthält. Die ungeraden Gebiete werden beliebig paarweise zusammengefaßt. Ein gerades Gebiet Γ^* und ein Paar ungerader Gebiete Γ_1^* und Γ_2^* werden, soweit vorhanden, beliebig ausgewählt. Dann lassen sich die Kanten so signieren, daß 1. wenn k gerade, die Summe der Signaturen der Randkanten für jedes ungerade Gebiet ± 1 , für jedes gerade Gebiet und jedes Paar ungerader Gebiete 0 ist, 2. wenn k ungerade, $\Sigma(I^*)_k = 2$ oder $\Sigma(I^*)_k = \Sigma(I_1^*)_k = \Sigma(I_2^*)_k = 1$, sonst wie im Fall 1. (X) — Die weiteren Sätze beziehen sich alle auf Netze auf der Kugel K_0 . Auf genau 2^{n-1} Weisen läßt sich ein N_4 mit n Erzeugenden durch Auflösung der Ecken in ein $N_3(2, 0)$, ein $N_4(2, 0)$ in ein $N_3(3, 0)$, ein $N_4(2, 1)$ in ein $N_3(2, 1)$ transformieren. (III, VIII, IX) — Die Gebiete Γ_1 und Γ_2 heißen entgegengesetzt bezüglich der Kante k , wenn k Ak von Γ_1 und Γ_2 ist. (Es kann auch $\Gamma_1 = \Gamma_2$ sein). Die Gebiete $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \dots, \Gamma_r$ bilden ein vollständiges System S^* entgegengesetzter Gebiete, wenn jede Kante von N_3 entweder Rk genau eines Gebietes Γ_i oder Ak von Γ_i und Γ_j ist ($i, j = 1, 2, \dots, r$). Jedes $N_3(2, 0)$ zerfällt in drei vollständige Systeme entgegen-

gesetzter Gebiete. N_3 heißt „halbgerade“, bezeichnet mit hgN_3 , wenn es ein System S^* besitzt. Die nicht zu S^* gehörenden Gebiete von hgN_3 sind gerade. Die Außenkanten Ak^* der Gebiete von S^* bilden einen Faktor 1. Grades von hgN_3 . Durch Transformation solcher Kanten läßt sich jedes hgN_3 , wie jedes brückenlose N_3 , in ein $N_3(2, 0)$ verwandeln. (II, III) — Wird in $N_3(4, 0)$ ein S^* ausgewählt, so läßt es sich durch Transformation von Ak^* in ein $N_3(3, 0)$ transformieren; dabei wird aus jedem 4μ -Eck von S^* ein 6μ -Eck, aus jedem sonstigen 4μ -Eck ein 3μ -Eck. (VIII) — Ein N_3 mit f Gebieten läßt sich genau dann durch Aufweitung von Ecken nicht in ein $N_3(2, 1)$ überführen, wenn N_3 halbgerade ist und S^* g Gebiete enthält, wobei $g \equiv f \pmod{2}$. (III, IV) — Die Überführbarkeit von N_3 in $N_3(3, 0)$ durch Aufweitung der Ecken ist mit der Lösung des Vierfarbenproblems gleichbedeutend. — Mit $V - N_3(2, 0)$ wird ein hgN_3 bezeichnet, in dem alle Gebiete von S^* Vierecke sind. Aus einem $V - N_3(2, 0)$ erhält man durch Zusammenziehen der Vierecke ein N_4 . Jedes $V - N_3(2, 0)$ läßt sich durch Transformation paarweise eckenfremder Kanten in $N_3(3, 0)$ (VIII) und mit Ausnahme des Würfelnetzes in $N_3(2, 1)$ (VI) transformieren; dabei können zur Transformation mit höchstens einer Ausnahme nur Rk der Vierecke von S^* ausgewählt werden. — Die Gebiete von N_4 lassen sich so den Klassen $+1$ und -1 alternierend zuordnen, daß Gebiete derselben Klasse keine Kante gemein haben. Notwendige Bedingungen dafür, daß N_4 durch Eckenauflösung in ein $N_3(2, 1)$ transformiert werden kann, ist $f_{+1} \equiv f_{-1} \equiv 0 \pmod{2}$, wobei f_i ($i = \pm 1$) die Zahl der Gebiete der Klasse i ist. (VI) — Hat N_4 n Erzeugende, dann lassen sich seine Ecken auf 2^{n-1} Weisen so signieren, daß in jedem Gebiet der Klasse i ($i = \pm 1$) die Anzahl der Ecken mit der Signatur i gerade ist (II) und daß sie ungerade ist dann, wenn für jede Erzeugende ε und für $\lambda = \pm 1$ die Kongruenz (a): $\frac{1}{2}e(\varepsilon) + i_\lambda(\varepsilon) + K_\lambda(\varepsilon) \equiv 1 \pmod{2}$ gilt. (V) [$e(\varepsilon)$ ist die Anzahl der Ecken von N_4 , die auf ε liegen ohne Doppelpunkt von ε zu sein. Die Gebiete Γ_ε in die K_0 durch ε zerlegt wird, seien in die Klassen ε_{+1} und ε_{-1} alternierend eingeteilt; $i_\lambda(\varepsilon)$ ist die Zahl aller Ecken von N_4 , die im Innern eines Gebiets Γ_ε der Klasse ε_λ liegen; ist ε Erzeugende 2. Art, e Doppelpunkt von ε und ist bei einer Orientierung von ε von den beiden von e ausgehenden Rk eines Gebiets Γ_ε die eine nach e hin, die andere von e weg gerichtet, so heißt e Kontinuitätsecke (K -Ecke) von Γ_ε ; $K_\lambda(\varepsilon)$ ist die Zahl aller K -Ecken in Gebieten Γ_ε der Klasse ε_λ]. Aus diesem Satz folgt 1. In einem beliebigen Netz läßt sich jede Kante so signieren, daß in jeder Ecke die Zahl der dort endenden Kanten mit der Signatur $+1$ und in jedem Gebiet die Zahl der Rk mit der Signatur -1 gerade ist (oder Null) (II), 2. N_4 läßt sich genau dann durch Auflösung seiner Ecken in $N_3(2, 1)$ transformieren, und zwar auf 2^{n-1} Weisen, wenn für jede Erzeugende ε die Kongruenz (a) gilt. (V) — Ein Kreis aus k Kanten heiße k -Kreis. Enthält N keinen 3-Kreis, so lassen sich die Ecken mit drei Farben so färben, daß durch Kanten verbundene Ecken verschieden gefärbt sind. Dabei kann, wenn N 4- oder 5-Kreise enthält, die Färbung eines beliebigen 4- oder 5-Kreises beliebig vorgegeben werden. (VII) — Eine einfach geschlossene Linie in einem hgN_3 , die keine Ecke trifft und μ Ak^* von hgN_3 genau einmal schneidet, werde mit t_μ^* , ein hgN_3 ohne singuläre Kante und ohne t_3^* mit hgN_3^* , bezeichnet. Dieses enthält weder 3- noch 1-Ecke. Für hgN_3^* ist das Vierfarbenproblem lösbar, wobei alle Gebiete von S^* gleich gefärbt sind. (XII) — Die Ecken von hgN_3^* lassen sich so signieren, daß für jedes Gebiet Γ : (b) $\Sigma(\Gamma)_e = 0$ bzw. $= \pm 3$, wenn Γ gerade bzw. ungerade ist; dabei können die Endpunkte der Ak^* verschieden signiert werden. Enthält hgN_3^* 5-Ecke, so kann für ein beliebiges 5-Eck Γ^* die Signierung vorgegeben werden, falls nur $\Sigma(\Gamma^*)_e = \pm 3$. Ein Beispiel für ein hgN_3 ohne singuläre Kante, das kein hgN_3^* ist und für das die Gleichungen (b) nicht gelten, wohl aber die entsprechenden Kongruenzen mod 3, ist das Tetraeder mit zu Dreiecken aufgeweiteten Ecken. Das Fehlen von t_3^* ist nur eine hinreichende aber keine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Satzes. (XII) — Die Beweise werden meist durch Induktion geführt. Viele einfache Beispiele erläutern die Sätze. H. Künneth.

Theoretische Physik.

Mechanik:

• Ziegler, Hans: *Mechanik. Bd. I: Statik der starren und flüssigen Körper sowie Festigkeitslehre.* (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften. 5.) 3. neu-bearb. Aufl. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1960, 244 S. sfr./DM 28,50.

Bei der großen Anzahl der vorhandenen Lehrbücher für das erfahrungsgemäß schwierige Studium der Technischen Mechanik muß ein Autor das im allgemeinen fest umrissene Stoffgebiet schon in einer neuen und leicht faßbaren Form bringen, will er mit seinem Buch den Studierenden eine wirkliche Hilfe in die Hand geben. Der vorliegende Band I der „Mechanik“ von Ziegler entspricht in hohem Maße dieser Forderung. In knapper, exakter Sprache werden in drei Teilen die Statik der starren Körper, die Statik der Flüssigkeiten und die Festigkeitslehre behandelt, wobei neben der übersichtlichen Darstellung die klaren Definitionen neuer Begriffe hervorzuheben sind. Da überdies das Hauptgewicht auf analytische Berechnungsmethoden gelegt wird, kann das Werk dem an der Technischen Mechanik interessierten angewandten Mathematiker bestens empfohlen werden. Eine Fülle von guten Bildern und Beispielen erleichtern das Verständnis dieses wertvollen Buches.

H.-J. Franck.

Skowroński, Janisław and Stefan Ziemia: *Certain properties of mechanical models of structures.* Arch. Mech. stosow. **11**, 193—209 (1959).

Verff. betrachten ein System materieller Punkte, das als Modell eines elastischen Kontinuums angesehen werden kann. Zwischen den einzelnen Massenpunkten sollen nichtlineare Feder- und Dämpfungskräfte wirken. Außerdem werden gewisse Randbedingungen berücksichtigt, die die Beeinflussung des Modells von außen her charakterisieren. Verff. bilden die Bewegungsdifferentialgleichungen des Massensystems in kartesischen Koordinaten und unterscheiden dabei äußere und innere konservative und dissipative Kräfte sowie Zwangskräfte, die sich aus den Bindungen ergeben. Dem System wird ein Bildpunkt zugeordnet, dessen Bewegung die des Systems darstellt. Verff. gehen dann zu verallgemeinerten Koordinaten über und erörtern die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art, insbesondere die Bedeutung der verallgemeinerten Kräfte. Sie zeigen, daß durch die dissipativen Kräfte in der von ihnen vorausgesetzten Form eine Energieabnahme bedingt ist. Sie erläutern ferner den Begriff des Phasenraumes und studieren die Topologie der Phasenkurven, vor allem deren Verhältnis zu den Energieflächen. Daran knüpfen sie einige Bemerkungen über die Beschränktheit der Trajektorien an und erwähnen die Bedeutung der Systeme, die zur Klasse *D* gehören.

R. Reißig.

Valecici, Victor: *Sur les liaisons holonomes et non holonomes.* Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. **3**, 365—371 (1958).

Eine Verallgemeinerung früherer Arbeiten [dies. Zbl. **71**, 180 und Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math. naturw. Kl. **102**, Nr. 4, 39 p. (1958)] zeigt, daß sich Bindungsgleichungen der Form $f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$ linear in den dq , den virtuellen Verschiebungen, mit Koeffizienten als Funktionen von t, q, \dot{q} und \ddot{q} darstellen lassen. Der Unterschied zwischen holonom und nichtholonom Bindungen spielt bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen erster Art keine Rolle, da die Existenz der Lagrangeschen Multiplikatoren gesichert ist.

F. Selig.

Gumerov, Š. A.: *Über eine neue Formulierung der Bedingungen für die Anwendbarkeit der Hamilton-Jacobischen Methode für nichtholonyme konservative Systeme.* Izvestija Akad. Nauk Uzb. SSR, Ser. fiz.-mat. **1959**, Nr. 1, 31—44 (1959) [Russisch].

La théorie de Hamilton-Jacobi peut être appliquée, sous certaines conditions, à l'intégration des équations de mouvement d'un système non holonome dans le cas où la fonction de potentiel et les liaisons sont homogènes. L'A. généralise ces condi-

tions pour le cas où le potentiel n'est plus une fonction homogène et donne, ensuite, une méthode permettant de simplifier essentiellement le calcul. Un exemple est traité en détail pour illustrer la théorie exposée. *C. Woronetz.*

Bodner, V. A., V. P. Seleznev and V. E. Ovčarov (Ovcharov): Contribution to the theory of inertial damped systems with arbitrary period, invariant with respect to maneuvering of the object. *ARS J.* **30**, 93—97 (1960). Übersetzung aus *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Energet. Avtomat.* **1959**, Nr. 3, 11—18 (1959).

Schuler hat im Jahre 1923 durch die Aufstellung des Prinzips von der beschleunigungsfreien Abstimmung (84-Minuten-Prinzip) einen Weg zur Konstruktion von Lotanzeigergeräten gewiesen, deren Anzeige invariant gegen Bewegungen des Geräteträgers auf der Erdoberfläche ist. Ein Nachteil des klassischen Schuler-Systems liegt in der Tatsache, daß es an der Stabilitätsgrenze arbeitet, d. h. daß Störungen zu ungedämpften Schwingungen von 84 Minuten Periode führen. Man kann die Schwingungen dämpfen, stört aber dann die für die Funktion wichtige Abstimmung. Dieses Dilemma versuchen die Verff. nun dadurch zu umgehen, daß sie äußere Informationen über den Ort oder die Geschwindigkeit des Geräteträgers verwenden, um eventuelle Störschwingungen des Anzeigergerätes (Kreiselplattform) zu dämpfen. Sie zeigen, daß man damit die Eigenschwingungszeit erheblich kleiner als 84 Minuten wählen kann und geben dafür eine Art verallgemeinertes Schuler-Prinzip an. Eine Fehlerbetrachtung zu dem vorgeschlagenen Verfahren ist durchgeführt.

K. Magnus.

Miele, Angelo: Lagrange multipliers and quasi-steady flight mechanics. *J. Aero-Space Sci.* **26**, 592—598 (1959).

In this very interesting paper a general method is presented for investigating optimum conditions of the quasi-steady mechanics of flight, namely, among all sets of solutions of the equations $\Phi_1 = T \cos \omega - D - W \sin \theta = 0$, $\Phi_2 = T \sin \omega + L - W \cos \theta = 0$, with three additional constraints $\Phi_k(z_0) = 0$, $k = 3, 4, 5$; $z_0 = \pi$, $M, L, \theta, \beta, \omega$, to find that particular set which extremizes (i. e. maximizes or minimizes) the function $\psi = \psi(z_0)$, where $\Phi_6 = \psi$. Here are: T the thrust, D the drag, L the lift, W the weight, θ the inclination of the velocity with respect to a horizontal plane, ω the inclination of the thrust with respect to the velocity, π the ratio of static pressures at the altitude h and at the altitude of the tropopause, M Mach-Number, β engine control parameter, $D = D(\pi, M, L)$, $T = T(\pi, M, \beta)$. In practical cases the ψ -function can be the flight velocity, the flight altitude, the path inclination, the rate of climb, the range per unit fuel consumed, the endurance per unit fuel consumed, etc. The constant Lagrange multipliers λ_i , $i = 1, \dots, 6$ are introduced by means of this composite expression $F = \sum \lambda_i \Phi_i$, $\lambda_6 = 1$. The necessary conditions for an extremum $F_z = 0$ give a system of six differential equations explained in matrix form. A generalized solution is obtained in a determinantal form. The author concludes that the characteristic of this solution is to unify into a single equation the results of a large segment of the previous contributions to the quasi-steady mechanics of flight. It is shown that some particular problems (such as maximum speed or range or endurance, ceiling, steepest ascent, best rate of climb, flattest descent, etc.) are all covered by the same determinantal equation. The optimum ratio of induced drag to zero-lift drag is evaluated for arbitrary relationships between zero-lift drag coefficient, induced drag coefficient, thrust, specific fuel consumption and M -number. Design problems are also investigated. The problems of the optimum flight conditions for curvilinear motion in a horizontal plane are treated also. Another determinantal equation is derived, from which, as a particular case, the turning flight with maximum angle of bank or angular velocity or minimum radius of curvature is investigated. The author remarks that these cases of flight are only particular aspects of a helicoidal flight. We are very sorry that considera-

tions of extent have prevailed the writer to omit the treatment of the helicoidal case from this paper.

D. Rašković.

● Hecht, F. (Schriftleiter): IXth International Astronautical Congress Amsterdam 1958. Proceedings. IX. Internationaler astronautischer Kongress. Bericht. XIe congrès international d'astronautique. Comptes rendus. I. II. Wien: Springer-Verlag 1959. XII. 1—506; 507—970 p., 424 fig.

Die Arbeiten werden, soweit für dieses Zbl. von Interesse, einzeln angezeigt.

Kooy, J. M. J.: On the orbital computations and the guidance problem of a deep space rocket. IX th internat. astronaut. Congr. Amsterdam 1958, Proc. 1, 469—506 (1959).

Es werden Bahnberechnungen für eine Rakete angestellt, die von der Erde aus startend zunächst auf eine Keplerbahn um die Erde geschossen wird. Von dort aus soll in einem geeignet ausgerechneten Zeitpunkt ein nochmaliger Antrieb einsetzen, der die Rakete auf die gewünschte Bahn zu anderen Himmelskörpern bringt. Die vier Phasen dieser Bahn: Aufstieg, Keplerbahn, zweite Antriebsperiode und Raumflug werden gesondert durchgerechnet, wobei sowohl ballistische, als auch himmelsmechanische Verfahren verwendet werden. Eine Hauptschwierigkeit des Projektes liegt in der notwendigen Ausrichtung der Raketenachsen vor Beginn der zweiten Antriebsperiode. Die technischen Möglichkeiten zur Lösung der auftretenden Probleme werden gestreift.

K. Magnus.

Miele, Angelo: General variational theory of the flight paths of rocket-powered aircraft, missiles and satellite carriers. IXth internat. astronaut. Congr. Amsterdam 1958, Proc. 2, 946—970 (1959).

The present article is a condensed version of the previous investigation of the same author AFOSR —Techn. Note-58-246); it is an attempt to introduce a broad, unified theory of the flight programming for rocketpowered vehicles, presenting only statements of a general engineering nature, with regard to the necessary conditions for the extremum. For analyzing the optimum flight paths general equations are presented. It is assumed that the trajectories are entirely contained in a plane passing through the center of the earth, which is assumed spherical. The vector acceleration of gravity is regarded as radially directed and the variability of which with the altitude is accounted for. The airplane is conceived as a particle, on which aerodynamic forces — lift (L) and drag (D) — are acting. These forces are calculated neglecting aerodynamic lag, i. e. the relationship is assumed to have this form $D = D(h, V, L)$, where V is the flight velocity relative to the earth, and h the altitude. The kinematical and dynamical relationships and equations form a set of five differential relationships, where the independent variable is one (t) and the dependent variables are eight: distance flown X , altitude h , velocity modulus V , path inclination θ , the instantaneous mass of the vehicle m , lift L , engine-parameter α , and the angle between thrust vector and velocity vector ω . The general problem of the optimum trajectory in a vertical plane embodies three degrees of freedom, associated with the time programming of: lift distribution $L(t)$, engine mass flow $\beta[\alpha(t)]$ and thrust direction $\omega(t)$. The variational question is investigated within the general frame of the problems of Mayer type, i. e. as the problem of minimizing the difference $\Delta G = G_f - G_i$ between the final and initial values of an arbitrarily specified function $G(X, h, V, \theta, m, t)$. Special problems involving either one or two degrees of freedom are investigated by the introduction of additional constraining equations. Excluding a few exceptional cases, the totality of extremal arcs is generally composed of zero-thrust sub-arcs, sub-arcs flown with maximum engine output, and variable-thrust sub-arcs. Because of the discontinuous character of the solution, the Erdmann-Weierstrass corner conditions are applied. The boundary conditions include a number of fixed end-points conditions plus a number of natural conditions. The additional constraints independent of the time, independent of

both the lift and the thrust inclination and independent of the distance flow are treated. The problem of minimum propellant consumption ($G = -m$) is considered with typical boundary conditions for a satellite carrier and for an intercontinental missile. For the case of a flat earth, particular attention is devoted to some special class of trajectories: vertical paths with $G(h, V, m, t)$, level paths with $G(X, V, m, t)$ arbitrarily inclined rectilinear paths with $G(X, h, V, m)$; curvilinear trajectories flown with negligible induced drag; non-lifting paths imbedded in an isothermal medium; and vacuum flight trajectories. The closed form expressions are derived for the distribution of Lagrange multipliers and the optimizing condition. The set of Euler equations is deduced and the first integrals are determined. Furthermore, a complete formulation of the boundary conditions is supplied by means of the general transversality condition; its application is shown to typical flight paths of earth satellites and intercontinental missiles.

D. Rašković.

Deutsch, Armin J.: Orbits for planetary satellites from doppler data alone. *ARS J.* **30**, 536—542 (1960).

Egorov, V. B.: On Bonnet's theorem. *PMM J. appl. Math. Mech.* **22**, 1025—1036 (1959), Übersetzung aus *Priklad. Mat. Mech.* **22**, 721—729 (1958).

L'auteur généralise un théorème dû à O. Bonnet qui démontre que si des points matériels de masses m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) partent d'une même position A avec des vitesses initiales v_{i0} ayant toutes la même direction et décrivent sous l'action de forces positionnelles \bar{F}_i la même courbe, alors un point matériel de masse M et de vitesse initiale \bar{V}_0 ayant la même direction que les v_{i0} parcourra encore la même courbe s'il part de A et est soumis à la force $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ pourvu que $M V_0^2 = \sum_{i=1}^n m_i v_{i0}^2$.

La généralisation consiste à remplacer $\sum \bar{F}_i$ par $\sum a_i \bar{F}_i$, où les a_i sont des constantes arbitraires, et à remplacer la condition de Bonnet par $M V_0^2 = \sum a_i m_i v_{i0}^2$, avec, cette fois évidemment, la condition supplémentaire $M V_0^2 = \sum a_i m_i v_{i0}^2 > 0$. L'A. applique ensuite sa généralisation à l'étude de certains cas particuliers du problème des trois corps.

N. Forbat.

Rumjancev (Rumyantsev), V. V.: On stability of equilibria of a rigid body with liquid-filled cavities. *Soviet Phys., Doklady* **4**, 46—49 (1959), Übersetzung aus *Doklady Akad. Nauk SSSR* **124**, 291—294 (1959).

Le travail se rapporte à l'étude de la stabilité d'équilibre d'un corps solide portant des cavités remplies partiellement par un liquide parfait. L'A. constate, d'abord, que, d'après les raisonnements de Liapounoff, la théorie linéaire des faibles oscillations ne satisfait pas en général et démontre, ensuite, le théorème bien connu de Lagrange partant des équations complètes de mouvement. La démonstration peut être étendue au cas d'un liquide visqueux.

C. Woronetz.

Archangel'skij, Ju. A.: Die Bewegung eines schnellen Gorjačev-Čaplyginschen Kreisels. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1957**, Nr. 7, 122—124 (1957) [Russisch].

Gorjatschev und Tschaplygin haben gezeigt, daß die Bewegungsgleichungen eines Kreisels mit speziellem Trägheitsellipsoid ($A = B = 4C$) und spezieller Lage des Schwerpunktes ($y_s = z_s = 0$) bei Vorliegen bestimmter Anfangsbedingungen streng integriert werden können. Verf. zeigt, daß für den Grenzfall eines schnellen Kreisels ($r \gg p, q$) eine Näherungslösung auch für beliebige Anfangsbedingungen angegeben werden kann.

K. Magnus.

Kuznecov (Kuznetsov), L. I.: On the movement of a gyroscope in a resisting medium taking into account the friction on the suspension clip. *Vestnik Leningradsk. Univ.* **13**, Nr. 19 (Ser. Mat. Mech. Astron. 4) 151—155, engl. Zusammenfassung 155 (1958) [Russisch].

Es werden die kleinen Schwingungen eines symmetrischen schweren Kreisels betrachtet, der eine den Drehgeschwindigkeiten um die Kardanachsen proportionale Dämpfung und gleichzeitig Coulombsche Reibungskräfte in den Kardanlagern erfährt. Eine Näherungsberechnung des Problems nach der bei nichtlinearen Systemen viel verwendeten Mittelungsmethode zeigt, daß die Nutations-Schwingung stets gedämpft verläuft. Die Präzessions-Schwingung ist gedämpft für den hängenden Kreisel (Schwerpunkt unter dem Fixpunkt) und aufschaukelnd für den aufrechten Kreisel (Schwerpunkt über dem Fixpunkt).

K. Magnus.

Rionero, Salvatore: Un ulteriore caso di non validità del principio dell'effetto giroscopico. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. 25, 173—180 (1959).

Es wird — im Anschluß an mehrere frühere Arbeiten — gezeigt, daß die Gleichung des Kreiseffektes: $C r_0 \dot{k} = \bar{M}$ (\bar{k} = Einheitsvektor in Richtung der Figuren-achse, \bar{M} = äußeres Moment) nicht zur Berechnung der Lage eines Kreisels mit Fixpunkt verwendet werden kann, wenn das Moment \bar{M} eine ganz spezielle Abhängigkeit vom Drehwinkel um die Figurenachse besitzt.

K. Magnus.

Kuznecov (Kuznetsoff), L. I.: How to count amplitudes of the forced vibrations of a system. Vestnik Leningradsk. Univ. 14, Nr. 1 (Ser. Mat. Mech. Astron. 1) 150—158, engl. Zusammenfassung 158 (1959) [Russisch].

Zur Messung von Schwingungen wird häufig ein Beobachtungsfernrohr auf einer Scheibe befestigt, die auf vier Amortisatoren elastisch gelagert ist. Dieses System kann bei ungenauem Schwerpunktsausgleich oder bei ungleicher Steifigkeit der Amortisatoren zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden, die nach der Methode der kleinen Schwingungen berechnet werden.

K. Magnus.

Mettler, E.: Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. Ingenieur-Arch. 28, Festschrift Rich. Grammel, 213—228 (1959).

The starting point for the considerations of this paper is the known fact that a linear mechanical system has modes of (small) vibrations for which some of the normal coordinates remain zero while others change harmonically in time. In this paper, the influence of the non-linearity of the system on this behavior is investigated. Exactly speaking, the stability of zero solutions for some coordinates is investigated under the assumption that the equations of motion contain non-linear coupling terms. The discussion is carried on for some types of mechanical systems consisting of one or several elastic pendulums. The problem reduces to the investigation of one or a system of Hill's equations. For this purpose, the method of Krylov and Bogoljubov is employed. The paper is an interesting contribution to the theory of non-linear vibrations.

M. P. Bieniek.

Potapenko, A. A.: Bestimmung der Schwingungszahl eines mechanischen Systems. Vestnik Leningradsk. Univ. 13, Nr. 13 (Ser. Mat. Mech. Astron. 3) 157—159, engl. Zusammenfassung 159 (1958) [Russisch].

In the paper is regarded a quantitative criterion of the interesting problem: oscillatory property of a nonlinear automatic vibrating system. Consider the system with one degree of freedom and assume the strongly nonlinear spring characteristic [particular on the Duffing's form $\varphi(x) = \alpha x + \beta x^3$, in general as an arbitrary function $\varphi(x)$] the author takes in account miscellaneous damping: viscous damping ($\pm \nu \dot{x}$) and dry friction ($\pm F$). The motion of the system is described by the equations: $\ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3 - \nu \dot{x} - F$ for $\dot{x} > 0$, $\ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3 + \nu \dot{x} + F$ for $\dot{x} < 0$. With the aid of the first integral there are determined the crossing points of phase plane trajectories with the x -axis and evidently the successive maximal deformations (amplitudes) of the system x_0, x_1, \dots, x_n . According to the form of the dry friction force $\pm F$ the "stay regions": $[-a_{qr}, a_{qr}]$, ($a_{qr} > 0$) are denoted. It is postulated, that if the motion is started from an arbitrary point of the domain (a_{qr}, x_0) on the x -axis, the next fluctuation is the last. It is deduced, that if the motion

is started from the domain (x_0, x_1) , there are still two fluctuations. In this successive manner substituting (adequate to the \pm regions of F) the values of the amplitudes to the amplitude-equations (received from the first integral) we have the quantity of possible oscillations for our system. A numerical example is given. It is necessary to mention, that since the time at which paper was published there have been more general criteria in this direction. *J. Skowronski.*

Roberson, Robert E.: Principles of inertial control of satellite attitude. IXth internat. astronaut. Congr. Amsterdam 1958, Proc. 1, 33—43 (1959).

Unter weitgehenden Vernachlässigungen werden die Reaktionsmomente berechnet, die in Raumfahrzeugen durch innere Drehmassen oder auch schwingende Massen erzeugt werden können. Derartige Vorrichtungen wurden als Stellglieder zur Verwirklichung von Lagenregelungen vorgeschlagen. Die diese Stellglieder betätigenden Regler werden nicht behandelt, ihre Funktion wird nur angedeutet. *K. Magnus.*

Rocard, Y.: Instabilités et vitesses critiques dans les systèmes oscillants mécaniques. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 133—149 (1958).

Nach einer kurzen Einführung und Erinnerung an bekannte Schwingungszustände, wie sie in mechanischen Systemen und elektrischen Schwingkreisen auftreten, ist es das Ziel des Verf., eine Beschreibung dieser Schwingungszustände von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden von einem höheren Gesichtspunkt aus zu betrachten. Er nennt diese Systeme verwandt „mit menschlicher Aktivität, die oft in sich selbst den Ursprung einer Instabilität tragen“, verbunden im allgemeinen mit einer kritischen Geschwindigkeit, die diese Systeme charakterisiert. Nicht-holonome Verbindungen bringen Kräfte, die sich nicht von einem Potential ableiten lassen, in das System; infolgedessen entstehen labile Eigenschwingungen mit ständig wachsenden, von der Zeit abhängigen Amplituden, die schließlich zur Zerstörung des schwingenden Gegenstandes führen. Obengenannte Kräfte hängen oft von einer gewissen Laufgeschwindigkeit des ganzen Systems ab, die Anlaß für den Begriff der instabilen kritischen Geschwindigkeit gibt; es werden dann Beispiele angeführt. Verf. betrachtet zur Untermauerung seiner Ausführungen zunächst zwei durch Selbstinduktion L und Kapazität C abgestimmte elektrische Schwingkreise, gekoppelt durch eine wechselseitige Beeinflussung M beider Kreise und beschreibt deren Bewegungsgleichungen (hier Fehler in den Indizes!). Er kommt zu dem Schluß, daß es die Kopplung M ist, die die beiden Eigenfrequenzen des Systems beseitigt, wenn man bei Kräften bleibt, die sich aus einer potentiellen Energie ableiten lassen. Ein Schwingkreis wird dann durch eine Verstärkerröhre erweitert, wobei die Spannung am Eingang der Röhre durch Klemmen an einem zweiten Kondensator abgenommen wird. Durch irgendeine Vorrichtung solle eine elektromotorische Kraft der Form AQ_2/C wieder in den ersten Kreis eingeleitet werden; es entstehen zwei gekoppelte Differentialgleichungen; die Kopplung beider Kreise wird hier durch die Verstärkerröhre hervorgerufen. Verf. erklärt dann, daß die beiden Anfangs-Eigenfrequenzen des Systems sich austauschen und imaginär werden können, das System wird instabil und entwickelt eine instabile Eigenschwingung mit in der Zeit anwachsenden Amplituden. Als weiteres Beispiel wird ein schwingender Flügel bei gewissen kritischen Fluggeschwindigkeiten untersucht. Es werden die beiden gekoppelten Differentialgleichungen des schwingenden Flügels bei Biegung und Torsion aufgestellt, die mit den Differentialgleichungen der oben zitierten elektrischen Schwingkreise verglichen werden. Eine Erweiterung der Differentialgleichungen für Biegung und Torsion wird diesmal in Gestalt des Gliedes $BV^2\alpha_2$ vorgenommen (V Fluggeschwindigkeit, α_2 Drehwinkel des Flügels), so daß Bewegungsgleichungen entstehen, die mit obigen erweiterten elektrischen Schwingkreisen verglichen werden können. Die kleine Tabelle

Fluggeschwindigkeit	$V = 0$	200 km/h	500 km/h	800 km/h
Biege-Eigenfrequenz	10	12	16	18
Torsions-Eigenfrequenz	30	27	20	18

an Hand eines praktischen Beispiels zeigt dann, daß bei der letzten Geschwindigkeit die Instabilität erscheint. Als letztes Beispiel führt Verf. die Differentialgleichungen der Bewegung eines Automobiles an, wobei eine Kopplung zwischen dem Drehwinkel φ um die Längsachse des Wagens in Fahrtrichtung mit dem Ablenkwinkel Θ aus der Fahrtrichtung auftritt, also eine gyroskopische Kopplung. Bei $\Theta \neq 0$ beschreibt der Wagen eine Kurve der Krümmung $1/R = K$, mit proportionaler Abhängigkeit von Θ , so daß erst durch das Zusatzglied $M\Omega^2\Theta$ (Ω Winkelgeschwindigkeit der Räder) die Differentialgleichungen wieder vollständig werden und somit das Problem des „shimmy“ beschreiben. Man findet auch hier eine instabile kritische Geschwindigkeit. Zum Schluß verweist Verf. auf sein Werk „Dynamique générale des Vibrations“, (Paris 1943), worin wesentlich ausführlicher seine Gedanken vorgetragen werden.

H. Göcke.

Massa, Emilio: Stabilità delle vibrazioni sinerone con una forza eccitatrice sinusoidale nel tempo in sistemi non lineari con rigidità costante a tratti a due gradi di libertà. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend., Sci. mat. fis. chim. geol., Ser. A 92, 501—535 (1959).

L'A. rend compte de résultats expérimentaux et théoriques relatifs aux vibrations d'un système à 2 degrés de liberté non linéaire, le ressort reliant les deux masses ayant deux constantes différentes suivant que la distance entre ces masses est inférieure ou supérieure à une longueur donnée. Il étudie les vibrations entretenues de régime de ce système sous l'action d'une force sinusoïdale, l'amortissement étant supposé négligeable. L'expérience fait apparaître et la théorie élaborée par l'A. confirme que la vibration de régime synchrone avec la force excitatrice peut avoir trois amplitudes distinctes dont deux correspondent à un mouvement stable et une à un mouvement instable. Ces résultats, déjà connus dans le cas d'un système à un degré de liberté (par exemple dans l'équation de Duffing), sont complétés ici par l'apparition, constatée expérimentalement et confirmée par la théorie, dans une certaine bande de fréquences, d'une instabilité d'un type nouveau comportant des battements. L'analyse théorique faite par l'A. comporte le passage aux équations aux variations du système, qui forment un système différentiel linéaire et homogène à coefficients fonctions périodiques du temps. L'étude de la stabilité locale est ainsi ramenée à celle des racines de l'équation caractéristique.

N. Forbat.

Mel'nikov, V. K.: Bestimmung des Einfangbereichs für eine Gleichung zweiter Ordnung, die der konservativen nahe ist. Mat. Sbornik, n. Ser. 49 (91), 353—380 (1959) [Russisch].

L'A. prendendo le mosse dall'equazione

$$(a) \quad d[m(\varepsilon, t) \dot{x}]/dt + k(\varepsilon, t) P'(x) = \varepsilon f(\varepsilon, t, x, \dot{x}),$$

che ne può essere interpretata dal punto di vista meccanico come equazione del moto di un punto di massa variabile sottoposto all'azione di una forza elastica non lineare debolmente dipendente dal tempo e di una piccola forza di attrito, ove ε vi è un piccolo parametro non negativo e le funzioni $m(\varepsilon, t)$ e $k(\varepsilon, t)$ sono indipendenti dal t per $\varepsilon = 0$, stabilisce per via analitica (l'applicazione del metodo d'integrazione numerica allo conseguimento del medesimo risultato è stato conseguito dal Ju. S. Sajasov che ne è l'iniziatore del codesto lavoro) il dominio di cattura corrispondente al tempo t_0 e relativo ad una data posizione d'equilibrio x_r dell'equazione (a), costituito dall'insieme dei valori spettanti alle condizioni iniziali (x_0, \dot{x}_0) , tali che le soluzioni dell'equazione (a) che ne derivano abbiano le oscillazioni stabilizzate rispetto ad x_r . Pur sottolineando il fatto che l'analisi dell'equazione (a) può essere utilizzata all'uopo della determinazione più precisa del dominio di cattura in un acceleratore, come pure quello della fallacia di alcuni lavori conseguiti dai non matematici concernenti la risoluzione di esso problema corrispondente al caso $f(\varepsilon, t, x, \dot{x}) \equiv 0$, l'A. ne fa l'uso di un certo analogo delle separatrici che ne permettono di far distin-

guere i moti di vari tipi e ne stabilisce un metodo di pratica determinazione di tali separatrici.

D. J. Mangeron.

Reißig, Rolf: Forschungen und Fortschritte in der nichtlinearen Mechanik. Die direkte Methode zum Nachweis von Schwingungen und ihrer Stabilität. Forsch. Fortschr. 33, 5—9 (1959).

Allgemein gehaltener Übersichtsbericht über direkte Verfahren zum Nachweis der Existenz und der Stabilität von periodischen Lösungen nichtlinearer inhomogener Differentialgleichungen. Die zweite Methode von Ljapunov sowie die entsprechenden von späteren Bearbeitern abgeleiteten Varianten werden zusammenfassend am Beispiel eines Systems zweiter Ordnung dargestellt.

K. Magnus.

Val'dman, A.: Erzwungene Schwingungen eines Systems mit einer fünfgliedrigen elastischen Charakteristik. Izvestija Akad. Nauk Latvjsk. SSR 10 (147), 51—58 (1959) [Russisch].

Verf. löst das Problem erzwungener Schwingungen eines nichtlinearen Systems mit einem einzigen Freiheitsgrad, dessen Bewegung mit der Gleichung $J\ddot{\psi} + V(\psi) = M_0 \sin \omega t$ beschrieben wird. In dieser Gleichung sind I, M_0 Konstanten, $V(\psi)$ ist eine aus fünf symmetrisch angeordneten linearen Teilen zusammengesetzte nichtlineare gebrochene Funktion der Veränderlichen ψ . Zur Aufgabenlösung verwendet Verf. die Näherungsmethode — äquivalente Linearisation — bei der die Funktion $V(\psi)$ aus der Bedingung kleinster quadratischen Abweichung durch die Funktion $p^2\psi$ ($p^2 = \text{Konstante}$) ersetzt wird. Die Ergebnisse der Lösung werden vom Verf. für drei Alternativen in dimensionsloser Form kurz wiedergegeben. Diese Alternativen unterscheiden sich voneinander danach, in welchem Teil der nichtlinearen Charakteristik der Arbeitspunkt liegt. Jede Alternative wird noch mit den Ergebnissen besonderer Fälle ergänzt. Bemerkung des Ref. In der Einleitung zur Arbeit bemerkt Verf., die nichtlineare Charakteristik von solcher Art käme bei Kupplungen für die Übertragung der Drehmomente bei Verbrennungskraftmaschinen für den Schiffsantrieb vor. Es ist zu bemerken, daß man bei der Untersuchung der Torsionsschwingungen dieser Systeme sehr oft mit dem Schema mit einem einzigen Freiheitsgrad nicht auskommt. Die Anwendung eines auf diese Weise allzu vereinfachten Systems kann zu einigen Ungenauigkeiten führen, was übrigens, soweit ich es übersehen kann, L. Püst in einer Arbeit nachgewiesen hat (dies. Zbl. 84, 399).

A. Tondl.

Artobolevskij, I. I.: Verwendung einer Art der doppelten Führungsgruppe in ebenen kurvenläufigen Getrieben. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov 16, Nr. 64, 65—76 (1957) [Russisch].

Verf. zeigt die mannigfaltige Verwendung der doppelten Führungsgruppe in verschiedenen ebenen kurvenläufigen Getrieben. Es wird die Erzeugung von Knochoiden für beliebige Kurven dargestellt mit besonderer Berücksichtigung der Kegelschnittkurven und der Geraden. Ferner werden Getriebe untersucht, die äquidistante Kurven erzeugen, und zwar durch Verbindung mit Getrieben zur Erzielung des momentanen Drehpunktes. Die in der Arbeit angeführten Beispiele beweisen die Vorteile dieser Gruppe für die Konstruktion von ebenen kurvenläufigen Getrieben. Es sei daran erinnert, daß Verf. 1959 ein Buch „Theorie ebener kurvenläufiger Getriebe“ (dies. Zbl. 88, 162) herausgegeben hat, in dem er verschiedene umfassende Fragen behandelt und wertvolle Beiträge zur Konstruktion von selbsttätigen Maschinen und Apparaten zur Erzielung verschiedener funktioneller Abhängigkeiten bringt.

Chr. Pelecudi.

Böhm, F.: Drehschwingungen von Zahnradgetrieben. Österreich. Ingenieur-Arch. 13, 82—103 (1959).

Der Verschleiß der Zahnräder ist bisher auf verschiedene Arten untersucht worden und wird in erster Linie auf die Kontaktdrücke gemäß der Hertzschen Gleichung

chung, die dynamischen Zusatzkräfte oder die Ermüdung des Werkstoffes nach der Wöhlerschen Kurve zurückgeführt. Verf. untersucht die Drehschwingungen von Zahnrädern und berücksichtigt die Übertragungsfehler, das Zahnspiel und die zu übertragenden Drehmomente. Das Zahnradgetriebe wird als Schwinger betrachtet und das Problem in der Annahme einer periodisch veränderlichen Federzahl behandelt, wobei eine Hillsche Differentialgleichung erzielt wird. Mit Hilfe der zugeordneten Voltterraschen Integralgleichung kann die Schwingungsbeanspruchung mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Es werden ferner die Resonanzbeanspruchung, der Einfluß der statisch unbestimmten Kraftübertragung und des Zahnspiels bestimmt. Die in dieser Arbeit dargestellten neuen Betrachtungen bringen die Untersuchungen über das Schwingungsverhalten der Zahnradgetriebe bei stationärem Betrieb der Wirklichkeit näher.

Chr. Pelecudi.

● **Zinoŭev, Vl. A.: Theorie der Mechanismen und Maschinen.** [Teorija mekhanizmov i masin.] 2. verbess. und erg. Aufl. Moskau: Wissenschaftlich-technischer Staatsverlag für Maschinenbau-Literatur 1959. 188 S. R. 5.45 [Russisch].

Elastizität. Plastizität:

● **Päsler, Max: Mechanik deformierbarer Körper.** (Sammlung Götschen. Bd. 1189/1189a) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1960. 199 S. mit 48 Abb. DM 5,80.

Ein kleines, aber nützliches Büchlein. In klarer und übersichtlicher Weise werden die Grundzüge der Mechanik der deformierbaren Körper in gedrängter Form besprochen. Das Büchlein beginnt mit einer Sammlung von Sätzen und Formeln aus der Vektor- und Tensorrechnung, geht dann auf Grundbegriffe der Elastomechanik ein, um darauf die Kinematik, die Statik und die Dynamik in ihren Hauptzügen darzustellen. Darauf folgt ein Kapitel über die Hydro- und Aeromechanik, mit Hydrostatik beginnend, um auf stationäre und nichtstationäre wirbelfreie Strömungen überzugehen, worauf noch wirbelbehaftete Flüssigkeitsbewegungen und einige Grundprobleme der Mechanik der zähen Flüssigkeiten besprochen werden. Die Auswahl des Materials ist treffend, die Darstellungsweise klar, die Ausstattung des Büchleins gut. Für zukünftige Auflagen wäre wohl eine, wenn auch nur knappe Erweiterung auf Grundzüge der Plastizitätstheorie und Rheologie sehr erwünscht, wobei es vorläufig genügen würde, wenigstens auf die Grundbegriffe und eine Skizze der für diese neue Entwicklungsrichtung charakteristischen Problemstellung kurz einzugehen.

J. S. Cichy.

● **Bašelevskij, M. O.: Über die fundamentalen Lösungen der Differentialgleichungen eines anisotropen elastischen Körpers.** Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 19, 393—400 (1958) [Russisch].

Dies ist eine Arbeit aus der Schule des bekannten russischen Mathematikers W. D. Kupradze. Verf. stellt sich die Aufgabe, die Grundlösungen der Differentialgleichungen einer bestimmten Klasse anisotroper elastischer Körper zu ermitteln. Seine Methode gestattet die Bestimmung dieser Lösungen sowohl für die statische Aufgabe, als auch für die Schwingungsaufgabe. Durch Einführung einer geeigneten „Verschiebungsfunktion“ werden die Differentialgleichungen in den beiden Aufgaben auf Gleichungen für diese Funktion übergeführt. Die Lösungen der letzteren Gleichungen werden bestimmt, woraus sich die Lösungen der ursprünglichen Gleichungen direkt ergeben. Wenn man in den Differentialgleichungen für die hier betrachtete statische Aufgabe eine weitere Beziehung zwischen den Koeffizienten einführt, so gelangt man zu den Gleichungen eines transversal-isotropen elastischen Körpers. Das Fundamentalintegral dieser Gleichungen, das von E. Kröner (dies. Zbl. 52, 237) gefunden wurde, ist somit ein Spezialfall der vom Verf. bestimmten Lösung der allgemeineren Aufgabe.

J. Beránek.

Dvořák, Jaroslav: On the distribution of stress near openings (Continuation). Českosl. Akad. Ved, apl. Mat. 5, 170—193, russ. und engl. Zusammenfassung 194—195 (1960) [Tschechisch].

Grioli, Giuseppe: Sullo stato tensionale dei continui in equilibrio e sulle deformazioni nel caso elastico. Un metodo d'integrazione del problema dell'equilibrio elastico. Limitazioni per lo stato tensionale dei sistemi continui e per le deformazioni dei corpi elastici. Conference Sem. Mat. Univ. Bari 35/36, 18 p. (1958).

Im I. Teil (Un metodo d'integrazione del problema dell'equilibrio elastico) werden die früher vom Verf. abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums auseinandergesetzt (vgl. dies. Zbl. 48, 178). Diese Auseinandersetzung wird dann für die Konstruktion eines Näherungsverfahrens zur Lösung dieser Gleichungen verwendet. Beschrieben wurde die Anwendung des genannten Verfahrens auf das Problem des Gleichgewichts der dünnen elastischen Platte. — Im II. Teil (Limitazioni per lo stato tensionale dei sistemi continui e per le deformazioni dei corpi elastici) werden, ausgehend von den vorhin erwähnten Gleichgewichtsgleichungen, die Schranken für die Höchststärke der Kräfte im Gleichgewichtszustand eines beliebigen Systems unter Berücksichtigung sowohl der isothermen als auch adiabatischer Veränderungen bestimmt. Für elastische Körper findet Verf. die Schranken für die möglichen Verschiebungen in der Gleichgewichtskonfiguration. Das hier dafür vorgeschlagene Verfahren ermöglicht, diese Schranken ohne Integration der Differentialgleichung des elastischen Gleichgewichts zu bestimmen. *T. P. Angelitch.*

Kaliski, S. and J. Petykiewicz: Dynamical equations of motion and solving functions for elastic and inelastic anisotropic bodies in the magnetic field. Proc. Vibration Problems Nr. 2, 17—35 (1959).

Obwohl magnetodynamische Phänomene in festen Körpern zu vielen praktischen Anwendungen geführt haben, fehlen die grundlegenden mathematischen Untersuchungen fast vollständig. Hier wird ein Weg angegeben, wie man unter ziemlich allgemein gehaltenen Voraussetzungen über die elastischen, rheologischen, magnetischen und elektrischen Eigenschaften des Körpers übersichtlich zu den Bewegungsgleichungen gelangt. Die einzigen Vereinfachungen betreffen die Kleinheit der mechanischen Deformationen und die Vernachlässigbarkeit des sekundären Magnetfeldes. Es wird eine Matrixgleichung für zwölf „Lösungsfunktionen“ hergeleitet, — drei davon können eliminiert werden —, durch welche die Komponenten des elektromagnetischen Feldes ausgedrückt werden können und welche die Grundgleichungen entkoppeln, so daß also n voneinander unabhängige partielle Differentialgleichungen, eventuell von höherer Ordnung als die Grundgleichungen selbst, angegeben werden können. Dies hat den Vorteil, daß für jede der Lösungsfunktionen eine Gleichung der gleichen Form entsteht, die dann der Diskussion leichter zugänglich ist. Im Falle eines isotropen elektrischen Leiters, der ausführlich diskutiert wird, kann die Zahl der Lösungsfunktionen auf drei reduziert werden, wenn man den gesamten Raum zugrunde legt. Eine Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes durch Berücksichtigung von 36 Relaxationsfunktionen (Boltzmann's Modell) wird kurz skizziert und gezeigt, daß nach Anwendung der Laplacetransformation alle Relationen im Bildraum in der früher besprochenen Form wieder auftreten. Die rein formalen Betrachtungen sollen in kommenden Arbeiten auf Fundamentallösungen und Randwertprobleme angewendet werden. *F. Selig.*

Mangano, Guido: Sulla determinazione sperimentale dei carichi critici con il criterio dinamico. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend., Sci. mat. fis. chim. geol. Ser. A 92, 579—590 (1959).

L'A. rappelle d'abord le critère dynamique pour la détermination expérimentale des charges critiques d'un système élastique, critère qui est basé sur l'influence exercée par des forces directement appliquées sur les fréquences propres du système. On sait que la fréquence propre la plus basse diminue quand l'intensité de la force appliquée

augmente et tend vers 0 quand cette intensité tend vers la charge critique. On peut donc, par extrapolation, déterminer expérimentalement la charge critique, sans soumettre le système élastique effectivement à cette charge. L'A. montre ensuite à l'aide d'un exemple simple traité analytiquement que la fréquence propre fondamentale dépend d'une manière non négligeable du procédé employé pour appliquer cette force extérieure au système élastique, par exemple par la fixation d'un poids (alors la fréquence dépend de l'inertie de ce poids) ou à l'aide d'un ressort (dans ce cas la fréquence dépend de la constante du ressort). Par ailleurs toute la loi du mouvement du système peut être modifiée. Il peut s'ensuivre des erreurs importantes dans la détermination de la charge critique. En conclusion, l'A. propose de tenir compte dans les dispositifs expérimentaux de ces remarques et de s'efforcer de réaliser des montages tels que les forces appliquées ne dépendant pratiquement pas du mouvement vibratoire du système (par exemple emploi de ressorts mous). *N. Forbat.*

Mitra, Manindra: Exact transient solution of the buried line source problem for an asymmetric source. *Z. angew. Math. Phys.* **9a**, 322—331 (1958).

Für die durch Bewegung einer versenkten Quelllinie entstehenden Verschiebungen an der Oberfläche eines homogenen, isotropen, elastischen Halbraumes werden exakte Lösungsformeln angegeben, wenn die stoßartige Bewegung in einer speziellen für die Laplace-Transformation günstigen Form erfolgt. *W. Kertz.*

Sesan, Anton et N. Orlovski: Simplification des équations de la méthode des déformations et du calcul itératif pour des cadres quelconques. *Bul. Inst. Politehn. Iași*, n. Ser. **3** (7), 3/4, 245—249, russ. und französ. Zusammenfassung 250 (1957) [Rumänisch].

Les AA. cherchent à améliorer la convergence des opérations d'itération du système d'équations de la méthode des déformations, utilisée dans le calcul des structures hyperstatiques générales. On sait que cette convergence est très faible dans le cas où les inconnues sont, non seulement des angles de rotation, mais aussi des déplacements des noeuds. Les AA. généralisent la notion de „moment actif“ introduite dans des ouvrages antérieurs [*Acad. Republ. popul. Romine, Fil. Iași, Studii Cerc. ști.*, Ser. I **6**, Nr. 3/4, 59—69, 72—81 (1955)], notion très féconde pour l'étude des structures à chaînes cinématiques indépendantes. Ils définissent une nouvelle notion, celle de „moment actif de déplacement d'une chaîne cinématique, produit par toute la structure“. Cette notion permet l'étude des structures hyperstatiques à chaînes cinématiques liées, en les remplaçant par des structures virtuelles, à chaînes cinématiques indépendantes, ce qui conduit à un système d'équations de condition, sous une forme très simple. Cependant, il y a quelquefois des difficultés à écrire les expressions des „moments actifs“, surtout dans le cas où les liaisons des chaînes cinématiques sont complexes. *R. Voinea.*

Truesdell, C.: Invariant and complete stress functions for general continua. *Arch. rat. Mech. Analysis* **3**, 1—29 (1959).

The author dealt with stress functions for general continua in flat and curved spaces. Completeness of the solutions is considered. General solution for an n -dimensional flat space is given; different considerations for a curved space are done. Solutions in terms of stress functions are of two kinds: (i) solutions of particular dynamical equations, such as those of linear elasticity, classical fluid mechanics etc, and (ii) solutions of dynamical equations valid for all continuous media in a particular space. The author considers only the second kind of solution and gives an up-to-day report of all major known results and methods. One finds in Appendix a quasi-complete bibliography (approx. 200 papers) of works on stress functions for general continua, for linear elasticity and related theories. *P. P. Teodorescu.*

Ulrich, E.: Über das Problem der Vergleichsspannungen in der Festigkeitslehre. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* **25**, 106—114 (1959).

Wit, Roland de: Self-energy of a helical dislocation. Phys. Review, II. Ser. 116, 592—597 (1959).

Im Anschluß an eine zusammenfassende Veröffentlichung des Verf. über Versetzungstheorie [Solid State Physics 10, 249 (1960)] behandelt die vorliegende Arbeit Versetzungen, die sich mit konstanter Ganghöhe um einen geraden Kreiszylinder winden und deren Burgers-Vektor parallel zur Zylinderachse verläuft. Es wird angenommen, daß die axiale Länge groß gegenüber dem Zylinderradius und dieser groß gegenüber dem Burgers-Vektor ist. Ein von E. Kröner (Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Berlin 1958; dies. Zbl. 84, 400; S. 78) hergeleiteter Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie zweier (geschlossener) Versetzungen in einem elastisch isotropen unendlichen Medium dient unter Benutzung modifizierter Bessel-Funktionen erster und zweiter Art zur Berechnung der Selbstenergie. Hierbei wird zunächst über nichtgeschlossene Versetzungslinien integriert. Den Einfluß einer zusätzlichen Windung, die Anfangs- und Endpunkt der betrachteten Versetzung verbindet, auf die Selbstenergie untersucht Verf. am Ende der Arbeit. — Für die Grenzfälle kleiner (tightly wound helix) und großer (nearly straight helix) Ganghöhe ergeben sich einfachere Ausdrücke, die physikalisch ausgedeutet werden. Aus den Formeln folgt u. a., daß die Selbstenergie bei konstantem Zylinderradius und konstanter Windungszahl mit zunehmender Ganghöhe im ersten Fall abnimmt, im zweiten Fall zunimmt, also bei einer mittleren Ganghöhe ein Minimum annimmt. *C. Seyferth.*

• **Dašek, Václav: Statik der Rahmenkonstruktionen.** [Statika rámových konstrukcí.] Praha: Nakladatelství Československé Akademie Věd. 1959. 549 S. Kčs 43,— [Tschechisch].

In diesem Buch werden die wichtigsten in der technischen Praxis verwendeten Methoden für die Lösung der Rahmensysteme und zwar vor allem die Kraft- und Verformungsmethode, die Methode der Momentflächen sowie die Methode der Kraft- und Momentenverteilung behandelt. Im einleitenden Kapitel erwähnt der Verf. verschiedene Rahmenkonstruktionen und gibt einen Überblick über die Methoden für die Lösung von Rahmenkonstruktionen. Im zweiten Abschnitt werden die Grundbeziehungen für die Bestimmung der Verformung der geraden und der gekrümmten Stäbe behandelt (der Mohrsche Satz, das Prinzip der virtuellen Arbeiten). Man erwähnt die graphische Konstruktion der Biegelinie eines geraden sowie eines gekrümmten Stabes mit Hilfe der Methode der idealen Lasten. Das folgende Kapitel behandelt die Bestimmung der Beanspruchung und der Verformung gerader eingespannter Träger. Der Verf. behandelt die Fälle des einfachen vollkommen bzw. elastisch eingespannten Trägers, des Trägers mit einem konstanten oder veränderlichen Querschnitt, den Einfluß des Quervorschubs der Endquerschnitte des geraden Trägers und die Analogien zwischen der Spannungsfigur und der Momentfigur. Im Schluß dieses Abschnitts erwähnt man die Berechnung des Trägers mit einseitigem und mit beiderseitigem Anlauf. Der 4. Abschnitt des Buches enthält die Lösung der verbundenen Träger mit veränderlichem Querschnitt. Der 5. Abschnitt behandelt die Bogenträger. Vor allem sind es zweigelenkige Bögen, und zwar der Bogen mit den Gelenken in gleicher und ungleicher Höhe, der parabolische Bogen und der Bogen mit einer Zugstange; hier werden vom Verf. die Reaktionen und Verformungsgleichungen festgestellt. Im folgenden Kapitel des 5. Abschnitts werden die eingespannten Träger behandelt. Bei der Lösung kann man von einem Grundsystem ausgehen, das entweder ein Bogen oder ein einfach gestützter Träger ist, eventuell kann das Grundsystem ein einfacher auf einer Seite durch ein Gelenk gestützter und auf der anderen nach der Waagerechten verschiebbar gelagerter Träger sein (die sogenannte Methode der Balkenmomente). Der Verf. betrachtet die Einwirkungen des Nachlassens der Stützen des eingespannten Bogens und behandelt — am Schluß dieses Kapitels — die Fälle der Beanspruchungen und der Verformung des symmetrischen und des eingespannten parabolischen Bogens. Im letzten Kapitel des 5. Abschnitts wird die Lösung des

Problems für die elastisch eingespannten Bögen angedeutet (z. B. die Bögen, die den Bestandteil bestimmter Konstruktionen bilden u. ä.). Der 6. Abschnitt behandelt die klassische Methode für die Lösung der statisch unbestimmten Systeme, die sogenannte Kraftmethode, bei der bestimmte Kräfte oder Momente als unbekannte Größen eingeführt werden; die Bedingungsgleichungen drücken dann die Verformungsgleichungen aus. In den einzelnen Kapiteln bespricht der Verf. die statisch unbestimmten Größen, die Verformungsgleichungen und ihre Koeffizienten für die geraden und gekrümmten Stäbe, den Castiglianischen Satz, das Prinzip des Minimums der Verformungsarbeit und die Einwirkung des Nachlassens von Stützen und der Risse. Im weiteren wird vom Verf. die Lösung der Verformungsgleichungen mit Hilfe der Gaußschen Elimination nach E. Milne und J. Banachiewicz erwähnt. Weiter werden die Berechnungsmethoden für die symmetrischen und statisch unbestimmten Konstruktionen angeführt. Der 7. Abschnitt enthält die Lösung der Rahmenkonstruktionen mit Hilfe der Verformungsmethode. In dieser Methode werden die Verformungskomponenten als Unbekannte in die Berechnung eingeführt, das heißt die Vorschubbewegungen und Teildrehungen der Knoten, und die Bedingungsgleichungen sind Gleichgewichtsgleichungen der einzelnen Knoten oder der Konstruktionsteile. Der Vorteil der Verformungsmethode ist, daß man die Bedingungsgleichungen für die Bestimmung der unbekannten Verformungskomponenten leicht aufstellen kann, insbesondere wenn die Zusammendrückung oder die Dehnung des Stabes vernachlässigt wird. Am Anfang dieses Abschnittes erwähnt der Verf. die grundlegenden Beziehungen für die geraden Stäbe mit konstantem und veränderlichem Querschnitt, die Lösung der geraden Stäbe mit Gelenken oder der elastisch eingespannten Stäbe, einige Formen der Verformungsgleichungen, die Bestimmung der Einwirkung der Temperaturveränderung, die Lösung der Systeme mit den gekrümmten Stäben und den Ausdruck für die Beziehung zwischen der Kraft- und Verformungsmethode. Die Methode der Grundpunkte, die den Inhalt des 8. Abschnitts bildet, eignet sich besonders zur Berechnung der Rahmenkonstruktionen mit geraden Stäben, deren Knoten sich nicht verschieben, sondern sich teilweise elastisch drehen können. In der Einleitung zu diesem Kapitel werden ein allgemeiner Lösungsvorgang, die Bestimmung des Einspannmaßes, die Grundpunkte und die Übergangszahlen beschrieben. In den folgenden Kapiteln erwähnt der Verf. die Verteilung der Momente, die Lösung der Systeme mit verschiebbaren Knoten und die Einwirkung der Verschiebung von Knoten des Verbundrahmens und des Stockwerkrahmens. Der folgende 9. Abschnitt ist der Momentflächen- und Viermomentenmethode gewidmet; es werden die Grundbeziehungen abgeleitet und die entsprechenden Bedingungsgleichungen aufgestellt. Im 10. Abschnitt erwähnt der Verf. die Iterationsmethode für die Lösung der Rahmenkonstruktionen, die sogenannte Methode der Kräfte- und Momentenverteilung. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß man dabei die Gleichungssysteme nicht zusammenstellen und lösen muß. Der Verf. beschreibt die Lösung der Rahmensysteme mit nicht verschiebbaren und verschiebbaren Knoten und ein Verfahren für die Konvergenzbeschleunigung der Verteilung der Knotenmomente. Der Abschnitt 11 enthält die Lösung der ebenen Systeme bei einer räumlichen Belastung. Einzelne Kapitel: die Drehungsbeanspruchung gerader Stäbe und die senkrecht zu ihrer Ebene belasteten ebenen Rahmensysteme. Im Schlußkapitel 12 untersucht Verf. die Beanspruchung und Verformung des Trägers auf einer elastischen Unterlage. In diesem Zusammenhang befaßt sich Verf. mit der Lösung des Problems der geraden Träger auf einer elastischen Unterlage. Es handelt sich um die Träger von begrenzter und unendlicher Länge, die Träger als Bestandteile einer elastisch unbestimmten Konstruktion und die vollkommen starren Träger. Man erwähnt die Iterationslösung des Problems für Träger von endlicher Länge und die graphische Lösung. Diese Lösung kann man auf die Träger mit veränderlichem Querschnitt, komplizierter

Belastung und veränderlichem Wert des Zusammendrückbarkeitsfaktors anwenden. Die vorliegende Arbeit ist ein bedeutender Beitrag zur Weltliteratur über die Theorie der Rahmenkonstruktionen. Sie gibt kurzgefaßte aber genau formulierte Grundbeziehungen an, wobei sie die neuesten Quellen auf diesem Fachgebiet berücksichtigt. Die Darlegungen des Verf. sind immer durch mehrere anschauliche und ausführlich entwickelte Beispiele belegt. Das Buch kann sowohl für den Gebrauch der Wissenschaftler und der Ingenieure in der technischen Praxis, als auch für die Studierenden an den technischen Hochschulen dienen.

J. Valenta.

Boleanţu, Lazăr: Contributions à la détermination de l'équation d'équilibre d'un câble élastique. Bul. ştiin. tehn. Inst. politehn. Timişoara, n. Ser. 3 (17), 79—83, XIX, französ. und russ. Zusammenfassung 84 (1958) [Rumänisch].

L'A. considère un câble élastique, parfaitement flexible et il détermine, sous forme paramétrique, les équations de la courbe que le câble prend, sous l'action de son poids, dans l'état d'équilibre. On tient compte de l'allongement élastique, de la dilatation due à la variation de la température et de la variation de la densité du câble à cause de ses déformations. L'A. propose une méthode grapho-analytique pour construire la courbe. Parceque l'étude d'un câble, en tenant compte de ses déformations élastiques et thermiques est connue, l'apport de l'A. se résume à l'influence de la variation de la densité d'un câble sur sa courbe d'équilibre. C'est un apport purement théorique, car cette influence est pratiquement négligeable, tandis que les équations paramétriques de la courbe, trouvées par l'A. sont assez compliquées.

R. Voinea.

Borş (Borş), K. I. (C. I.): La torsion des barres cylindriques, formées de plusieurs matériaux anisotropes. An. ştiin. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, n. Ser., Sect. I. 3, 207—212, français. Zusammenfassung 212 (1957) [Russisch].

The problem considered in this paper is that of the torsion of a bar made of several anisotropic materials. On the basis of the generalized Hooke's law the author constructs the stress-strain relations. Introducing the function of torsion φ in the equations of equilibrium he obtains an equation to be satisfied by the stress function (5). The function φ should satisfy the boundary conditions (7). Representing the function φ in the form of the equation (20) the equation (5) is satisfied. (The equation (20) is obtained by considering the properties of the potential of a double layer). The functions $\varrho_0(s)$ and $\varrho(s)$ in the equation (20) for φ are determined by satisfying the boundary conditions for φ . The satisfaction of these conditions leads to two Fredholm integral equations for ϱ_0 and ϱ , (21) and (22). The existence of the solution of these equations is proved.

J. Lamparski.

Bruzzese, Eugenio: Ricerca teorica e sperimentale di configurazioni secondarie di equilibrio del tipo flessio-torsionale in travi alte precomprese. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl., II. Ser. 9, Nr. 1. 32—50 (1958).

The author considers a beam of elongated rectangular cross-section, prestressed by a cable laid inside the beam along a parabola; he goes on to determine the critical tension in the cable, above which the beam buckles laterally. The method of calculation of the critical tension is that of Bryan-Timoshenko.

G. Capriz.

Capriz, Gianfranco: Alcune osservazioni sulla instabilità di una trave sollecitata a torsione. Rivista Mat. Univ. Parma 8, 145—160 (1957).

Die statische Untersuchung der Stabilität eines elastischen Balkens unter der Einwirkung eines Drehmomentes hat eine Nichtübereinstimmung zwischen der Theorie der endlichen elastischen Verformung und ihrer linearer Annäherung gezeigt. Um dies zu erklären, geht Verf. vom dynamischen Ansatz des Problems aus und sucht, unter Berücksichtigung der von höherer Ordnung kleinen Inertialkräfte, die entsprechende statische Lösung, insofern eine solche existiert. Er benützt dabei die Signorinische Methode der sukzessiven Hilfssysteme. Auf diese Weise wird gezeigt, daß die Meinung über die Existenz der nichttrivialen Lösungen des Problems auch für die

größeren als die kritischen Belastungen unbegründet ist. Vielmehr existieren solche Lösungen nur für kritische Werte des Drehmomentes. *T. P. Angelitch.*

Chakravorti, Amitava: A note on the position of the centre of flexure of a beam of isotropic material having a section bounded by a parabola and a straight line. *Z. angew. Math. Phys.* 10, 333—338 (1959).

Das Bieungszentrum eines isotropen Balkens, dessen Querschnitt durch eine Parabel und eine Gerade begrenzt wird, wobei die Last parallel zur geraden Kante wirkt, wird nach der Methode von Sokolnikoff (*Mathematical Theory of Elasticity*, dies. Zbl. 70, 411) für das Bieungszentrum eines Balkens mit halbkreisförmigem Querschnitt ermittelt. *J. Pretsch.*

Jarmaj, L. and E. Szereday: Buckling of connected parallel beams. *Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut*, Volume hors Série, 348—355, 1 Tafel (1958).

Es werden m parallele Balken mit abschnittsweise gleichen Trägheitsmomenten betrachtet. Alle Balken liegen in derselben Ebene. Jeder der m Balken ist in $n + 1$ Abschnitte unterteilt. Die einzelnen Abschnitte sind im allgemeinen von ungleicher Länge, aber alle Balken sind in gleicher Weise unterteilt. Trotzdem unterscheiden sich die Balken, da die Trägheitsmomente im allgemeinen auch in gleichliegenden Abschnitten verschiedener Balken verschieden sind. Die Balken sind durch starre Stäbe senkrecht zur Balkenachse in den Abschnittsendpunkten miteinander verbunden. Die starren Stäbe sind gelenkig an die Balken angeschlossen. Jeder Balken ist durch 2 gleichgroße entgegengesetzte Kräfte auf Knicken beansprucht. Diese m Kräfte aller Balken stehen in festen vorgegeben Verhältnissen zueinander. Bei Steigerung der Lasten bis zur kritischen Belastung bleiben die Verhältniszahlen erhalten. Die starren Verbindungsstäbe hat man sich so geführt zu denken, daß sie sich nur in Richtung ihrer Stabachse verschieben können. Dadurch können die Balken des Systems nur innerhalb ihrer gemeinsamen Ebene ausknicken und nicht senkrecht dazu. Bei Erreichen der kritischen Last werden die Balken durch die starren Verbindungsstäbe durch Einzelkräfte, die von den Knicklasten abhängen, zusätzlich auf Biegung beansprucht. Die kritische Last ergibt sich aus dem größten Eigenwert λ der charakteristischen Gleichung. Diese ist in λ vom Grad n und folgt aus der Koeffizientendeterminante eines Systems von $m \cdot n$ homogenen Gleichungen für die n unbekannten Verschiebungen der Abschnittsendpunkte in der gemeinsamen Ebene aller Balken und die $(m - 1)n$ unbekannten Einzelkräfte vertikal zu den Stabachsen in den Abschnittsendpunkten. Das Gleichungssystem wird hergeleitet aus den einfacheren Gleichungssystemen für den Biegebalken mit abschnittsweise veränderlichem Trägheitsmoment, in dessen Abschnittsendpunkten Einzelkräfte senkrecht zur Balkenachse angreifen, und für den Knickstab mit abschnittsweise veränderlichem Trägheitsmoment. Die numerische Bestimmung des größten Eigenwertes erfolgt durch ein Iterationsverfahren an einer elektronischen Rechenmaschine. Einfache Beispiele zeigen die Genauigkeit des Verfahrens. Die Darstellung gewinnt durch Anwendung der Matrizenschreibweise an Übersichtlichkeit. 6 Lit. *G. Levin.*

Jindra, F.: Beitrag zur nicht-linearen Torsion. Österreich. Ingenieur-Arch. 11, 134—146 (1957).

Ausgehend von den Beziehungen von H. Kauderer (dies. Zbl. 35, 401) über den Zusammenhang zwischen den Winkeländerungen und Spannungen nach dem allgemeinen nichtlinearen Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen werden zuerst die Differentialgleichungen für die Verwölbung und für die Spannungsfunktion bei reiner Torsion eines Stabes und die dazugehörigen Formen der Randbedingung aufgestellt. Für kreisförmigen Querschnitt tritt keine Verwölbung ein, und man erhält genaue Lösungen des Spannungsproblems. Die Differentialgleichungen für die Spannungsfunktion bei vereinfachtem Elastizitätsgesetz mit nur einem Zusatzgliede lassen sich mittels der Methode des kleinen Parameters annähernd lösen, wobei als nullte Näherung die Lösung der linearen Theorie zu nehmen ist. Das Verfahren

wird dann auf Stäbe angewandt, deren Querschnitt eine Ellipse und ein gleichseitiges Dreieck ist. Im Falle eines quadratischen Querschnitts wird für die Spannungsfunktion ein eingliedriger Näherungsansatz angenommen, welcher die Randbedingung erfüllt, wobei die Konstante aus der Forderung nach dem Minimum des mittleren Fehlerquadrates über dem Querschnitt bestimmt werden kann. Aus vorhandenen Versuchsergebnissen an kreisförmigen Hohlstäben werden die Konstanten für eine erste Näherung des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes für Flußeisen bestimmt, und mit diesen Werten werden Diagramme des Spannungsverlaufs für die behandelten Querschnittsformen angegeben.

A. Kuhelj.

Roth, W.: Die tordierte, einfach gekrümmte Welle mit konstanter Krümmung. Ingenieur-Arch. 27, 326—349 (1960).

Untersucht wird ein einfach gekrümmter Torsionsstab, der entweder in den End- und Zwischenlagen reibungsfrei drehbar gelagert oder an einem Ende eingespannt ist. Ausweichen aus der Ebene und Krümmungsänderungen sind nicht möglich. Mit Gleichgewichtsbedingungen und Hookeschem Gesetz wird aus der Differentialgleichung $d^2\varphi/d\alpha^2 - EG \sin \varphi/2 = 0$, die Funktion $\varphi = f(\alpha)$ ermittelt (α laufende Koordinate, φ Drehwinkel). Im ersten Fall wird für $\alpha = \alpha_0$, $M = 0$ und für $\alpha = 0$, $M = M_a$ gefordert; nach Einführung von $\beta_0 = \alpha_0 \sqrt{E/2G}$ sind diagrammatisch dargestellt $q_{(a)} = f(\varphi_b)$ und $\Omega_a = M_a R/I_p \sqrt{EG} = f(\varphi_a)$. Auch im Falle der Einspannung ($\alpha = \alpha_0$; $\varphi_b = 0$) sind Diagramme aufgestellt. Mit $\alpha = \alpha_0$; $\varphi_b = 0$ im ersten Falle und $\alpha = \alpha_0$; $M_b = 0$ im zweiten Falle wird der Grenzübergang zur gekrümmten Welle mit unendlich großer Windungszahl durchgeführt. Für kleine Öffnungswinkel $\beta_0 \leq 0,5$ wird eine Näherungslösung angegeben. Dünne Wellen sind Voraussetzung.

H. Goldner.

Sarafutdinov, V. I.: Angenäherte Berechnung von Balken und Rahmen hinsichtlich der Wirkung eines gleichmäßig verteilten momentanen Impulses. Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1959, Nr. 6, 13—15 (1959) [Russisch].

Dans la présente Note est démontrée une méthode approchée permettant de calculer l'effet d'une impulsion momentanée sur les châssis et sur les autres objets élastiques. La méthode est basée sur le principe bien connu de Saint Venant et les résultats obtenus sont comparés avec ceux trouvés par des autres auteurs.

C. Woronetz.

Szabo, J.: Application du calcul matriciel à la solution numérique de la stabilité élastique des barres droites de section variable. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 391—401 (1958).

Dans cette référence on s'occupe du flambage des barres droites de section variable qui ont des rigidités constantes le long des distances finies de la barre (l_k et l_{k+1}), donnant un procédé approximatif dont l'exactitude peut être augmentée aux choix. En supposant que le moment fléchissant varie en domaine $-l_k \leq \xi \leq l_{k+1}$ suivant une parabole du deuxième degré, on donne une équation de récurrence $M_\xi = a M_{k-1} - b M_k + c M_{k+1}$, pour chacune des trois sections successives ($k-1$, k , $k+1$); a , b , c sont des fonctions de ξ^2 . Les déplacements transversaux y_{k-1} , y_k , y_{k+1} des ces sections sont exprimés par le moment fléchissant M_ξ , et après intégration on obtient un système d'équations donnant une liaison entre les moments M_{k-1} , M_k , M_{k+1} et les déplacements. Ce système d'équations et les conditions aux extrémités peuvent s'exprimer par une équation matricielle. Pour le système homogène on obtient la formule correspondant à celle employée par Stüssi. D'après, on examine le cas de la barre chargée par les forces axiales et gênée par des ressorts dans son déplacement transversal. On démontre un procédé itératif qui fournit la plus grande valeur propre et ses vecteurs propres à l'aide de multiplications matricielles. On présente aussi l'application numérique de cette méthode par un exemple, déterminant la charge critique axiale d'une barre avec trois ressorts.

D. Rašković.

Teodorescu, Petre P.: Sur le calcul des poutres — parois en forme de parallélogramme. An. Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 20, 9—21, russ. und französ. Zusammenfassung 21 (1958) [Rumänisch].

En utilisant une représentation de l'état de tensions et de l'état de déformations en coordonnées obliques, données antérieurement [Acad. Republ. popul. Romine, Inst. Mec. apl. Traian Vuia, Studii Cerc. Mec. apl. 9, 391—410 (1958)] l'A. étudie le problème des poutres-parois en forme de parallélogrammes. À l'aide des polynômes biharmoniques on donne des résultats pour un domaine parallélogramme soumis à des sollicitations élémentaires. Le problème des poutres-parois continues et les problèmes des poutres-parois à une seule ouverture, en forme parallélogramme, sont étudiés à l'aide des développements en séries de Fourier. Les calculs sont portés jusqu'à des résultats finaux.

R. Voinea.

Zapałowicz, Wiesław: Torsion of prismatic bars of regular polygonal cross-section. Arch. Mech. stosow. 11, 559—593 (1959).

In der klassischen Elastizitätstheorie wird wohl die Torsion prismatischer Stäbe mit einem Querschnitt von der Form eines gleichseitigen Dreiecks oder Quadrats behandelt, doch ist die Methode nicht auf Polygone mit einer Seitenzahl $n > 4$ anwendbar. Verf. bildet das n -seitige Polygon auf den Einheitskreis ab und wendet die Methode von Muskhelišvili an. Die Torsionsfunktion erhält er in Reihenform und bestimmt aus ihr Torsionssteifigkeit, Spannungen im Stabquerschnitt, Verwerfung des Querschnitts infolge Torsion und Schubspannungslinien. Als Beispiel werden zunächst Torsionssteifigkeit und maximale Schubspannung für den Dreikantstab abgeschätzt und mit den klassischen Werten verglichen. Für den Sechskantstab reicht die Genauigkeit der Berechnung aus, wenn man sich auf 6 Reihenglieder beschränkt.

J. Pretsch.

Ambarcumjan, S. A.: Über zwei Methoden zur Berechnung zweischichtiger orthotroper Schalen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 10, Nr. 2, 17—38 (1957) [Russisch].

Für orthotrope elastische Schalen werden zunächst Ausdrücke für Verzerrungen, Spannungen und Schnittkräfte angegeben, um daraus die Differentialgleichungen für Verschiebungen abzuleiten, wobei als eine Koordinatenfläche die Grenzfläche zwischen beiden Schichten angenommen wird. Die Elastizitätskonstanten werden als symmetrisch zu den Krümmungslinien dieser Grenzfläche angenommen; weiter wird auch vorausgesetzt, daß bei der Differentiation nach den Koordinaten sowohl die Größen der ersten Fundamentalform als auch die Hauptkrümmungen als Konstanten zu betrachten sind. Statt der üblichen Annahme, wonach die zur Mittelfläche orthogonalen Linienelemente nach der Belastung unverzerrt bleiben, werden hier Rechnungen für jede der folgenden zwei Voraussetzungen ausgeführt: a) entweder ändert das orthogonale Linienelement in jeder Schicht nur seine Länge nicht oder b) solche Elemente bleiben außerdem auch nach Auftragung der Lasten gerade. Nach Aufstellung der Grundgleichungen unter der ersten Annahme werden entsprechende Ausdrücke auch unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Normalen längs der ganzen Schalendicke unverzerrt bleiben. Durch Reihenentwicklungen der Glieder nach der Schichtdicke wird weiter gezeigt, daß im ersten Falle nur solche Zusatzglieder gegenüber der üblichen Theorie zu berücksichtigen sind, die schon durch die Lösungen der üblichen Differentialgleichungen bestimmt sind. Nachdem noch kurz auf die Bestimmung der einzelnen Größen im Falle b) eingegangen wird, wird die Verwölbung einer quadratischen Platte mit biegungsfreier Auflagerung unter dem Einfluß einer Querlast für den Fall der Voraussetzung b) bestimmt. Es zeigt sich zwar, daß das Zusatzglied mit dem Quadrate des Verhältnisses der Plattendicke zu deren Länge abfällt, daß aber doch diese Korrektur für nicht zu dünne Platten nicht immer vernachlässigt werden darf.

A. Kuhelj.

Atsumi, Akira: Stresses in a circular cylinder having an infinite row of spherical cavities under tension. *J. appl. Mech.* **27**, 87—92 (1960).

Es wird der Spannungszustand in einem unendlich langen auf Zug beanspruchten Kreiszyylinder mit sphärischen Hohlräumen untersucht, die auf der Achse in regelmäßigen Abständen angeordnet sind. Zur Lösung werden Reihenentwicklungen nach biharmonischen Funktionen benutzt, für deren Entwicklungskoeffizienten sich aus den Randbedingungen lineare Gleichungssysteme ergeben. Diese werden durch Entwicklung der Unbekannten nach Potenzen des Parameters $\lambda = r/a$ gelöst, falls mit r der Radius der kugelförmigen Hohlräume und mit a der Zylinderradius bezeichnet wird. Numerische Angaben werden für die Kerbziffer gemacht; es zeigt sich, daß sie etwa die Größenordnung 2 hat. Die Konvergenz der benutzten Reihen wird nicht untersucht.

A. Weigand.

Grigoljuk, E. I.: Die Tangentialmodulbelastung kreiszyllindrischer Schalen bei kombinierter Belastung. *Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim.* **13**, Nr. 1, 53—54 (1958) [Russisch].

Tangential modulus load is defined as a lower critical load according to the Shanley-Rabotnov theory. The author's formulation of the equations for the plastic instability of a circular cylinder is valid for the deformation and the flow theories. The deflections of the middle surface of the shell are assumed in the form of a sinusoid both in the axial and in the circumferential directions. The critical stresses can be calculated from a given set of two equations. Explicit formulae are delivered for the particular cases of pure axial compressions, uniform external pressure and pure torsion.

J. Murzewski.

Hodge jr., Philip G.: Yield point load of an annular plate. *J. appl. Mech.* **26**, 454—455 (1959).

In this paper the yield point load is computed for a circular ring plate subjected to a uniform load and simply supported at its outer and inner boundaries. A figure is drawn to show the plastic regime boundaries and the yield point load as functions of the inner radius of the annulus. A previously published solution by V. S. Chernina [*Izvestija Akad. Nauk SSSR. Otd. techn. Nauk* 1958, Nr. 7, 33—39 (1958)] is proved to be incorrect. Solutions similar to the one given in the paper may be derived if either one or both edges of the annular plate are clamped instead of simply supported. The resulting computations pertaining to these cases are not included in the paper and only the stress profiles are shown.

W. A. Bassali.

Kljušnikov, V. D.: Die Stabilität von Platten jenseits der Elastizitätsgrenze. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 7, 41—56 (1957) [Russisch].

L'A. considère le problème de la stabilité des plaques planes au-delà de la limite d'élasticité, en utilisant une loi de plasticité du matériel différentielle, non-linéaire, donnée par l'A. (v. le rapport précédent). Après avoir passé en revue différents résultats préliminaires, ainsi que les critères statiques et dynamiques de stabilité qu'il va employer, l'A. étudie quelques cas particuliers. On donne ainsi des résultats pour une plaque rectangulaire encastree au long d'un de ses côtés, les autres côté étant libres, et actionnée par une charge uniformément distribuée, de compression, sur les deux côtés parallèles libres. On établit aussi des équations pour un cas général, en les étudiant avec des méthodes approximatives de calcul.

P. P. Teodorescu.

Mazzarella, Franco: La piastra quadrata appoggiata al centro. *Giorn. Mat. Battaglini* **85** (V. Ser. 5), 188—196 (1957).

On étudie une plaque carrée, appuyée au centre sur un pilier et sollicitée par une charge p uniformément répartie. L'A. se propose de trouver l'expression des flexions w , qui satisfasse l'équation différentielle des plaques et les conditions sur le contour. Il considère w de la forme $w = w_0 + w_1$, où w_0 est une somme de polynômes biharmoniques homogènes et w_1 est l'expression des flexions d'une plaque circulaire chargée par une force p uniformément répartie et, dans le sens contraire, par une

force concentrée $P = pa^2$ (a étant la longueur du côté de la plaque). Des calculs numériques, qui accompagnent l'exposé théorique, prouvent que l'exactitude est suffisante si on prend, dans l'expression de w_1 , cinq polynômes biharmoniques. L'A. détermine les valeurs numériques des coefficients qui ne dépendent pas de la constante élastique ν (l'inverse du coefficient de Poisson). Les autres coefficients qui interviennent dans l'expression de w_1 peuvent être déterminés, lorsqu'on connaît la valeur numérique de ν , à l'aide d'un système d'équations linéaires. *R. Voinea.*

Mišonov, (Mishonov), M. K.: On the theory of shallow shells. PMM J. appl. Math. Mech. **22**, 972—979 (1959), Übersetzung aus Priklad. Mat. Mech. **22**, 691—695 (1958).

Die Arbeit bezieht sich auf die Theorie schwach gekrümmter Schalen, wie sie von Wlassow (Vlasov Obsčaja teorija oboloček, Moskva 1949, deutsche Übersetzung: Allgemeine Schalentheorie, Berlin 1958; dies. Zbl. **81**, 395) entwickelt wurde. Diese Theorie, die nur eine Normalbelastung der Schale zuläßt, führt auf 2 gekoppelte partielle Differentialgleichungen 4. Ordnung für die Spannungsfunktion und die Durchbiegung der Schale. Hier wird gezeigt, wie sich diese Theorie in einfacher Weise dadurch verallgemeinern läßt, daß man etwa vorhandene Tangentialbelastungen in die Normalspannungsergebnisse einbezieht. In den Grundgleichungen erweitern sich dabei nur die rechten Seiten. Als Sonderfälle werden etwas eingehender behandelt: 1. Zylindrische Schalen mit rechteckigem Grundriß bei gleichmäßig verteilter Tangentialbelastung. 2. Allgemeine Schalen mit rechteckigem Grundriß bei gleichmäßig verteilter Tangentialbelastung. 3. Zylindrische Schalen mit konstanter Krümmung und rechteckigem Grundriß bei beliebiger Tangentialbelastung. *Th. Lehmann.*

Nariboli, G. A.: Mixed boundary value problems for rectilinear plates. I. Arch. Mech. **stosow.** **9**, 507—524 (1957).

Mit Hilfe Greenscher Funktionen werden gemischte Randwertprobleme dreieckiger Platten untersucht. Dabei wird jeweils ein Rand der Platte als eingespannt angenommen, während die beiden anderen frei drehbar gestützt sind. Die Lösung erfolgt in Integralform durch Superposition zweier Anteile: Erstens eines Anteils für eine allseitig frei aufliegende Platte unter Gleichlast und zweitens eines Anteils, der der Einspannung Rechnung trägt. Das Einspannmoment erscheint dann als Unbekannte und wird mittels einer Fouriertransformation aus den Randbedingungen erhalten. Dieses Verfahren wird auf eine rechtwinklig-gleichschenklige Dreieckplatte und eine weitere rechtwinklige Dreieckplatte mit einem Katheten-Hypotenusen-Winkel von 30° bzw. 60° angewendet. *H.-J. Franek.*

Obolašvili, E. I.: Über ein Problem des momentenfreien Gleichgewichts einer zusammengesetzten Schale. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **19**, 649—652 (1957) [Russisch].

Verf. macht es sich zur Aufgabe, den Spannungszustand in einer zusammengesetzten Schale, bestehend aus zwei Schalen, die entlang einer Grenze vereinigt sind, zu bestimmen. Das Problem wird gelöst für den Fall, daß die Mittelflächen der vereinigten Schalen von einem Kugelflächenstück und einem Flächenstück eines Rotationsparaboloids gebildet sind. Die Normalkräfte und die Schubkräfte können hier durch analytische Funktionen dargestellt werden. Die Bedingung, daß Spannungen an der gemeinsamen Grenze der Teilschalen stetig sein müssen, gestattet die Bestimmung der analytischen Funktionen als Lösung des sogenannten Riemann-Hilbertschen Problems für den Kreis. Diese Lösung ist durch die Schwarzsche Formel gegeben, aus welcher sich dann die gesuchten Spannungen in den beiden Teilschalen ergeben. *J. Beránek.*

Tameroğlu, S.: Zur Membran- und Biegetheorie der Kreiszylinderschale für ein nichtlineares Elastizitätsgesetz. Ingenieur-Arch. **27**, 372—384 (1960).

H. Kauderer hat eine bestimmte Form für das Elastizitätsgesetz vorgeschlagen, das beim Aufgeben der physikalischen Linearisierung das Hookesche Gesetz zu ersetzen hat und dieselbe auch zur nichtlinearen Behandlung der Plattenbiegung an-

gewandt. Der vorliegende Aufsatz versucht von jenem Gesetz bei der Behandlung des Membranzustandes einer allgemeinen Umdrehungsschale sowie des Biegezustandes einer vertikalen Kreiszylinderschale Gebrauch zu machen. Dies gelingt im Prinzip bis zum Zusammenhang zwischen der Spannungs- und Verschiebungskomponenten im allgemeinen Fall, zur Herstellung der Grunddifferentialgleichung aber nur als erste nichtlineare Näherung und bis zur Lösung dieser Gleichung nur näherungsweise, mittels der Störungsrechnung. Die Darstellung ist durchsichtig gemacht worden durch Hervorheben von Vergleichspunkten mit der parallelen linearen Theorie.

P. Laasonen.

Tungl, E.: Die Parallelogrammplatte mit Einzellast. Österreich. Ingenieur-Arch. **13**, 121—139 (1959).

L'A. considère une plaque plane en forme de parallélogramme posée sur appuis (sans frottement) sur tout son périmètre, portant en un point quelconque une charge ponctuelle normale au feuillet moyen. En admettant la théorie de la flexion de Kirchhoff, il détermine une solution rigoureuse pour la déformation de cette plaque, en obtenant en même temps la fonction de Green du problème. Il recherche d'abord une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles de la surface élastique (grâce à l'emploi d'axes obliques parallèles aux côtés du parallélogramme et de 2 systèmes d'axes rectangulaires); ensuite l'A. construit une solution de l'équation homogène correspondante, solution qui ajoutée à la solution particulière de l'équation non homogène (la charge ponctuelle est représentée au 2-e membre par une série de Fourier double) satisfait aux conditions aux limites du problème. La solution ainsi obtenue (fonction de Green) est définie par des séries procédant suivant des fonctions des coordonnées obliques x, y du point courant du feuillet moyen. Les coefficients de ces séries sont obtenus par la résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires.

N. Forbat.

Teodorescu (Teodoresku), P. P.: Zum ebenen Problem der Elastizitätstheorie bei beliebigen Volumenkräften. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. **3**, Nr. 1, 101—108 (1958) [Russisch].

Vgl. dies. Zbl. **81**, 397.

Kaliski, Sylwester: On a certain conception of dynamic non-steady solution for an orthotropic elastic and anelastic semi-space. Proc. Vibration Problems Nr. **2**, 43—58 (1959).

The object of the author's paper is to obtain an accurate and effective solution of the problem of an orthotropic elastic and anelastic half-space, at the expense of certain limitations of physical nature. An effective and closed solution of the first and the second boundary value problem, in particular for a concentrated force impulse, which acts inside the half-space, is given. However this solution is obtained only for $t < C$, with C an arbitrary constant. The author reduces the problem of an infinite region to boundary problems. A finite solid — in this case a rectangular parallelepiped — is separated from the infinite body, containing the region of initial disturbances or the point of application of the impulse. The solid contains also the finite region where we want to find the solution, so that no wave reflection should occur from the bounding surface. Then, with any homogeneous boundary conditions, the solution for $t < C$ will coincide in the region of the solid with the basic solution for the infinite space.

P. P. Teodorescu.

Moljukov, I. D. und S. Ju. Karinskij: Über die Formen stabiler Halbgewölbe und Gewölbe. Izvestija Akad. Nauk Kazach. SSR, Ser. Mat. Mech. **7** (11), 95—101 (1959) [Russisch].

Cet ouvrage est basé sur les travaux de M. V. V. Sokolovskij publiés sous le même titre que l'ouvrage en question dans Priklad. Mat. Mech. **20**, 588—598 (1956). Suivant V. V. Sokolovskij le problème est ramené à la recherche du champ vectoriel des contraintes et du contour d'écoulement d'une demi voûte stable ayant

donné une sollicitation continue et uniforme répartie horizontalement. Cette analyse conduit à des diagrammes d'écoulement qui peuvent être appliqués pour déterminer le champ des contraintes dans des voûtes.

Z. Wasinutyński.

Bijlaard, P. P.: Thermal stresses and deflections in rectangular sandwich plates. *J. Aero-Space Sci.* 26, 210—218 (1959).

Verf. ermittelt den thermischen Spannungs- und Deformationszustand in rechteckigen Sandwichplatten unter der Annahme, daß die konstant über die obere Deckfläche der Sandwichplatte verteilte Temperatur eine vorgegebene Differenz gegenüber der unteren Deckfläche besitzt. Fünf Fälle von Randbedingungen werden untersucht: Alle Ränder eingespannt, bzw. frei drehbar gelagert; zwei gegenüberliegende Ränder frei drehbar gelagert, die beiden übrigen Ränder vollkommen frei bzw. eingespannt und schließlich drei Ränder gelagert, ein Rand vollkommen frei. Es wird für die beiden erstgenannten Fälle gezeigt, daß in den Platten keine Querschubkräfte auftreten, so daß die Spannungs- und Deformationszustände den bekannten Lösungen von Timoshenko für die homogene Platte für den entsprechenden Belastungsfall entsprechen. In den übrigen Fällen treten in den Sandwichplatten Querschubkräfte auf, die wegen der endlichen Querschubsteifigkeit der Platten deren Spannungs- und Deformationszustand beeinflussen. Das Ergebnis der Untersuchung wird in Form von Gleichungen für die Biege- und Torsionsmomente und die Querschubkräfte in der Platte angegeben. Für den Fall der an zwei Rändern eingespannten und an den übrigen Rändern frei drehbar gelagerten Sandwichplatte werden die Momente und Spannungen längs der eingespannten Ränder für ein gegebenes Beispiel numerisch ermittelt, in Diagrammform dargestellt und mit den Spannungen für den entsprechenden Fall allseitig eingespannter Ränder verglichen. Die maximalen Spannungen im erstgenannten Fall ergeben sich zu etwa 60% höher als im zweiten Fall.

W. Thielemann.

Ignaczak, Józef: Thermal displacements in an elastic semi-space due to sudden heating of the boundary plane. *Arch. Mech.* stosow. 9, 359—416 (1957).

Die Verschiebungen in einem elastischen dreidimensionalen Halbraum, hervorgerufen durch plötzliche Erwärmung der Grenzebene, werden behandelt. Zuerst wird die dynamische Gleichung des Problems in der Gestalt

$$(1) \quad \mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} - s T_{,i} = \rho u_i$$

aufgestellt. Dabei haben λ, μ, ρ, u_i die sonst übliche Bedeutung, während $T = T(x_s, t)$ (t = Zeit) die Temperaturverteilung bezeichnet und $s = (3\lambda + 2\mu)\epsilon$ ist, wo ϵ den Wärmeausdehnungskoeffizienten darstellt. Um die Lösungen der Gleichung (1) nach Verschiebungen bei gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen zu erhalten, bestimmt Verf. zuerst die Temperaturverteilung aus der Wärmeleitungsgleichung und sucht dann die Lösung in der Gestalt $u_i = u_i + \bar{u}_i$. Dabei befriedigt \bar{u}_i die Gleichung (1) und rührt von einem retardierten Potential $\Phi_{i,s}(x_s, t) = u_i$ her. Verf. bestimmt dieses thermoelastische dynamische Verschiebungspotential, und durch die Überlagerung der Funktion \bar{u}_i gelingt es ihm, die gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen zu befriedigen.

T. P. Angelitch.

Nowacki, Witold: A steady-state three-dimensional thermo-elastic problem. *Rozprawy inż.* 5, Nr. 3, 489—497, russ. und engl. Zusammenfassung 496—497 (1957) [Polnisch].

The object of the work is to calculate the temperature field and the distribution of stress components in an elastic half-space. The assumptions are that in a certain region Γ of the plane, which bounds the half-space, the temperature is known and given (T_0), whereas in the region outside Γ the temperature is equal to zero. The problem, as such one, was treated previously by means of a different method by E. Sternberg and E. L. MacDowell (IX. Internat. Congr. appl. Mech. 1956. Book of Abstracts, Brussels 1957 — cf. also this Zbl. 77, 381). In the present case

the problem is solved by means of the Green's function. The author derives the equations for the temperature field and for the stress components in the case where the temperature is equal to zero over the entire plane $z = 0$, with the exception of an infinitesimal region $d\Gamma$ where $T = T_0$. This enables the author to generalize the problem to the case of a finite region Γ having a certain prescribed temperature distribution $T_0(\xi, \eta)$. The distribution of the stresses is achieved by an additional use of Galerkin's function. Both the Green and the Galerkin functions are determined using the Fourier transform. In the last part of the paper the author applies his method to particular cases of Γ , namely a rectangle and an infinite strip of a finite width.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Nowacki, Witold: A quasi-steady state three-dimensional thermo-elastic problem. *Rozprawy inż.* 5, Nr. 3, 499—508, russ. und engl. Zusammenfassung 508—509 (1957) [Polnisch].

The object of the paper is to determine the distribution of stresses in an elastic half-space due to the influence of a heat-source, having intensity W , which moves with a constant velocity in the plane bounding the half-space. In particular, a heat dipole is considered acting in the plane $z = 0$. The obtained temperature field satisfies the boundary conditions $T = 0$ in the plane $z = 0$ and at infinity. The stress components are calculated by means of the thermo-elastic potential of displacements. But not all the stress components satisfy all the boundary conditions. Some of them do not vanish in the plane $z = 0$. To overcome this difficulty, the author introduces the second kind of stresses, such ones, that they compensate the stresses nonvanishing on the boundary (the sum gives zero on the boundary). Their contribution is superimposed upon the stress-pattern due to the first kind of stresses. The second type of stresses is determined by means of the displacement function of Galerkin. The resultant stresses satisfy all the conditions. As the particular case the author calculates the stress pattern due to a linear heat source uniformly distributed along the z -axis and moving in the x -direction with a constant velocity.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Nowacki, Witold: The state of stress in an elastic space due to a source of heat varying with time in a harmonic manner. *Rozprawy inż.* 5, Nr. 3, 511—521, russ. und engl. Zusammenfassung 521 (1957) [Polnisch].

This is the third paper in the series of papers on the state of stresses in an elastic half-space due to heat effects (see the previous two reviews). In this paper the author calculates the thermo-elastic stresses in an infinite elastic space due to a heat source of a varying intensity. The variation is of a harmonic character and depends upon the time t . Three types of heat sources are considered: a concentrated source, a linear and a plane one. The fundamental equation is the heat equation which furnishes the temperature field. The components of the stress tensor are found by means of the thermo-elastic potential of displacements, related to the temperature field. The system is treated without taking into account the inertia forces. Hence it is considered to be some sort of a quasi-static problem. The paper is illustrated by many diagrams showing the dependence of the shearing stresses upon the frequency of the harmonic oscillations. The author refers to such functions like Bessel, Basset, Kelvin, etc.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Rozenbljum, V. I.: Über die Anpassungsfähigkeit ungleichmäßig erwärmter elastoplastischer Körper. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 7, 136—138 (1957) [Russisch].

L'A. passe en revue les données de la littérature et fait quelques considérations sur le problème de l'adaptabilité des corps élastico-plastiques, soumis à un champs thermique non-uniforme.

P. P. Teodorescu.

Kljušnikov, V. D.: Über die Bedingungen der proportionalen Veränderungen der Deviatoren in der Theorie der kleinen elastoplastischen Deformationen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 6, 138—139 (1957) [Russisch].

Discussion of conditions for proportional change of stress and strain deviators for small elasto-plastic deformations under simple tension. It is demonstrated that a proportional increase of stress does not involve necessarily a proportional increase of strain.

R. Stojanovitch.

Olesiak, Z. and I. N. Sneddon: The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack. *Arch. rat. Mech. Analysis* 4, 238—254 (1960).

In this paper a consideration is given to the calculation of the distribution of thermal stress in the neighbourhood of a penny-shaped crack. It is assumed that the stress is set up by the application of heat to the surfaces of the crack. The thermal conditions on the upper surface of the crack are identical with those on the lower surface. The following cases are considered in detail: a) prescribed flux of heat across the surfaces of a penny shaped crack. The flux function may have one of the forms: 1. a constant, 2. a Fourier Bessel series, 3. a power series. b) prescribed temperature at the surfaces of a penny shaped crack. The solution of the statical classical equations of thermoelasticity is derived by using the Hankel transforms method. The problem is reduced to the solution of dual integral equations, for which the solution is known. Some numerical results are given.

J. Ignaczak.

Das, Sisir Chandra: Comparison of flow lines in various types of rheological bodies. *Canadian J. Phys.* 38, 32—37 (1960).

Verschiedene rheologische Substanzen werden zwischen zwei parallelen Platten ausgepreßt. Die Stromlinien der Substanzen werden berechnet und untereinander verglichen. Insbesondere sind die Stromlinien eines Bingham-Körpers, eines plastischen Körpers und der Newtonschen Flüssigkeit in Bildern aufgezeichnet. Es zeigt sich, daß die Stromlinien in diesen drei Fällen sich sehr ähnlich sind.

F. Schultz-Grunow.

● Prager, William: An introduction to plasticity. Reading, Mass. and London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1959. VIII, 148 p. \$ 6,50.

At the invitation of the council of the Polytechnic Institute in Zürich the author delivered at the end of 1954 a series of lectures on the basic problems of the theory of plasticity. These lectures have afterwards been prepared in the form of a book entitled "Probleme der Plastizitätstheorie" (cf. this *Zbl.* 67, 175). In 1958 the book was translated into French and into Russian. The present edition in English is based on the former editions, some important supplementations having been included in different essential items. In the choice of the material the author was to a certain extent governed by his original contributions to the modern theory of plasticity. The presentation of the material is exact, its possibly clear treatment being aimed at, in a form useful for theoreticians as well as engineers for solving effective technical problems. Chapter 1 introduces the reader to the problem of the "Mechanical Behavior of Plastic Solids" in a very clear manner. Reference to dynamic and kinematic models of perfectly plastic solids proves to be very helpful. The concept of the plastic potential as well as of generalized stresses and generalized strains are introduced. Chapter 2 treats the "Mechanical Behavior of Plastic Structures" under loading and unloading programs; it formulates the extreme theorems and deals with the load-carrying capacity of structures as well as their adaptation to variable repeated loading (known as the "shakedown" problem) being of basic importance for engineering applications. The most important Chapter 3 on "Limit Analysis and Design" presents the two fundamental theorems of limit analysis and considers their applications to frames, plates and shells. Influence of changes in geometry due to plastic effects is taken into account. Finally, it is devoted to the problem of limit design;

the important problem of minimum weight design is also discussed. Chapter 4 treats "Finite Plastic Deformations", especially in connection with plane plastic flow problems. It introduces the reader in the fundamental relations, the hodograph method, the construction of slip line fields, illustrating them by examples taken from the analysis of phenomena during sheet extrusion, wedge indentation, tension of notched specimens, drawing of tubes. The choice of material is skillful and well balanced. Additional improvements on the former editions are reference lists, index of authors and table of contents, also a selection of characteristic problems. The book is clear, concise and excellently written; it should be known by all concerned with problems of plasticity.

W. Olszak.

Ivlev, D. D.: Approximate solution of elastic-plastic problems of the theory ideal plasticity. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 294—296 (1957) [Russisch].

An approximate solution method is given for the plane stress and strain problem of the theory of plasticity in cylindrical coordinates. Solution is obtained by representing the stress in the form of a power series of δ : $\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}$. Also the line separating the elastic region from the plastic region is represented in the form of a power series in the parameter δ . The stresses on this boundary line constitute the boundary conditions for the solution in the elastic region. Four particular problems are solved. These are the problems of two-directional tension ($\sigma_1 \neq \sigma_2$) of a plate with a circular hole in plane stress and strain, and two-dimensional tension of a thin plate with an elliptic hole and the problem of eccentric tube under the action of internal pressure.

W. Szczepiński.

Ivlev, D. D.: Approximate solution of problems of small elastic-plastic deformations. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 527—528 (1957) [Russisch].

This is a generalization of the former method (see the above review) of solving problems of small elastic-plastic strains in polar coordinates to bodies with power-type strain-hardening. The stresses, strains and displacements are represented as power series of a certain parameter. The problem is reduced to the integration of a homogeneous differential equation of the fourth order for a certain function of the radius. General solution of this equation is given. Particular solutions can easily be found solving practical problems. The possibility is indicated of using this method to solve the problem of an eccentric tube loaded by internal and external pressure, and those of an elliptic tube, a thick-plate with circular or elliptic hole subjected to two dimensional tension etc.

W. Szczepiński.

Alexander, J. M. Approximate theory for the thermal and irradiation creep buckling of a uranium fuel rod and its magnesium can. J. mech. Engin. Sci. 1, 211—222 (1959).

Approximate theory embraces both thermal and irradiation creep buckling of reactor fuel elements. Based on the simple elastic buckling theory Young's modulus E is replaced by a rate modulus defined as $\dot{E} = d\sigma/d\dot{\epsilon}$, $\sigma = c \dot{\epsilon}^n$ where both c and n are temperature dependent. The strain due to irradiation of a uranium specimen under stress is expressed as the number of elastic deflections per unit irradiation. The formula for the determination of the buckling time (the time to achieve any bow of the fuel element) is given. Application of the theory to a typical highly rated channel and comparison the theory with one experimental result is included.

J. Ignaczak.

Gerard, George: Plastic stability theory of thin shells. J. aeronaut. Sci. 24, 269—274 (1957).

Defining σ_i and ϵ_i and assuming the coincidence of the axes of principal stresses with those of strains the secant modulus is determined by $E_s = \sigma_i/\epsilon_i$. Plastic isotropy and incompressibility is assumed ($\nu = \frac{1}{2}$) for both elastic and plastic range. The system of differential equations of equilibrium is determined for plastic buckling of thin

shells with constant radii non equal to each other. It is assumed that during the buckling process the external load increases slowly. A system of 3 equations for plates and cylindrical and spherical shells subjected to any buckling load is obtained. In some particular cases such as the buckling of a spherical shell under the action of external pressure or the buckling of a cylinder subjected to axial compression or torsion, the equations derived may be reduced to one partial differential equation of order eight of the Donnell type:

$$V^4 [DA_1 V^4 W + \sigma t V^4 W + (E_t t / A_1 R^2) W] = 0,$$

where D = bending rigidity, t = thickness, A_1 = plasticity coefficient. Linear displacements are assumed. The problem of a spherical shell under the action of external pressure, a cylinder of moderate and great length subjected to axial compression and the cylinder subjected to torsion are solved by means of the Donnell equation.

J. Lamparski.

Landau, H. G., J. H. Weiner and E. E. Zwicky jr.: Thermal stress in a viscoelastic plate with temperature-dependent yield stress. *J. appl. Mech.* **27**, 297—302 (1960).

Onedimensional transient problem of thermal stress in a viscoelastic-plastic, free plate is discussed. The following assumptions are made: The material is perfectly plastic obeying a von Mises temperature dependent yield condition. The viscous effects are expressed by a Maxwell type relation. A viscosity coefficient is a function of temperature. The other mechanical and thermal properties of the material are assumed to be temperature independent. The temperature distribution in the plate satisfies classical onedimensional heat conduction equation. Based on these assumptions, the stress strain relations are reduced to a single equation for the stress distribution. A numerical procedure for integration of this equation is developed and examples of the both calculated residual stress distribution and types of plastic regions are given.

J. Ignaczak.

Storchi, Edoardo: Sulla risoluzione del problema plastico ristretto degli sforzi piani. *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend., Sci. mat. fis. chim. geol., Ser. A* **92**, 321—348 (1959).

Se référant à une de ses recherches précédentes, parue dans la même revue, dans laquelle il a ramené le problème plastique des forces planes à celui d'une membrane d'épaisseur constante, l'A. reprend les équations linéaires du problème plastique dans le cas des forces planes et les examine dans l'éventualité où elles sont hyperboliques dans tout le domaine plastique. Le problème se réduit ainsi à la résolution du système d'équations aux dérivées partielles

$$\partial^2 A / \partial \alpha \partial \beta + (g^2 + g') A = 0, \quad \partial^2 B / \partial \alpha \partial \beta + (g^2 - g') B = 0,$$

où $g = g(\alpha - \beta)$ est une fonction connue caractérisant la condition de plasticité adoptée. En supposant connues les forces extérieures sur le contour, les fonctions A et B et leurs dérivées partielles seront connues sur ce contour et le problème de l'intégration se réduit à un problème de Cauchy qu'on peut résoudre par la méthode de Riemann. L'A. examine les cas particuliers $g = 0$, dans lequel il détermine l'intégrale générale du système ci-dessus, et $g = k$ (et plus particulièrement $k = \pm 1$), où les équations ci-dessus se ramènent à des équations des télégraphistes. Comme pour ces équations la fonction de Green est connue, la méthode de Riemann donne la solution du problème restreint de la plasticité.

N. Forbat.

Tordion, G. V.: Creep of an elastic belt on a pulley. *J. appl. Mech.* **26**, 451—452 (1959).

Allgemeine Beziehungen für Ringspannungen eines elastischen Riemens auf einer Seilscheibe, Kriechgeschwindigkeit sowie Kriechverluste werden mit Hilfe der Theorie ideal kompressibler Medien angegeben. Unter Benutzung von Kontinuitäts-gleichung, Bewegungsgleichung und Gleichgewichtsbedingung erhält man eine nichtlineare Differentialgleichung, die durch Linearisierung gelöst wird. *H. Göldner.*

Moiseev, N. N.: On the theory of elastic oscillations of a fluid-filled body. Soviet Phys., Doklady 4, 806—809 (1960), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR 127, 51—54 (1959).

One treats the problem of the oscillations of an elastic body, in the interior of which is a cavity either partially or completely filled with a fluid, investigating the simplest formulation of this problem, namely, wherein the elastic body may be idealized as a beam which has a straight-line of rigidity and for which the hypothesis of plane cross sections remaining plane holds. Two coordinate systems are used, one ($Oxyz$) associated with the axis of rigidity (Oz -axis) and another with the free surface of an ideal ponderable incompressible fluid. One investigates the infinitesimal torsional and flexural vibrations of the plane yOz in the beam, assuming that the motion of the fluid, which is excited by the beam oscillations, can be represented by a potential and that the amplitudes and velocities of the fluid waves are also infinitesimal. Two operators are used. They are expressed as area integrals on the wetted surface of the cavity and on the free surface in the rest states. The integrand is the Green's function of the Neumann problem for the region bounded by the sum of the above mentioned surfaces. By the use of Hamilton's principle the governed differential equations may be reduced to the system with three integro-differential equations. On the contrary to the known N. E. Zukovskij's analogy it is shown that this problem is not analogous to the dynamical one with the body whose mass is equal to the sum of the masses of body and fluid and whose inertia tensor is completely determined; hence, the hypothesis of plane cross sections remaining plane cannot be applied to describe the motion of the fluid. By means of new operators the system of integro-differential equations reduces to one differential equation of the second order, homogeneous with coefficients which are the operators. One operator is self-adjoint, but it is assumed that the second operator is positive-definite. Further, it is shown the condition for completely continuity of the operators. The Ritz method can be used to calculate eigenfunctions and natural frequencies.

D. Rašković.

Sacharov, I. E.: Erzwungene Schwingungen einer Scheibe auf einer doppelt starren Horizontalwelle, die in anisotropen elastisch-massigen Stützlager rotiert. Izvestija Akad. Nauk SSSR. Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 3, 53—58 (1959) [Russisch].

Man untersucht einen gewichtslosen prismatischen Stab von einem Querschnitt, dessen Hauptträgheitsmomente nicht gleich sind. In der Mitte des Stabes befindet sich eine starre Kreisscheibe, die im weiteren Text als Punktmappe behandelt wird. Der Stab ist an seinen Enden auf Fundamenten von gleichartigen Massen gelagert, die mit der starren Unterlage elastisch verbunden sind. Die „Anisotropie“ der Stützlager besteht darin, daß die Nachgiebigkeit der das Fundament mit der Unterlage verbindenden Federn in zwei senkrecht aufeinander stehenden Richtungen verschieden ist. Der waagrecht gelagerte Stab rotiert um seine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω . Verf. sucht nach solchen kritischen Geschwindigkeiten, bei denen die Erscheinung einer mechanischen Resonanz erkennbar ist. Die Aufgabe besteht in der Lösung eines Systems von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Funktionskoeffizienten. Unter Anwendung der Methode eines kleinen Parameters wurden Näherungswerte ω gefunden, und eine Diskussion der erhaltenen Resultate wurde durchgeführt.

Z. Kączkowski.

Spinner, Sam and Rudolph C. Valore jr.: Comparison of theoretical and empirical relations between the shear modulus and torsional resonance frequencies for bars of rectangular cross section. J. Res. nat. Bur. Standards 60, 459—464 (1958).

Experimentell wurde die Beziehung zwischen Schubmodul und Grundresonanzfrequenz der Torsion für Stäbe mit Rechteckquerschnitt bestimmt. Abweichungen gegenüber der von Pickett [Amer. Soc. Testing Materials, Proc. 45, 846 (1945)] angegebenen theoretischen Näherung liegen zwischen 1 und 2%. *J. Pretsch.*

Ben-Amoz, M.: Note on deflections and flexural vibrations of clamped sectorial plates. *J. appl. Mech.* **26**, 136 (1959).

The theorem of minimum potential energy is applied to obtain an approximate and useful expression in polar coordinates for the deflection of a clamped and uniformly loaded plate having the shape of a circular sector. For the particular case of a semicircular plate the numerical values of the maximum deflection and the maximum bending moment are computed and compared with their exact values obtained by Woinowsky-Krieger. It is noteworthy that problems dealing with the bending of transversely loaded and clamped sectorial plates have been treated through the use of integral equations by Ja. S. Ufljand (this Zbl. **45**, 124) and also by T. Sekiya and A. Saito [*Proc. Japan. nat. Congr. appl. Mech.* **4**, 195 (1954)]. Other references are given at the ends of these papers. W. A. Bassali.

Boleanţu, Lazăr: Au sujet de la pulsation critique des arbres à oscillations transversales. *Bul. şti. tehn. Inst. politehn. Timişoara*, n. Ser. **1** (**15**), Nr. 1, 155—162, français. und russ. Zusammenfassung 163 (1956) [Rumänisch].

L'A. tient compte, dans le calcul des pulsations propres d'un arbre, de l'influence des forces axiales, des forces d'inertie, appliquées au centres de gravité des rotors ainsi que des couples d'inertie, dus aux rotors, inclinés par la déformation de l'axe rectiligne de l'arbre. On néglige l'influence des couples de torsion et de l'amortissement des vibrations. La contribution originale de l'A. est d'avoir introduit dans le calcul des pulsations propres, l'influence des couples d'inertie que l'A. appelle „moments gyroscopiques“ et dont l'expression est $M = (A - B) \omega^2 \varphi$, A et B étant les moments centraux principaux d'inertie d'un rotor, ω sa vitesse angulaire supposée constante et φ l'angle d'inclinaison du rotor, supposé très petit. Un exemple de calcul accompagne l'exposé théorique. R. Voinea.

Lewis, F. M.: A modification of Rayleigh's principle for calculating beam frequencies. *J. appl. Mech.* **26**, 452—454 (1959).

Eine Abwandlung des Rayleighschen Prinzips wird zur Bestimmung der Grundschwingungen eines beiderseits gelagerten, frei-freien und einseitig eingespannten Balkens angegeben. Die Formel

$$f = \frac{1}{2} \pi^{-1} \sqrt{g \int w y dx / \int w y^2 dx},$$

die für ungleichmäßige Belastung und Steifigkeit schwer zu behandeln ist, wird durch „vernünftige“ Annahmen bei Berechnung der Energie vereinfacht. Querkraftschub und Rotationsträgheit bleiben unberücksichtigt. H. Göldner.

Makai, E.: Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam. *Acta Sci. math.* **20**, 33—35 (1959).

Seien D ein einfach zusammenhängendes Gebiet vom Flächeninhalt A , C seine Randkurve mit totaler Länge L , $\lambda_1 = \sqrt{\lambda_1}$ seine erste Eigenfrequenz und P seine Torsionssteifigkeit. Obere Schranken für λ_1 erhält man aus dem Rayleighschen Prinzip $\lambda_1^2 \leq R[v]$ (Rayleighscher Quotient), ebenso untere Schranken für P aus dem Dirichletschen Prinzip $P \geq P[v]$ (cf. Pólya-Szegő: *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton 1951; dies. Zbl. **44**, 383); wobei v stetig und stückweise stetig differenzierbar ist und am Rande C verschwinden muß. — Verf. wählt als Probierfunktion $v(P)$ den (euklidischen) Abstand $d(P)$ zwischen P und der Randkurve C . Die Niveaulinien von v sind dann die inneren Parallelkurven zu C . — Es ergibt sich $\lambda_1 \leq \sqrt{3} L/A$ und $P \geq A^3/L^2$. — Inzwischen hat G. Pólya die Methode des Verf. durch Verwendung von Probierfunktionen $v(P) = f[d(P)]$ mit bestmöglicher Funktion $f(d)$ verfeinert und so die exakten Schranken $\lambda_1 \leq (\frac{1}{2} \pi) L/A$ und $P \geq (4/3) A^3/L^2$ erhalten (asymptotische Gleichheit bei unendlich langem Rechteck): Die Arbeit soll in *J. Indian math. Soc.* erscheinen. — Für weitere Verschärfung und Verallgemeinerung vgl. L. E. Payne und H. F. Weinberger

(vorläufig nur in Form einer „Technical Note“). — Verf. konnte die Beschränkung auf konvexe Gebiete (vgl. dies. Zbl. 84, 207) aufheben dank eines Ergebnisses von B. Sz.-Nagy über die Länge der Parallelkurven [Acta Sci. math. 20, 36—47 (1959)]. — Für ein Ringgebiet gelten die obigen Abschätzungen auch, doch wird diejenige für P sehr unscharf; eine befriedigende Betrachtung dieses Falles mit der Methode der inneren Parallelkurven scheint noch zu fehlen. *J. Hersch.*

Sacharov, I. E.: Die Frequenzen der Eigenschwingungen von Ringplatten. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 5, 107—110 (1957) [Russisch].

L'A. étudie les vibrations propres (harmoniques) d'une plaque plane annulaire, en exprimant les flexions de la plaque à l'aide des fonctions de Bessel de la première et de la seconde espèce. On trouve les équations des premières trois harmoniques et on donne leurs solutions sous forme de diagrammes. On considère le contour intérieur de l'anneau libre et le contour extérieur simplement appuyé ou encastré.

P. P. Teodorescu.

Smith, Jack C., Frank L. McCrackin and Herbert F. Schiefer: Stress-strain relationships in yarns subjected to rapid impact loading: 5. Wave propagation in long textile yarns impacted transversely. J. Res. nat. Bur. Standards 60, 517—534 (1958).

[Teil 4 s. Verff. und Walter K. Stone, Kathryn M. Town, *ibid.* 57, 83—90 (1957)]. — In Fortsetzung früherer Arbeiten, in denen das Verhalten von Garnen, die in Abständen von 40—60 cm eingeklemmt und Querstößen ausgesetzt waren, dargestellt wurde, wird die Theorie der Fortpflanzung von Transversalwellen in Garnen von unendlicher Länge ohne Klampen, also ohne Reflexion, entwickelt. Dabei werden Vorstellungen von v. Kármán über die elastische und plastische Wellenfront beim Längsstoß für eine konkave Dehnungs-Spannungskurve verwendet. Wenn die Stoßgeschwindigkeit sehr groß ist, pflanzt sich die transversale Wellenfront in einigen Fällen schneller als die plastische Wellenfront fort. Man braucht dann eine Lösung für eine im transversalen Wellenbereich veränderliche Spannung. Die konkave Dehnungs-Spannungskurve wird zunächst durch eine endliche Zahl geradliniger Segmente angenähert, dann wird der Grenzübergang auf eine stetig gekrümmte Kurve durchgeführt. Als Beispiel wird das Verhalten eines Fadens nach Transversalstoß für einen dem Hookeschen Gesetz gehorchenden Stoff (Dehnungs-Spannungskurve geradlinig) und einen hypothetischen Stoff (Dehnungs-Spannungskurve in Form des hyperbolischen Tangens) behandelt, und zwar Spannungsverteilung längs des Fadens, horizontale Komponente der Fließgeschwindigkeit in verschiedenen Punkten längs des Fadens, Winkel zwischen Transversalwellen und der Horizontalen und Lage der plastischen Wellenfront. *J. Pretsch.*

Bufler, H.: Zur Theorie der rollenden Reibung. Ingenieur-Arch. 27, 137—152 (1959).

Verf. gibt zunächst in seiner Übersicht die Probleme an, die bei der Untersuchung der Vorgänge der rollenden Reibung zu beachten sind. Er knüpft an L. Föppl an (dies. Zbl. 32, 86) und weist dann auf die Arbeiten hin, die strenge oder angenäherte Lösungen im Falle verschiedener elastischer Konstanten der beiden sich berührenden oder aufeinander abrollenden Walzen enthalten. Es wird sodann eine Einteilung in drei Hauptfälle vorgenommen und genauer 1. der Fall zweier Walzen untersucht, die durch eine Kraft P zusammengedrückt werden. Bei verschiedenen elastischen Konstanten tritt eine die Druckverteilung beeinflussende Schubspannung auf. Unterschieden wird dabei noch der reine Haftfall und der gemischte Fall, bei dem das Berührungsgebiet der Walzen in eine Haft- und in zwei Gleitzonen aufgeteilt wird. Der reine Haftfall, bereits früher von K. Desoyer (dies. Zbl. 78, 395) bzw. G. Heinrich (dies. Zbl. 40, 402) behandelt, wird in einigen Fehlern berichtigt. 2. Es wird weiter der Fall zweier Walzen untersucht, die unter der Wirkung einer Druckkraft P und einer Schubkraft Q , ohne Rollen der Walzen, stehen. Bei gleichen elastischen Kon-

stanten tritt die Hertzsche Druckverteilung auf; der reine Haftfall bei unendlich großem Reibungskoeffizienten liefert die Schubspannungsverteilung $q(x) = Q\pi^{-1}a\sqrt{1-x^2}$. Verf. entwickelt unter den üblichen Voraussetzungen die exakten Gleichungen für die Berühr- und Haftbedingung zweier Walzen im Falle des ebenen Formänderungs- und des ebenen Spannungszustandes bei verschiedenen Elastizitätskonstanten. Es werden dann die beiden Grenzfälle des vollkommenen Gleitens und des vollkommenen Haftens untersucht. Für den Gleitfall erfolgt die Lösung der singulären Integralgleichung der Druckverteilung $p(x)$ nach K. Desoyer. Eine graphische Darstellung mit Diskussion der Druckspannung und der tangentialen Randspannung schließt sich an, wobei besonders die Extremfälle — eine der Walzen starr, beide Walzen gleiches Elastizitätsmaß — behandelt werden. Durch Einführung einer komplexen Funktion F mit p (Druckspannung) und q (Schubspannung) als Real- und Imaginärteil gelingt die Lösung der gekoppelten Integralgleichungen für den Haftfall. Die zwei gekoppelten Integralgleichungen gehen in eine Integralgleichung 2. Art über, deren geschlossene Lösungsform nach H. Söhngen (dies. Zbl. 55, 95), nun für den Fall des vollkommenen Haftens unter Voraussetzung konstanten Schlupfes diskutiert wird. Es zeigt sich, daß die Randbedingungen nur erfüllbar sind, wenn Querkräfte nicht auftreten. Schließlich wird auch in diesem Fall eine graphische Darstellung und Diskussion der Druck-, Schub- und tangentialen Randspannungen vorgenommen. Mit der Erkenntnis, daß im reinen Gleitfall eine Verlagerung des Druckmaximums gegenüber der Hertzschen Verteilung und im reinen Haftfall die Walzenpressung eine Erhöhung des Druckmaximums infolge Reibung erfährt, wurde ein wesentlicher neuer Beitrag zur Theorie der rollenden Reibung geliefert.

H. Göcke.

Hydrodynamik:

● Milne-Thomson, L. M.: *Theoretical hydrodynamics*. 4th. ed. London: Macmillan & Co. Ltd.; New York: St. Martin's Press 1960. XXI, 660 p. 65 s. net.

Das in 4. Auflage vorliegende Buch ist aus Vorlesungen des Verf. am Royal Naval College in Greenwich entstanden. Es gibt eine methodisch aufgebaute, sehr klare Einführung in die mathematische Theorie der reibungsfreien Flüssigkeitsbewegungen. Soweit die mathematischen Hilfsmittel über die elementare Infinitesimal-Rechnung hinausgehen, werden sie im Buch selbst abgeleitet. Da durchweg die vektorielle Schreibweise der Gleichungen angewandt wird, ist ein einleitender Abschnitt den Grundlagen der Vektorrechnung gewidmet. Ebenso werden auch die Grundlagen der Funktionentheorie und der konformen Abbildung dargestellt und auf die Methode der Singularitäten (Quellen, Senken und Dipole) und auf die Joukowski'sche Abbildung angewandt. Weitere Abschnitte sind der Potentialbewegung zylindrischer Körper und solchen Strömungsproblemen gewidmet, die mit Hilfe der Schwarz-Christoffelschen Transformation behandelt werden können, also Strömungen längs geknickter Wände oder Strömungen in verzweigten Leitungen, wobei allerdings die Anwendung der Potentialtheorie schon recht problematisch ist. Hierzu gehört auch das Problem der Flüssigkeitsstrahlen und der Helmholtz'schen freien Stromlinien, das mit gleichartigen Rechenverfahren behandelt werden kann. Weitere Gruppen von ebenen Potentialströmungen ergeben sich durch Hinzufügen von Wirbeln, Doppelwirbeln, Wirbelquellen und Wirbelsenken. Zur Lösung achsensymmetrischer Strömungsprobleme erweist sich die Einführung der Stokesschen Stromfunktion als sehr fruchtbar, während zur Behandlung der Strömung um ein allgemeines Ellipsoid entsprechende Koordinaten eingeführt werden. Ein weiterer Abschnitt ist den Wellenbewegungen gewidmet, und zwar sowohl den Oberflächenwellen als auch den Schwerewellen, sowie Wellen an der Grenzfläche geschichteter Flüssigkeiten. In den beiden Schlußkapiteln wird der Einfluß der Zähigkeit und Zusammendrückbarkeit

kurz behandelt, wobei die Grenzschichttheorie auf 3 Seiten kurz gestreift wird. Gegenüber der dritten Auflage (London 1955) ist das Buch durch einige Zusätze erweitert worden, wie z. B. die Formel von Plemelj zur Lösung gewisser Randwertaufgaben, Strömungen mit freier Oberfläche unter dem Einfluß der Schwerkraft und die exakte Behandlung der Oberflächenwellen konstanter Form. Durch seine anschauliche und durch zahlreiche Abbildungen unterstützte Darstellungsweise ist das Buch zur Einführung in die Theorie der reibungsfreien Strömungen sehr geeignet.

W. Wuest.

● **Blenk, Hermann** (Herausgeber): **Jahrbuch 1957 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. V.** Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1958. VII, 504 S. Lein. DM 58.—.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Gersten, Klaus: Über die Berechnung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes von Tragflügeln. **Jahrbuch 1957 Wiss. Ges. Luftfahrt**, 172—190 (1958).

Es wird ein Verfahren angegeben, das gestattet, das gesamte räumliche Feld der induzierten Geschwindigkeiten sowohl für tragende Linien als auch für tragende Flächen zu berechnen, wobei vorausgesetzt ist, daß die Zirkulationsverteilung schon ermittelt worden ist. Angenommen wird, daß die Wirbelschicht, die sich von der Flügelhinterkante löst, sich nicht aufrollt (kleine Anstellwinkel und nicht allzu große Entfernung vom Tragflügel). Sowohl für den Fall der tragenden Fläche als auch für den der tragenden Linie werden einfache Summenformeln für die Abwind- und Seitenwindintegrale gegeben. Formeln für den Abwind in großem Abstand vom Flügel sowie für Punkte in der Nähe der Wirbelschicht werden entwickelt. Gemäß der Prandtl'schen Regel kann man den Einfluß der Kompressibilität verwerten. Berechnungsbeispiele sowie Tabellen von universellen Koeffizienten werden gegeben.

A. van Heemert.

Hafer, Xaver: Untersuchungen zur Aerodynamik der Flügel-Rumpf-Anordnungen. **Jahrbuch 1957 Wiss. Ges. Luftfahrt**, 191—207 (1958).

Unter Verwendung der neueren Verfahren zur Berechnung der Grenzschicht und nach Einführen einer geeigneten Definition für die wirksame Rumpfbreite ist es möglich, den Auftrieb von angestellten Rotationsrümpfen zu berechnen und das Rumpfmoment genauer zu ermitteln, als es bei potentialtheoretischer Betrachtung möglich ist. Die für den „Rumpf allein“ abgeleiteten Beziehungen werden sinngemäß auf die Flügel-Rumpf-Anordnungen übertragen, wobei der Einfluß des Flügelströmungsfeldes in bekannter Weise erfaßt wird. Es wird gezeigt, daß der Einbruch des Flügelauftriebs im Rumpfbereich bereits bei der Ermittlung des vom Rumpfbug erzeugten freien Moments berücksichtigt wird und daß ferner die durch die Rumpfumströmung am Flügel induzierten Zusatzgeschwindigkeiten keine Neutralpunktverschiebung verursachen. Bei gefeiltten Flügeln wird der Flügel im Rumpfbereich als ungefeilt betrachtet. Der so geänderte Flügelumriß beeinflusst das Strömungsfeld des Flügels und verursacht ferner eine zusätzliche Neutralpunktverschiebung. Sehr gute Übereinstimmung mit Messungen wurde festgestellt. Die Untersuchungen werden auf kompressible Strömungen erweitert. Während die für den „Rumpf allein“ abgeleiteten Ergebnisse unverändert auch in kompressibler Strömung gelten, ergibt sich für die Flügel-Rumpf-Anordnungen eine Verminderung der Neutralpunktverschiebung mit zunehmender Machzahl.

A. van Heemert.

Sauer, Robert: Überschallströmung um Rumpf-Flügel-Anordnungen. **Jahrbuch 1957 Wiss. Ges. Luftfahrt**, 230—231 (1958).

In einer Notiz wird die Möglichkeit skizziert, die Überschallströmung um Drehkörper mit Quell-Senken- und Dipolverteilungen durch Hinzunahme von höheren Multipolen auf Körper mit deformierten Kreisquerschnitten zu behandeln. Als Lösung der linearisierten gasdynamischen Gleichung werden Tschebyscheffsche Polynome verwendet. Flügel-Rumpf-Anordnungen mit Unterschall- und mit Überschallvorderkante des Flügels werden als Verbeulung des Rumpfes dargestellt, wenn eine

Trennung der Querschnitte in Rumpf und Flügel nicht mehr scharf definiert werden kann. Der Bericht ist ein Überblick über einige Untersuchungen des Math. Institutes der TH München, die Berechnung der Strömung soll numerisch durchgeführt werden.

F. Keune.

Zierep, Jürgen: Auftrieb und Widerstand langer Ringflügel in Überschallströmung. Jahrbuch 1957 Wiss. Ges. Luftfahrt, 83—88 (1958).

Die Anwendung der linearen Charakteristikenverfahren auf die Berechnung von Auftrieb und Widerstand längerer Ringflügel stößt auf die bekannte Schwierigkeit, daß für $r \rightarrow 0$, d. h. auf der Achse des Ringflügels, u im symmetrischen, v im schiefssymmetrischen — hauptsächlich behandelten — Fall singular werden. Die Achse wird infolgedessen durch einen ausreichend großen „Nachlauf“-Zylinder vom Radius ϱ ausgeschlossen. ϱ wird in Abhängigkeit von Machzahl und Anstellung so gewählt, daß die Störgeschwindigkeiten für $\varrho \leq r \leq R$ noch im Rahmen der Linearisierung bleiben. Die Lösung erfolgt nach dem Charakteristikenverfahren mittels Differenzenrechnung. Eine Limes-Betrachtung zeigt durch Beweis der Stetigkeit des Auftriebs in Abhängigkeit von ϱ , daß die Resultate für $\varrho \rightarrow 0$ gegen die Lösung des wirklichen Problems gehen. Die Ergebnisse eines Rechenbeispiels werden diskutiert und mit denen des ebenen Problems (Flügelpaar) verglichen. Die Beziehung zum Problem des Rings mit Zentralkörper wird erwähnt.

E. A. Eichelbrenner.

Evans, William T.: On a simple relation of airfoil theory. J. Aero-Space Sci. 26, 456—457 (1959).

By a simple transformation an analogy between exact two-dimensional airfoil-theory and thin airfoiltheory is demonstrated.

A. van Heemert.

Isay, W.-H.: Zur Theorie der nahe der Wasseroberfläche fahrenden Tragflächen. Ingenieur-Arch. 27, 295—313 (1960).

Für die Darstellung eines Tragflügels durch flächenhafte Wirbelbelegungen wird eine Integralgleichung aufgestellt, welche die Änderung der lokalen Anströmung durch die induzierten Oberflächenwellen berücksichtigt. Für nicht zu kleine Froudesche Zahlen bezüglich der Eintauchtiefe liefert die Approximation des stetigen Kernanteils durch ein trigonometrisches Polynom ein Gleichungssystem für die Fourierkoeffizienten der Belegung. Die Methode wird ausgedehnt auf den Fall zweier Tragflügel hintereinander. Für Flügelkräfte und für die Gestalt der verformten Wasseroberfläche werden Ausdrücke gegeben, die in zwölf Beispielen numerisch ausgewertet werden. Als wesentliche Wirkung der freien Oberfläche erscheint eine Reduktion der Flügelzirkulation gegenüber unbegrenzter Strömung.

K. Eggers.

Ivanova, L. S.: Impact of a liquid on the inclined wall of an infinite, partly closed container. PMM J. appl. Math. Mech. 22, 344—348 (1958), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 22, 254—256 (1958).

Verf. untersucht den Druck auf die Wände eines mit Flüssigkeit gefüllten Behälters, der plötzlich in Bewegung gesetzt wird. Dabei wurden die folgenden Voraussetzungen gemacht: 1. Es werden nur ebene Strömungen untersucht, der Behälter ist also zylindrisch, so daß nur ein Querschnitt betrachtet zu werden braucht. 2. Dieser Querschnitt ist ein halbindefinlicher Streifen, begrenzt von zwei parallelen Geraden im Abstand h (ebener Boden und Deckel des Behälters), die im Endlichen durch eine nicht notwendig senkrechte Gerade verbunden sind (also eine ebene und im allgemeinen schräge-Seitenwand). Es wird zugelassen, daß der Deckel des Behälters zum Teil oder ganz durch eine freie Oberfläche ersetzt wird. Gesucht ist die Strömung, die sich im ersten Augenblick einstellt, wenn der Behälter ruckartig aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit v_0 beschleunigt wird, wobei v_0 in Richtung der Bodenebene des Behälters liegen soll. Es handelt sich also um ein gemischtes Randwertproblem, nämlich verschwindende Normalgeschwindigkeiten an Boden und Deckel, konstanter Druck an der freien Oberfläche und vorgegebene Normalgeschwin-

digkeit an der Seitenwand. Die Lösung gelingt durch eine Schwarz-Christoffelsche konforme Abbildung des Strömungsgebietes auf die obere Halbebene und Bestimmung des komplexen Strömungspotentials aus den bekannten Werten am Rande. Die besonders interessierende Druckverteilung an der Seitenwand wird für einige Fälle explizit berechnet.

G. Jungclauss.

Bijbosunov (Biibosunov), I.: An example of plane-parallel transonic flow with a curved density step terminating within the flow and having a stream function of the form $\psi_{2/3} = p^{2/3} f_{2/3}(\theta/p)$. Soviet Phys., Doklady 4, 532—536 (1959), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR 126, 951—954 (1959).

F. I. Frankl' konstruierte das Beispiel einer schallnahen Strömung, in der ein gerader Verdichtungsstoß die Geschwindigkeit aus dem Überschall- ins Unterschallgebiet überführt. In der vorliegenden Arbeit wird das Beispiel verallgemeinert. Betrachtet wird ein krummliniger Verdichtungsstoß, wobei die Stromfunktion $\psi_{2/3}$ durch $\psi_{2/3} = \rho^{2/3} f_{2/3}(\theta/\rho)$; $\rho = \sqrt{\theta^2 + \frac{4}{9}\eta^2}$ gegeben ist. θ ist der Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor mit der X -Achse bildet und η ist eine durch Frankl' eingeführte Funktion, welche nur vom Geschwindigkeitsmodul abhängt.

F. Labisch.

Želudev, P. I.: Überschallumströmung dünner Rotationskörper mit und ohne Flügel. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1958, Nr. 9, 74—82 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet mit zwei, drei oder vier Flügeln versehene schlanke, mit Überschallgeschwindigkeit umflossene Körper. Die Körper können so um ihre Achse gedreht sein, daß die Flügel zur Ebene, in der der von Null verschiedene Anstellwinkel gemessen wird, nicht symmetrisch zu liegen brauchen. Mit Hilfe entsprechender Abbildungen werden in jedem der drei Fälle die Geschwindigkeitspotentiale gefunden, aus denen dann durch Reihenentwicklung die Beiwerte C_x , C_y und C_z berechnet werden. Für Körper ohne Flügel wird das Geschwindigkeitspotential in einer zweiten Annäherung gefunden. Als Anwendungsbeispiel wird die Überschallströmung an einem Kegel mit Anstellwinkel untersucht.

F. Labisch.

Gonor, A. L.: Location of frontal wave in asymmetrical flow of gas at high supersonic speed over a pointed body. ARS J. 30, 841—842 (1960), Übersetzung aus Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 5, 117—118 (1959).

Verf. betrachtet eine Formel aus einer seiner früheren Arbeiten [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1958, Nr. 7, 102—105 (1958)] für die Lage der Kopfwelle bei Umströmungen von Kegeln mit Anstellwinkel. Ergebnisse der Berechnungen werden für $M = 4$ und $M = \infty$ in zwei Diagrammen, in denen die Lage der Kopfwelle auf der Wind- und auf der Schattenseite zu sehen sind, wiedergegeben. Verf. vergleicht die erhaltenen Ergebnisse mit Ergebnissen durchgeführter Experimente und zieht Schlüsse über das Verhalten der Kopfwelle bei verschiedenen Kegelwinkeln.

F. Labisch.

Gravalos, F. G., I. H. Edelfelt and H. W. Emmons: The supersonic flow about a blunt body of revolution for gases at chemical equilibrium. IXth internat. astronaut. Congr. Amsterdam 1958, Proc. 1, 312—332 (1959).

Zur Berechnung der Strömung werden in der Staupunktumgebung die Relaxationsmethode, in der reinen Überschallströmung die Charakteristikenmethode und im schallnahen Übergangsgebiet eine neue Methode der Konstruktion der Orthogonaltrajektorien der Stromlinien angewandt. Dabei wird vom Körper ausgegangen und die Stoßlage aus der Kontinuitätsbedingung ermittelt. Dieses Verfahren schien gut zu konvergieren. Ausgegangen wird von gegebener Körperform und angenommener Stoßlage. Beispiele werden für ideale Gase konstanter spezifischer Wärme und reale Gase im thermischen Gleichgewicht bei Machzahlen 5 und 22 wiedergegeben. Entsprechend der höheren Dichte liegt der Stoß bei Dissoziation näher am Körper.

Der Einfluß der realen Gaseffekte auf die Druckverteilung am Körper ist dagegen, wie von früher her bekannt, äußerst gering. *K. Oswatitsch.*

Hermann, Rudolf: Problems of hypersonic flight at the re-entry of satellite vehicles. IXth internat. astronaut. Congr. Amsterdam 1958, Proc. 2, 764—784 (1959).

Im 1. Teil dieser Arbeit werden die Grenzen zwischen dem Bereich der Kontinuumstheorie, der Gleitströmung und der freien Molekularströmung bei Umströmung eines schlanken Körpers in der Machzahl-Reynoldszahl-Ebene neu bestimmt. Hierbei wird ein realistischerer Ausdruck für die Grenzschichtdicke bei hohen Machzahlen als bei einer früheren Abschätzung durch Tsien benutzt; außerdem wird der Einfluß der Randbedingung für die Wandtemperatur auf die freie Weglänge berücksichtigt. Hierdurch verschieben sich die Grenzen der erwähnten Strömungsbereiche zu sehr viel niedrigeren Reynoldszahlen als bei Tsien. In ähnlicher Weise werden sodann in der Ma-Re-Ebene verschiedene Bereiche der Strömung in Umgebung des vorderen Staupunktes eines stumpfen Körpers abgegrenzt. Diese Grenzen sind bestimmt durch das Verschwinden der reibungslosen Strömung zwischen Stoß und Körper. Verschwinden einer scharf definierten Stoßlage, Ungültigwerden der Kontinuumstheorie hinter dem Stoß und der Gleitströmung an der Körperoberfläche. — Im 2. Teil werden in die Ma-Re-Ebene typische Wiedereintrittsbahnen von Satelliten eingetragen, wobei zwischen schlanken Satelliten mit aerodynamischen Gleitflugbahnen und kugelförmigen Satelliten mit ballistischen Widerstandsbahnen unterschieden wird. In jedem Fall liegen diese Bahnen im Bereich der Kontinuumstheorie, wenn man nur Flughöhen unter 100 km betrachtet. — Im 3. Teil werden schließlich einige Experimente im Hyperschall-Windkanal erörtert, insbesondere werden Ergebnisse über die Stoßform und den Abstand zwischen Stoß und Oberfläche eines stumpfen Körpers mitgeteilt. *E. Becker.*

Dumitrescu, Lucian: On heat-transfer in free-molecule flows. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 4, 237—247 (1959).

Verf. behandelt die Strömung hochverdünnter Gase um Körper unter der vereinfachenden Annahme, daß die freie Weglänge groß gegen die Körperausdehnung ist. Im Gegensatz zu der im allgemeinen bei der Behandlung dieses Problems gemachten Voraussetzung unendlicher Wärmeleitfähigkeit λ des Körpers, also gleicher Temperatur an allen Stellen der Oberfläche, betrachtet der Verf. Körper mit endlichem λ . Für den Grenzfall $\lambda = 0$ wird eine einfache Formel angegeben für die Temperaturverteilung an einem eben und stationär umströmten Zylinder als Funktion des Verhältnisses S der Strömungsgeschwindigkeit zur mittleren thermischen Geschwindigkeit. Für $S = 1$ erhält man Temperaturdifferenzen zwischen den Extremwerten auf Vorder- und Rückseite des Zylinders um den Faktor 2,5, für $S = 10$ solche um den Faktor 100. Diese extremen Temperaturdifferenzen bedingen auch eine Änderung der Druckverteilung und damit des Widerstandes bis zu 20% im Vergleich mit dem Fall $\lambda = \infty$. Für allgemeines λ werden die Gleichungen aufgestellt und diskutiert. Als Beispiel wird näherungsweise die zeitliche und örtliche Temperaturverteilung an der Oberfläche eines mit Metall ($\lambda \neq 0$) ummantelten, plötzlich in Bewegung gesetzten Zylinders ($\lambda = 0$) berechnet. Die Rechnung bezieht sich auf Verhältnisse, wie sie etwa beim Wiedereintritt eines Satelliten in die Erdatmosphäre vorliegen, und es zeigt sich, daß außer den schon erwähnten Temperaturdifferenzen auch der instationäre Anlaufvorgang, der bei dem Beispiel etwa 10 Minuten dauert, im allgemeinen nicht vernachlässigt werden darf. *G. Jungclauss.*

● **Levič, V. G.:** Physikalisch-chemische Hydrodynamik. [Fiziko-chimičeskaja gidrodinamika]. 2. ergänzte und überarb. Aufl. Moskau: Staatsverlag für physikalisch mathematische Literatur 1959. 699 S. R. 23,65 [Russisch].

Die zweite, erweiterte Auflage dieses im Jahre 1952 erschienenen Buches bringt eine Reihe von Problemen der Strömungslehre, die in anderen Fachbüchern weniger

ausführlich behandelt sind. Auf ein erstes, einführendes Kapitel, das Grundbegriffe der Strömungslehre (Grundgleichungen, Ähnlichkeit, Begriffe der Grenzschicht- und Turbulenzlehre) enthält, folgen zwei Kapitel, in denen die Frage der Diffusion in Flüssigkeiten eingehend behandelt ist. Und zwar umfaßt Kapitel 2 die Kinetik der Diffusion, das allgemeine Problem der Diffusion in laminarer Strömung, die Analogie zwischen Diffusions- und Wärmeübergangsgleichung, die Analogie zwischen der konvektiven Diffusion und der Oberflächenreibung sowie eine Reihe von Anwendungen: die sich drehende Scheibe, Bewegung um eine ebene Platte, Strömung in Rohren, der Fall schwerer Partikeln in Flüssigkeiten usw. In Kapitel 3 werden die obigen Fragen für die turbulente Strömung wieder aufgenommen. Kapitel 4 und 5 sind einer kürzeren Darstellung der Fragen des Wärmeüberganges in Flüssigkeiten und einiger Elemente der Theorie der Koagulierung von dispersen Systemen (Kolloide und Aerosol) in Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen gewidmet. Kapitel 6 enthält Anwendungen der Strömungslehre auf elektrochemische Fragen (Stromdurchfluß durch elektrolytische Lösungen). Von den hier behandelten Fragen seien erwähnt: Bedingungen des Ausgleichs elektrolytischer Lösungen, Einfluß chemischer Überspannungen, Stromverteilung in elektrolytischen Lösungen bei laminarer oder turbulenter Strömung für verschiedene Elektrodentypen, Bestimmung der stationären Bedingungen für eine gegebene Stromdichte usw. Einige Fragen der Kapillarität und der durch diese hervorgerufene Strömungen bilden den Gegenstand des 7. Kapitels. Im darauffolgenden Kapitel werden Tropfen- und Gasblasenbewegungen in Flüssigkeiten sowie einige hiermit verknüpfte Fragen behandelt, und zwar: Tropfenfall in Gegenwart von oberflächenaktiven Substanzen, Bewegung großer Tropfen, Bewegung kleiner, mittlerer und großer Gasblasen, Rinnen von Tropfen und Gasblasen, Auflösung von Gasblasen, usw. In Kapitel 9 werden: Strömung von Partikeln in elektrolytischen Lösungen, Elektroforese, elektrokapillare Bewegungen von Quecksilbertropfen, Bewegung der Metalltropfen in elektrischen oder magnetischen Feldern u. a. untersucht. Kapitel 10 ist der Theorie der polarographischen Methode gewidmet, und Kapitel 11 behandelt die Frage der Wellen auf Flüssigkeitsoberflächen (Wellen auf der Oberfläche von idealen und realen Flüssigkeiten, Kapillarwellen, Wellen auf der Oberfläche von Tropfen, Zerstäubung usw.). Das letzte Kapitel enthält einige Fragen der Bewegung und Diffusion in dünnen Flüssigkeitsmembranen. Diese zweite Auflage bringt gegenüber der ersten wichtige Vervollständigungen und Erweiterungen in der Darstellung der Diffusion, Bewegung und Zerstäubung von Tropfen, Bewegung von Gasblasen usw. Hervorzuheben ist insbesondere die Behandlungsweise der Diffusionserscheinung, der Tropfen- und Gasblasenbewegung, das Studium der elektrolytischen Lösungen und die Theorie der polarographischen Methode. Das Buch enthält außer den klassischen Ergebnissen der behandelten Fragen auch die in letzter Zeit von den sowjetischen Forschern erzielten Resultate, insbesondere die im Rahmen des Elektrochemischen Institutes der Akademie der Wissenschaften der Sowjetunion erhaltenen. Durch seinen reichen Inhalt und die Behandlungsweise wendet sich dieses Werk in gleichem Maße an Spezialisten in Fragen der Chemie und Elektrochemie wie an Fachleute auf dem allgemeinen Gebiet der Strömungslehre und Hydrodynamik. *V. N. Constantinescu.*

Goldstein, S. and J. D. Murray: On the mathematics of exchange processes in fixed columns. III: The solution for general entry conditions, and a method of obtaining asymptotic expressions. IV: Limiting values, and correction terms, for the kinetic-theory solution with general entry conditions. V: The equilibrium-theory and perturbation solutions, and their connexion with kinetic-theory solutions, for general entry conditions. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **252**, 334—347, 348—359, 360—375 (1959).

(Part I, II see Goldstein, this Zbl. **53**, 461). — The authors deal with exchange processes between a solid and a flowing fluid in a fixed column (e. g. heat

exchange, ion exchange, adsorption), processes described by the equations

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial x + \partial v / \partial y &= 0 \\ \varepsilon \partial v / \partial y &= u - rv + (r-1)uv \quad (r \text{ constant}) \end{aligned} \right\} (x \geq 0, y \geq 0)$$

(obtained after suitable transformations), where

ε = rate of volume flux of the fluid/exchange coefficient,

with the boundary conditions $v(x, 0) = 0$, $(x \geq 0)$, $u(0, y) = f(y)$ for $0 \leq y \leq Y$, $u(0, y) = 1$ for $y \geq Y$, where $f(0) = 0$, $f(Y) = 1$ and $f(y)$ is monotonic in $(0, Y)$. In part III the authors solve the equations by means of Laplace-transformation and show how asymptotic expressions may be found for small ε . — In part IV the methods described in part III are used to obtain the limiting value of u as $\varepsilon \rightarrow 0$, and to obtain closer approximation in some cases for small but non-zero ε . — In part V the authors consider the so called „equilibrium-theory solutions” obtained for $\varepsilon = 0$ and by means of perturbation methods they find approximations to the „kinetic-theory solutions” for $\varepsilon \neq 0$. The results obtained agree with those obtained by different methods in part IV.

G. Adler.

Litwiniszyn, Jerzy: Flows with the exchange of mass, momentum and energy. Arch. Mech. stosow. 9, 669—683 (1958).

Verf. untersucht eindimensionale Strömungen unter der Annahme, daß ein kontinuierlicher Massen-, Impuls- und Energieaustausch mit der Umgebung vor sich geht, und wendet sie auf die Strömung in Rohren und Rohrleitungsnetzen an. Hierzu werden zunächst Kontinuitäts-, Bewegungs- und Energiegleichung in Lagrange-Koordinaten abgeleitet und dann in gewöhnliche Eulersche Gleichungen umgewandelt. Die erwähnten Gleichungen werden sowohl für inkompressible, als auch für kompressible Flüssigkeiten abgeleitet, jedoch unter Vernachlässigung der Reibungskräfte. Es werden die Möglichkeiten der Integration des so erhaltenen Gleichungssystems im Falle einer kontinuierlichen Variation von Masse, Impuls oder Energie mit Hilfe von Näherungsmethoden untersucht. Ferner wird der Fall behandelt, in welchem der Massenaustausch mit der Umgebung sprungweise stattfindet. Dazu wird eine Dirac-sche Funktionenreihe eingeführt, und die Bewegungsgleichungen werden im Hinblick auf diese Hypothese umgewandelt.

V. N. Constantinescu.

Timman, R.: Probleme aus der Theorie der dreidimensionalen Grenzschichten. Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br. 26.—29. Aug. 1957, 348—356 (1958).

Oswatitsch, K.: Die Ablösungsbedingungen von Grenzschichten. Ibid. 357—367 (1958).

Walz, A.: Neue Anwendungen des Prinzips der gemittelten Grenzschichtbedingungen nach v. Kármán und Pohlhausen. Ibid. 368—376 (1958).

Tani, I.: Experimental investigation of flow separation over a step. Ibid. 377—386 (1958).

Wehrmann, O. und R. Wille: Beitrag zur Phänomenologie des laminar-turbulenten Übergangs im Freistrahle bei kleinen Reynoldszahlen. Ibid. 387—404 (1958).

Nickel, K.: Allgemeine Eigenschaften laminarer Grenzschichtströmungen. Ibid. 404—407 (1958).

Frössling, N.: Thermal laminar boundary layers. Ibid. 407—409 (1958).

Krasinski, J. E. de: Boundary layer separation on swept wings and stall. Ibid. 409—411 (1958).

Timman: Es wird ein Überblick über Erweiterungen des Pohlhausen-Verfahrens auf dreidimensionale Grenzschichten gegeben. Die Schwierigkeiten deuten sich schon darin an, daß hier die Verdrängungsdicke zum Vektor und die Impulsverlustdicke zum Tensor werden. Die Impulsgleichungen werden in Stromlinienkoordinaten zunächst allgemein abgeleitet und dann Näherungsverfahren von Zaat zur Lösung dieser Gleichungen kurz beschrieben.

Oswatitsch: Eine grundsätzliche Untersuchung des Ablöses einer dreidimensionalen Strömung von einer Wand. Aus der Navier-Stokesschen, der Kontinuitäts-gleichung und der Haftbedingung lassen sich die Taylorkoeffizienten des Geschwindigkeitsvektors bis zu den Gliedern zweiter Ordnung im Wandabstand ausdrücken durch die Komponenten der Wandschubspannung und deren räumliche Ableitungen und durch die Ableitungen des Drucks längs der Wand. Daraus erhält Verf. ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Stromlinien in Wandnähe und kann die verschiedenen Fälle diskutieren: insbesondere Konvergenz-, Divergenz- und Strudelpunkte. Während in zweidimensionaler Strömung die Komponenten der Wandschubspannung an der Ablöselinie verschwinden, die Anström- und Rückströmgebiet trennt, verschwinden diese in dreidimensionaler Strömung gleichzeitig nur in einzelnen Punkten. Falls hier eine Ablöselinie existiert, ist sie im allgemeinen auch Wandstromlinie. Ferner muß man hier zwischen Ablösung und Abdrängung unterscheiden, je nachdem ob eine Wandstromlinie von der Wand wegführt oder sich nur an der Wand gabelt, um ein Rückstromgebiet zu umgehen. Verschwinden der Wandschubspannung ist also nur notwendig, aber nicht hinreichende Bedingung für die Ablösung in einem Punkt.

Walz: Die Ergebnisse der bekannten Näherungsverfahren zur Berechnung ebener, stationärer Grenzschichten hängen bekanntlich von der Wahl der vorausgesetzten Profilklassse für die Geschwindigkeitsverteilungen ab. Es wird deshalb ein Verfahren skizziert, bei dem außer der Impuls- und Energiegleichung noch weitere derartige Mittelbildungen der Grenzschichtgleichung benutzt werden, und bei dem auf einen analytischen Ansatz für die Profile völlig verzichtet werden kann. Legt man einem solchen Verfahren die vollen Navier-Stokesschen Gleichungen zugrunde, so ergibt sich die Möglichkeit, auch Fälle zu berechnen, in denen die üblichen Grenzschichtvernachlässigungen nicht mehr zutreffen wie z. B. bei Grenzschichten im Bereich von Verdichtungsstößen, in der Nähe von Ablösestellen und bei kleinen Reynolds-Zahlen.

Tani: An einer längs angeströmten ebenen Wand, die den Strömungsraum durch eine Stufe plötzlich erweitert, wurde die bekannte Wirbelbildung und das Wiederanlegen der Strömung untersucht durch Messung der Drucke, Geschwindigkeiten und turbulenten Schubspannungen. Der Druckverlauf an der Stufe und der Wand erweist sich als nahezu unabhängig von der Stufenhöhe und der Grenzschichtdicke der ankommenden Strömung. Auch ein dreieckiges Füllstück, das etwa die Hälfte des sich sonst ausbildenden Totwassers ausfüllt, ändert die Druckverteilung kaum. Die Druckverteilung der drehungsfreien Potentialströmung mit einem Punktwirbel zur Darstellung des Totwassers steht nicht im Einklang mit den Messungen. Aus all diesen Befunden zieht Verf. den Schluß, daß die wesentliche Kenngröße die turbulente Schubspannung ist, die an der Stufe selbst — unabhängig von deren Höhe — entsteht und die stromabwärts im Mischgebiet des Totwassers und der Hauptströmung noch weiter anwächst.

Wehrmann-Wille: Es wird berichtet über eingehende Messungen an Ringwirbeln, die sich am Anfang eines kreisförmigen Freistrahls bilden. Insbesondere werden auch die Geschwindigkeitsverteilungen innerhalb dieser zähen Wirbel mit Hitzdrähten ausgemessen. Für die Frequenz der Entstehung solcher Wirbel ergibt sich $f \sim D^{1/3} U^{3/2}$, mit D = Durchmesser der Ringdüse und U = Austrittsgeschwindigkeit aus der Düse. Für die Verdrängungsdicke der Grenzschicht an der Düsenmündung gilt $\delta_*/D \sim U^{-1/2}$. Für den sehr schwer zu messenden turbulenten Zerfall der Wirbel lassen sich solche klare Beziehungen noch nicht ablesen.

Nickel: Für ebene, stationäre, laminare Grenzschichten werden allgemeine Folgerungen aus einem Satz über parabolische Differentialgleichungen angegeben, wie z. B.: Überschwindigkeiten können nicht von selbst entstehen, bzw. falls solche künstlich hervorgerufen sind, so können sie nicht weiter anwachsen; die Schubspan-

nung nimmt — bei beliebiger Außengeschwindigkeit — ihren maximalen Wert im Anfangsprofil und an der Wand an; nimmt die Außengeschwindigkeit nicht ab, so kann weder Rückströmung noch Ablösung auftreten.

Frössling: Für die Temperaturgrenzschicht an ebenen oder drehsymmetrischen Körpern in stationärer Strömung werden Reihenentwicklungen in Blasiuskoordinaten angegeben. In der Diskussion weist E. Wrage auf eine ähnliche Arbeit von A. N. Tifford [WADC Techn. Report 53—288 Part 4 (Aug. 1954)] hin.

Krasinski: Das Abreißen der Strömung an einem Pfeilflügel ist ein dreimensionales Grenzschichtproblem von großer praktischer Bedeutung. Verf. untersucht diese Frage halbempirisch, wozu er zunächst die Flügel in solche einteilt, bei denen der größte Auftriebsbeiwert entweder zwischen der Symmetrieebene und der Flügelspitze auftritt oder an der Flügelspitze selbst. Aus einer Analyse des Verhaltens von 40 Pfeilflügeln werden für beide Flügelklassen Stabilitätskriterien gefolgert in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis, der Flügelzuspitzung und dem Pfeilwinkel.

K. Wieghardt.

Wadhwa, Y. D.: Boundary layer growth on a spinning body: Accelerated motion. *Philos. Mag.*, VIII. Ser. 3, 152—158 (1958).

Das Entstehen einer laminaren Grenzschicht an einem Umdrehungskörper, dessen Geschwindigkeit längs seiner Drehachse und dessen Drehgeschwindigkeit um die Achse gleichzeitig mit derselben Potenz der Zeit anwachsen, wird durch Reihenentwicklungen rechnerisch verfolgt.

K. Wieghardt.

Napolitano, L. G.: The Blasius equation with three-point boundary conditions. *Quart. appl. Math.* 16, 397—408 (1959).

Für die bei der mathematischen Behandlung der Vermischung zweier paralleler Strömungen auftretende Blasius-Differentialgleichung $f''' + 2ff'' = 0$ mit den Drei-Punkt-Randbedingungen $f'(\infty) = 1$, $f'(-\infty) = 1 - \lambda$, $f(0) = 0$, ($0 \leq \lambda \leq 1$) wird durch eine Potenzreihenentwicklung nach Potenzen des Parameters λ mit Koeffizienten, die Funktionen von der unabhängigen Variablen sind, näherungsweise eine Lösung ermittelt. Die ersten drei Funktionen sind zusammen mit ihren ersten zwei Ableitungen angegeben. Die Konvergenz der Reihenentwicklung wird nicht gezeigt; dafür wird die aus den ersten zwei bzw. drei Gliedern der Entwicklung ermittelte Näherungslösung an einigen numerisch ermittelten Lösungen des obigen Randwertproblems geprüft, und es zeigt sich gute Übereinstimmung bis $\lambda = 0,5$ bzw. $\lambda = 0,7$. Die auftretenden Funktionen lassen sich ausdrücken durch die Fehlerfunktion und durch Mehrfach-Integrale über das Komplement der Fehlerfunktion bzw. durch Mehrfach-Integrale über das Quadrat der letztgenannten Mehrfach-Integrale. Dem Studium von Zusammenhängen zwischen diesen Funktionen sind zwei Anhänge gewidmet.

E. Wrage.

Ting, Lu: On the mixing of two parallel streams. *J. Math. Physics* 38, 153—165 (1959).

Das Problem der freien Strahlgrenze führt auf dieselben Differentialgleichungen wie das Problem der Grenzschichtströmung längs einer ebenen Platte. Zum Unterschied von dieser letzten Aufgabe hat man jedoch beim Problem der freien Strahlgrenze zunächst nur die beiden Randbedingungen zur Verfügung, die aus der Aussage resultieren, daß die zur Anströmungsrichtung parallele Geschwindigkeitskomponente in großer Entfernung beiderseits vom Strahl gegen die Anströmungsgeschwindigkeit konvergiert. Eine dritte Randbedingung läßt sich gemäß der vorliegenden Untersuchung für eine gewisse Näherungslösung aufstellen. Man erhält die Differentialgleichung dieser Näherungslösung samt der fehlenden dritten Randbedingung, wenn man die exakte Lösung in eine Taylorsche Reihe nach einem Parameter ε entwickelt, dessen Quadrat das Reziproke einer Reynoldsschen Zahl ist, und nach Einsetzen dieser Reihe in die Grenzschichtgleichungen einen Koeffizientenvergleich für die verschiedenen Potenzen von ε durchführt. Die Glieder niedrigster Ordnung be-

stimmen dann die Differentialgleichung der Näherungslösung, während eine Verträglichkeitsbedingung für die Lösung der nächsthöheren Ordnung die dritte Randbedingung liefert. Praktisch läuft diese Bedingung darauf hinaus, daß für den Druck in Verlängerung der ursprünglichen Trennwand Stetigkeit gefordert wird. Die Form dieser Bedingung wird für die Spezialfälle diskutiert, daß sich beiderseits des Strahls Überschallströmungen bzw. Unterschallströmungen bzw. inkompressible Strömungen befinden, und ferner für den Fall, daß auf einer Seite Überschallströmung, auf der anderen Seite Unterschallströmung herrscht.

H. Stümke.

Farztdinov, M. M.: On the uniqueness of the solutions of the equation of weak convection in the steady state. PMM J. appl. Math. Mech. 22, 393—397 (1958), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. 22, 286—288 (1958).

Natürliche Konvektionsströmung eines inkompressiblen Mediums bei laminarer Strömung. Das Medium fülle ein festes Gebiet innerhalb eines unendlich ausgedehnten festen Körpers vollständig aus; im Unendlichen sei ein nicht-vertikaler Temperaturgradient vorgeschrieben. Verf. entwickelt die Lösungen der zugehörigen (nicht-linearen) Differentialgleichungen in eine Potenzreihe nach der Grashof'schen Zahl. Die Koeffizientenfunktionen dieser Reihe berechnen sich dann durch Lösen eines unendlichen Systems von linearen Differentialgleichungen. Es wird — im Gegensatz zum Titel des Berichts — nichts über die Eindeutigkeit einer Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen mit ihren Randbedingungen ausgesagt, sondern allein gezeigt, daß das System für die Koeffizientenfunktionen höchstens eine einzige Lösung besitzt. Der Beweis erfolgt durch die Energie-Integral-Methode.

K. Nickel.

Kotljars, Ja. M.: Zur Theorie sphärischer Luftlager. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinost. 1959, Nr. 6, 21—26 (1959) [Russisch].

Verf. untersucht die Druckverteilung in einem sphärischen Lager, das unter Druck gespeist wird, für den Fall, daß beide Kontaktflächen unbeweglich sind. Durch eine Reihe von angemessen gewählten Transformationen und mittels Ersatz der reellen Variation der Dicke der Ölschicht durch eine annähernde Dicke erhält Verf. die Differentialgleichung des Druckes in Form eines Laplace-Operators und erhält die Lösung des Problems für den Fall, daß die Luftspeisung durch eine Reihe von kreisförmig angeordneten Löchern stattfindet.

V. N. Constantinescu

● **The scientific papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor. Vol. II: Meteorology, oceanography and turbulent flow.** Edited by G. K. Batchelor. Cambridge: At the University Press 1960. X, 515 p. 75 s. net.

Der vorliegende zweite Band der wissenschaftlichen Arbeiten von Sir Geoffrey Ingram Taylor ist der erste von drei der Hydrodynamik gewidmeten Bänden. Er enthält 45 Arbeiten aus dem Gebiet der Meteorologie, Ozeanographie und der Turbulenz. Man findet darunter insbesondere die grundlegenden Arbeiten über die statistische Theorie der Turbulenz und den Zusammenhang zwischen Turbulenzgrad und kritischer Reynoldszahl einer Kugel, ferner auch die Arbeiten über die statistische Theorie der isotropen Turbulenz und das Turbulenzspektrum, sowie über die Flüssigkeitsreibung zwischen rotierenden Zylindern. Aus dem Gebiet der Meteorologie sind Arbeiten über die Nebelbildung, Diffusion und turbulente Erscheinungen in der Atmosphäre, sowie über die Stabilität geschichteter Strömungen zu erwähnen. Die ozeanographischen Arbeiten beziehen sich hauptsächlich auf Gezeitenschwingungen in begrenzten Seebecken und den Einfluß der Reibung. Auf allen diesen Gebieten hat Sir G. Taylor Grundlegendes geleistet und es ist für alle daran interessierten Wissenschaftler eine große Erleichterung, diese Arbeiten in einem Band vereinigt zu haben, zumal gerade manche der älteren Arbeiten an schwer zugänglicher Stelle veröffentlicht waren.

W. Wuest.

Sato, Hiroshi: The stability and transition of a two-dimensional jet. J. Fluid Mechanics 7, 53—80 (1960).

Die Stabilität der Laminarströmung in einem zweidimensionalen Strahl gegenüber kleinen Störungen hatte Savic [Philos. Mag., VII. Ser. 32, 245 (1941)] mit Hilfe der Orr-Sommerfeld-Gleichung für unendlich große Reynoldszahl Re untersucht. Lessen und Fox (dies. Zbl. 67, 430) hatten die Berechnung der Wellenzahl und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für verschiedenes Anfachungsmaß fortgesetzt. Tatsumi und Kakutani (dies. Zbl. 81, 410) schließlich hatten die Indifferenzkurve über einen großen Bereich von Re angegeben. Verf. vergleicht eigene Messungen der mittleren und Schwankungskomponenten der Geschwindigkeit im Umschlaggebiet mit der Theorie und ergänzt die Erörterung durch numerische Lösungen, denen die Geschwindigkeitsprofile der noch nicht voll ausgebildeten Strahlströmung bei $Re \rightarrow \infty$ zugrundegelegt werden.

J. Pretsch.

Case, K. M.: Stability of inviscid plane Couette flow. Phys. Fluids 3, 143—148 (1960).

Verf. behandelt die ebene Couette-Strömung im reibungsfreien Fall und zeigt, daß die instationären Störungen der stationären Grundströmung (lineares Geschwindigkeitsprofil) ein kontinuierliches Eigenwertspektrum besitzen. Dies bekräftigt eine Aussage, die bereits in die Literatur eingegangen ist (C. C. Lin, The Theory of Hydrodynamic Stability, London 1955, S. 126).

J. Zierep.

Peschka, W.: Beitrag zu den Wirbelsätzen der Magnetohydrodynamik. Österreich. Ingenieur-Arch. 13, 17—23 (1959).

Der Verf. verallgemeinert die Wirbelsätze von Bjerkness und Crocco und die Bernoullische Gleichung auf den Fall magnetohydrodynamischer Strömungen vollkommener Flüssigkeiten mit unendlicher elektrischer Leitfähigkeit. Insbesondere werden auch die Bedingungen untersucht, unter denen die zusätzlichen, durch elektromagnetische Einflüsse bedingten Glieder in den Gleichungen verschwinden. Im Falle der verallgemeinerten Bernoullischen Gleichung und inkompressibler Strömung ist dabei der Fall interessant, bei dem die Vektoren der Geschwindigkeiten und magnetischen Feldlinien überall zueinander parallel sind und die Absolutbeträge beider ein bestimmtes konstantes Verhältnis zueinander haben. Das führt auf Kármánsche Wirbelstraßen mit elektrischen Strömen in den Wirbelkernen, deren Stärke proportional zur Zirkulation der Wirbel ist.

G. Jungclauss.

Nočevkina (Nochevkina), I. I.: On the approximation method in investigation of plane rotational flow in magnetohydrodynamics. Soviet Phys., Doklady 4, 549—553 (1959), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR 126, 1220—1223 (1959).

Betrachtet wird die ebene, stationäre und nicht wirbelfreie Strömung eines kompressiblen Mediums von unendlicher Leitfähigkeit in einem zur Strömungsebene orthogonalen magnetischen Feld. Durch Einführung neuer Variablen wird ein dem Gleichungssystem der klassischen Hydrodynamik äquivalentes Gleichungssystem für eine Zustandsgleichung von der Gestalt $P(\rho, \psi) = Q(\psi) \rho^2 + n \rho^n - B(\psi)$ erhalten, wobei $Q(\psi) \rho^2$ der Druck des magnetischen Feldes und $n \rho^n - B(\psi)$ der Druck des Mediums ist. Die Geschwindigkeit soll durch $\vec{v}(x, y) = \lambda(x, y) \text{ grad } \varphi(x, y)$ gegeben sein. Für kleine Variationsintervalle der Machzahl M wird für die Stromfunktion eine angenäherte Gleichung erhalten, deren Lösung in der Gestalt $\varphi(r, \theta) = f_n(r) e^{2in\theta}$ gesucht wird. Zur Bestimmung der $f_n(r)$ werden Besselsche Gleichungen erhalten.

F. Labisch.

Nardini, Renato: Su un gruppo di casi relativi ad onde magneto-idrodinamiche non-omogenee. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 43, 371—397 (1957).

In due note precedenti [Boll. Un. Mat. Ital., III. Ser. 10, 349—362 (1955); 11, 350—358 (1956)], considerato un fluido incompressibile, non viscoso e conduttore perfetto dell'elettricità, l'A. ha mostrato che in presenza di un campo magnetico H_0 , stazionario e dotato di simmetria rispetto ad un asse, possono propagarsi nella direzione di H_0 due tipi di onde magneto-idrodinamiche corrispondenti ai due casi

che \mathbf{H}_0 sia diretto radialmente od assialmente. Questi risultati vengono ora generalizzati. Riferendosi a coordinate curvilinee ortogonali e supponendo il campo impresso \mathbf{H}_0 diretto secondo una linea coordinata, viene esaminato dapprima il caso che il campo magnetico indotto e la velocità del fluido siano paralleli ad una linea ortogonale alla precedente e viene riconosciuta la possibilità di propagazione di onde non omogenee nella direzione di \mathbf{H}_0 subordinatamente al verificarsi di certe condizioni accessorie e di compatibilità. Tali condizioni sono verificate per le coordinate cartesiane e per le coordinate cilindriche in altri tre casi oltre ai due sopra ricordati. Successivamente la trattazione viene estesa al caso che il campo indotto e la velocità del mezzo siano comunque diretti trasversalmente ad \mathbf{H}_0 . *G. Aymerich.*

Hasimoto, Hidenori: Viscous flow of a perfectly conducting fluid with a frozen magnetic field. *Phys. Fluids* 2, 337—338 (1959).

Verf. betrachtet die stationäre Umströmung von Körpern durch eine inkompressible zähe Flüssigkeit mit unendlicher Leitfähigkeit und konstanten Materialwerten. Für den Fall, daß im Unendlichen die Geschwindigkeiten \vec{V} und das Magnetfeld \vec{H} die gleiche Richtung haben, gibt es eine einfache Klasse von Lösungen, bei denen \vec{H} und \vec{V} überall die gleiche Richtung haben und die Alfvenzahl $|\mu \vec{H}|/|\vec{V}| \varrho = \beta$ im ganzen Strömungsfeld konstant ist. Das Problem reduziert sich dann auf die Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen mit einer um den Faktor $(1 - \beta^2)$ reduzierten Dichte $\varrho' = \varrho (1 - \beta^2)$. $\beta > 1$ entspricht dann negativem ϱ' . Durch Anwendung einer einfachen Transformation zeigt der Verf., daß in diesem Fall die Stromlinien die gleichen sind, wie für das positive $\varrho' = \varrho |1 - \beta^2|$, aber mit umgekehrter Strömungsrichtung. Das führt auf interessante Lösungen mit Totwassern vor den Körpern. Diese Ergebnisse werden angewandt auf die Berechnung des Widerstandes einer umströmten Platte. *G. Jungclauss.*

Fay, James A.: Two-dimensional gaseous detonations: velocity deficit. *Phys. Fluids* 2, 283—289 (1959).

Die schon mehrfach untersuchte, vom Rohrdurchmesser D und Ausgangsdruck p_1 abhängige Verminderung Δu_1 der Detonationsgeschwindigkeit u_1 gegenüber dem Normalwert wird als Grenzschichteffekt gedeutet. Bei stationärer Betrachtung ergibt sich an der C - J -Ebene (Schallgrenze) eine negative Verdrängungsdicke δ^* , somit eine scheinbare Erhöhung von D auf $D + 2\delta^*$. Eine Überschlagsrechnung für nichtdissipative Fadenströmung führt auf $\Delta u_1/u_1 = 2,1 \delta^*/D$. Mittels einer halbempirischen Formel für δ^* (turbulent), worin der Abstand t zwischen Stoßfront und C - J -Ebene eingeht, sowie plausiblen Annahmen über den Reaktionsablauf und Messungen der Relaxationsdistanz λ für die Gleichgewichtseinstellung läßt sich $\Delta u_1/u_1$ berechnen und mit Meßwerten vergleichen. Die Übereinstimmung ist bei allen fünf untersuchten Gemischen befriedigend. Es wird $t/\lambda \sim 5$, d. h. die Reaktion ist an der C - J -Ebene zu 99,4% beendet. *F. Wecken.*

Menkes, J.: On the stability of a plane deflagration wave. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* 253, 380—389 (1959).

In der vorliegenden Arbeit wird die Stabilität einer ebenen Flamme gegenüber kleinen Störungen der Temperatur, der Konzentration und des Massenflusses untersucht. Dabei wird das folgende vereinfachte Modell zugrundegelegt: Der stationäre wie der gestörte Zustand sind streng eindimensional, die Lewis-Zahl ist gleich Eins und der Druck konstant. Ferner wird die stationäre absolute Temperatur sehr weit vor der Flamme gleich Null, sehr weit dahinter gleich der Verbrennungstemperatur gesetzt; dazwischen wird mittels des hyperbolischen Tangens ein stetiger Übergang hergestellt. Schließlich wird die stationäre Konzentration als lineare Funktion der Temperatur angenommen. Linearisierung und Abspaltung eines Exponentialfaktors, der die Zeitabhängigkeit charakterisiert, führt auf eine Besselsche Dif-

ferentialgleichung für die räumliche Verteilung der Störungen. Für die Störungen wird noch Verschwinden im Unendlichen als Randbedingung gefordert. Damit ergibt sich ein zweiparametriges kontinuierliches Spektrum von Lösungen, wobei jedoch ein Teil der Parameterebene durch die Randbedingung ausgeschlossen wird. Der zugelassene Teil der Parameterebene zerfällt in einen stabilen und einen instabilen Bereich, und zwar derart, daß es zu jeder von Null verschiedenen Frequenz neben einem Band mit instabilen Lösungen auch ein Band mit stabilen Lösungen gibt. Verf. glaubt hieraus schließen zu können, daß eine ebene Flamme der behandelten Art gegenüber Störungen beliebiger Frequenz mit eventueller Ausnahme der Frequenz Null stabil ist. Die vorgebrachte Analyse reicht jedoch nach Ansicht des Ref. nicht zur Rechtfertigung dieses Schlusses aus. *H. Stümke.*

Ursell, F., R. G. Dean and Y. S. Yu.: **Forced small-amplitude water waves: a comparison of theory and experiment.** *J. Fluid Mechanics* 7, 33—52 (1960).

Durch eine vertikale Platte, welche sich periodisch horizontal verschiebt, werden in einer Rinne von rechteckigem Querschnitt Wasserwellen erzeugt. Für verschiedene Frequenzen und Amplituden werden die Wellenhöhen gemessen. Wenn man die Meßwerte im Falle kleiner Wellenschrägen (0,002 bis 0,03) um 3,4%, im Falle größerer Wellenschrägen (0,045 bis 0,048) um 10% vergrößert, so streuen sie nur wenig um die Linie, welche sich aus Havelocks linearer Theorie der Erzeugung ebener Wellen ergibt. — Der Einfluß der Wellenreflexion am schräg auslaufenden Ende der Versuchsrinne wird abgeschätzt und berücksichtigt. *K. Eggers.*

Eggers, Klaus: **Über das Wellenbild einer pulsierenden Störung in Translation.** *Schiff und Hafen* 9, 874—878 (1957).

Eine punktförmige Störung, deren Intensität harmonisch oszilliert, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf der Oberfläche eines unendlich tiefen Meeres. Das Wellenbild in großer Entfernung von der Strömung wird mit elementaren Hilfsmitteln hergeleitet. Dazu wird erst die Zuordnung zwischen Wellenzahl und Ausbreitungswinkel für ebene Wellen bestimmt. Ein Unterschied wird gemacht zwischen Fahrtwellen und Schwingungswellen. Mittels dieser ebenen Wellen wird dann das Wellenfeld in großer Entfernung aufgebaut. Die Linien konstanter Phase werden durch Bildung von Enveloppen bestimmt. Dieses letzte Verfahren ist der Methode der stationären Phase analog und wird, nach der Meinung des Referenten, durch diese begründet. Der behauptete elementare Charakter der vorliegenden Arbeit kann daher angezweifelt werden. *J. A. Geurst.*

Jonas, P.: **Die Zentripetalturbine für kompressible Medien. Ihre Theorie und Eigenschaften.** *Wiss. Z. Univ. Rostock, math.-naturw. R.* 9, 81—96 (1960).

Der Artikel bringt eine Zusammenstellung und Weiterführung der Veröffentlichungen über Zentripetalturbinen von v. d. Nüll, Baljé und Roxbee-Cox-Jamieson. Die ersten Abschnitte enthalten die Zusammenhänge für die Auslegung auf Grund der Geschwindigkeitsdreiecke für einen mittleren Schnitt in Abhängigkeit von den charakteristischen geometrischen Daten des Laufrades und den thermodynamischen Ausgangswerten. Es werden zwei Darstellungsweisen, in Anlehnung an die Gewohnheiten des Turbinenbaues bzw. jene des Radialverdichterbaues, gezeigt und bezüglich Zweckmäßigkeit verglichen. Dann wird versucht, die Größe der Verlustbeiwerte für Leit- und Laufrad aus bekannten Abhängigkeiten für die Rohrreibung und die Krümmerverluste abzuleiten. Die Stichhaltigkeit dieser Betrachtungen müßte aber noch durch Versuche belegt werden. Auch wurden bei diesen Ableitungen für ein und denselben Zusammenhang der geometrischen Laufradabmessungen an verschiedenen Stellen verschiedene Näherungen verwendet. Ein Auslegungsdiagramm zeigt die zu erwartenden Umfangswirkungsgrade in Abhängigkeit von der Laufzahl u_1/c_0 für den Leitradaustrittswinkel 15° und gleiche Meridiankomponente der Geschwindigkeiten am Laufradeintritt bzw. -austritt unter der Annahme, daß die vorher abgeleiteten Verlustbeiwerte Gültigkeit haben. Abschließend werden die bisher nicht

behandelten Verlustquellen (Spaltverluste, Scheibenreibung usw.) und die konstruktiven und technologischen Vor- und Nachteile der Radialturbine im Vergleich zur Axialturbine diskutiert. *H. Hausenblas.*

Polubarinova-Kočina (Polubarinova-Kochina), P. Ya. (P. Ia.): Ground water movements at water level fluctuations in a reservoir with a vertical boundary. *PMM J. appl. Math. Mech.* **23**, 762—769 (1959), Übersetzung von *Priklad. Mat. Mech.* **23**, 540—545 (1959).

R. Meyer [*La Houille Blanche* Nr. 1, Nr. 5 (1955); Nr. 1 (1956)] and G. F. Carrier with W. H. Munk [*Proc. Sympos. appl. Math.* **5**, 89—96 (1954)] have treated the problem of the motion of underground waters in a soil of infinite depth due to sinusoidal fluctuations in a reservoir. In this paper, using the Laplace transform, the problem is considered for any variation of the reservoir level when the porous medium lies in the semiplane $x > 0$ (the Ox -axis is horizontal, the Oz -axis is vertically downwards) and at the beginning the free surface has any form. The cases when the pressure head $h(x, 0, 0) = 0$ but $h(0, z, t) = at$, for $0 < t < T$, or $-H_0 \cos \omega t$ are calculated in detail. The last result is compared with the Meyer's result, who considered only the quasi-steady fluctuations, taking no boundary condition and obtaining the initial free surface a posteriori from his solution. *St. I. Gheorghitza.*

Vasil'ev, V. A. und D. F. Šul'gin: Der Zustrom von Infiltrationswasser in symmetrisch angeordnete Wasserbehälter. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1958**, Nr. 10, 46—50 (1958) [Russisch].

One considers the plane steady motion towards two identical horizontal drains of the rain water on a segment of length $2l$, the middle of this segment being equally far off the drain ends; the rain intensity is assumed constant. Then the boundary conditions can be written $\psi = 0$ for $x = 0$, $\varphi = 0$ for $y = 0$ (on the drains) and on the free surface besides the condition $\varphi + ky = 0$ we have $\psi = \varepsilon x$ for $x \in (0, l)$ and $\psi = \varepsilon l$ for $x \in (l, L)$. By a conformal mapping the motion domain from the hodograph plane is represented onto an auxiliary semiplane ζ and the method of linear differential equations developed by P. Ya. Polubarinova-Kočina is used to find the functions $Z = dz/d\zeta$ and $F = d\omega/d\zeta$, where $\omega = \varphi + i\psi$. Finally, the equation of the free surface is written and its maximum height above the line of drains as well as the point where $x = l$ are determined. *St. I. Gheorghitza.*

Numerov, S. N.: Über die instationäre Filtration in einer streifenförmigen Schicht gegen eine geradlinige Kette vollkommener Bohrlöcher. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1958**, Nr. 1, 79—85 (1958) [Russisch].

In this paper a class of particular solutions for the equation $\partial q / \partial t = a^2 (\partial^2 q / \partial x^2 + \partial^2 q / \partial y^2)$ is studied, corresponding to unsteady filtration of ground waters in a strip towards an infinite row of identical wells with their centres in the points $z = x_0 + inb$, $n = 0, \pm 1, \dots$, when at $t = 0$ we have $\varphi = 0$ in the whole porous medium. Starting from the solution for the infinite medium, the problem when $\varphi = 0$ on both strip frontiers is treated, introducing rows of fictitious wells parallel to the given row; particularly, the case when the discharge of a well is Q_n when $t_n < t < t_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ and $t_1 = 0$ is examined in detail. Then is considered the case when a side of the strip is impervious. Excluding a very short time interval, it is shown that generally we can use the formulas for the steady motion. At the end another cases which can be treated similarly are pointed out.

St. I. Gheorghitza.

Klassische Feldtheorie und Relativitätstheorie:

Lugaresi, Erminia: Su alcuni teoremi di reciprocità dell'elettromagnetismo. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **12**, 443—445 (1957).

The author proofs how some reciprocity theorems of Nicolau for the electromagnetic fields are identical with Lorentz's theorems, in the case of harmonic fields.

P. Constantinescu.

Marziani, Marziano: Sull'integrazione delle equazioni di Maxwell nei mezzi isotropi e anisotropi. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 5, 117—130 (1957).

L'A. se propose d'obtenir les formules de représentation pour le problème aux valeurs initiales correspondant aux équations de Maxwell pour les milieux isotropes et anisotropes. Il utilise à cet effet une transformation de Laplace unilatérale par rapport au temps et une transformation de Laplace bilatérale par rapport aux variables spatiales. Dans le cas des milieux biaxes, cette dernière transformation est remplacée par une transformation de Fourier.

F. J. Bureau.

Lovass-Nagy, V.: Investigation of polyphase electrical systems by means of the matrix calculus. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 369—374 (1958).

Verf. definiert „Hypermatrizen“, deren Elemente gewöhnliche Matrizen sind. Wenn diese Elementarmatrizen zyklisch sind, d. h., wenn ihre Reihen dieselben Elemente in zyklischer Vertauschung enthalten, so läßt sich die Hypermatrix in einer vereinfachten „semikanonischen“ Form darstellen. Mittels solcher Hypermatrizen werden die Vorgänge in mehrphasigen elektrischen Systemen wie Transformatoren, Generatoren und Motoren beschrieben; am Beispiel eines dreiphasigen Transformators mit Stern- bzw. Dreieckschaltung wird die Rechnung durchgeführt.

G. Günther.

Fazekas, Francis: Quelques formules algébriques pour la distribution des tensions dans la chaîne d'isolateur produites à l'aide du calcul matriciel. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 342—347 (1958).

Die Isolatorenkette einer Hochspannungsleitung bildet eine Reihenschaltung gleicher Kondensatoren, deren Belegungen die metallenen Armaturen und deren Dielektrika die Porzellankörper sind. Außerdem hat jede Armatur eine Kapazität gegen den geerdeten Mast. Die Spannung gegen Erde ändert sich längs der Kette von der Betriebsspannung der Leitung am unteren Ende bis auf Null am Aufhängungspunkt nach einem Gesetz, das sich durch eine Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten darstellen läßt. Hieraus die Verteilung der Spannungen zu finden, ist eine Aufgabe, die sich mit elementaren Mitteln streng lösen läßt. Statt dessen operiert der Verf. mit Matrizen, untersucht den Einfluß völlig überflüssiger Vernachlässigungen und kommt dadurch erst auf weiten Umwegen zum Ziel.

G. Günther.

Szendy, Charles: Matrix-calculus to transient analysis of electrical networks. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 402—408, 1 Tafel (1958).

Will man die Überspannungen und Ausgleichvorgänge berechnen, die in einem komplizierten Netz durch Schaltstöße oder Kurzschlüsse hervorgerufen werden, so erweisen sich die Matrizen als ein wertvolles Hilfsmittel. Verf. erläutert ihre Anwendung am Beispiel des Schaltbildes einer Anlage und zeigt, wie man durch zweckmäßige Substitutionen die Anzahl der zu lösenden Differentialgleichungen erheblich vermindern kann. Er bemerkt, daß sich durch Einführung von Hypermatrizen, deren Elemente gewöhnliche Matrizen sind, sein Verfahren z. B. auf den Fall des Einphasen-Kurzschlusses im Drehstromnetz übertragen läßt. Auch für Aufgaben der Fernmelde-technik ist seine Methode verwendbar.

G. Günther.

Ferrari, Italo: Sul campo di un filo percorso da corrente alternata, in prossimità di un mezzo conduttore. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur., 93, 406—436 (1959).

Tullio Levi Civita, in una celebre memoria, determinò il campo elettromagnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente alternata di pulsazione ω , immerso in un dielettrico e vicino ad uno schermo conduttore, piano, parallelo al filo stesso. In questa nota tratterò lo stesso problema sostituendo

però lo schermo con un mezzo conduttore di conduttività γ grande, ma non infinita, occupante un semispazio limitato da un piano parallelo al filo.

Aus der Einleitung.

Tichonov (Tikhonov), A. N.: The propagation of a continuous electromagnetic wave in a laminarly anisotropic medium. *Soviet Phys., Doklady* **4**, 566—570 (1959), Übersetzung aus *Doklady Akad. Nauk SSSR* **126**, 967—970 (1959).

Gegeben ist ein anisotrop leitender Halbraum (Leitfähigkeit durch ein Rotationsellipsoid mit normaler Achse gegeben), gesucht das Feld einer in der Begrenzung liegenden Erregung. Ansatz mit skalarem und Vektorpotential führt auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die in beiden Halbräumen verschieden sind. Die (im allgemeinen unbekannten) Lösungsfunktionen werden mit einer auf Bessel-Funktionen aufbauende Funktionaltransformation umgeformt. Für den isotropen Fall werden geschlossene Lösungen gegeben, in anisotropen Fällen müssen numerische Methoden angewandt werden.

K. Rawer.

Bickmore, Robert W.: On focusing electromagnetic radiators. *Canadian J. Phys.* **35**, 1292—1298 (1957).

Verf. findet, daß zwei mit konstanter Phase belegte Antennenaperturen dann die größtmögliche Transmission aufweisen, wenn ihre Flächen im Falle der Fresnel'schen Beugung Ebenen senkrecht zum Verbindungsstrahl sind, im Falle der Fraunhofer'schen Beugung Kugelkappen, von denen jede ihren Krümmungsmittelpunkt im Flächenmittelpunkt der anderen hat. (Die Bestimmung der maximalen Transmission aus einem Variationsansatz ist jedoch unrichtig; die Variation wird ohne die Nebenbedingung ausgeführt, daß die Flächen differenzierbar und im Mittelpunkt fixiert sein sollen, und dieses unzureichende Extremalproblem wird durch die oben genannten Flächen gar nicht gelöst, sondern nur durch zwei koinzidierende ebene Aperturen. — Ref.).

Walter Franz.

Gajewski, Ryszard: On transient radiation of a dipole inside a wave guide. II. *Acta phys. Polon.* **16**, 3—24 (1957).

Die in Teil I dieser Arbeit (dies. Zbl. **71**, 415) in den Formeln für das Strahlungsfeld eines Dipols innerhalb eines Wellenleiters auftretenden komplexen Integrale werden asymptotisch nach der Sattelpunktmethode ausgewertet. Die erhaltenen Ausdrücke gelten in einer hinreichend großen Entfernung von der Wellenfront des Vorläufers (d. h. der ersten Störung). Wegen technischer Anwendungen interessiert sich Verf. besonders dafür, in welcher Weise das von der Hauptwelle getragene Feld stetig wird. Eine Untersuchung von Rubinowicz [*Acta phys. Polon.* **13**, 115 (1954)] sowie numerische Rechnungen [Cohn, *Proc. nat. Electronic Conf.* **8**, 284 (1953)]; Verf. [*Bull. Acad. polon. Sci., Cl. IV* **3**, 29 (1955)] zeigen, daß sich beim Eintreffen der (sich mit Gruppengeschwindigkeit bewegenden) Hauptwelle nicht sofort das Feld eines gegebenen Typs ausbildet, sondern sein Aufbau etwas Zeit benötigt. Daher interessiert die Änderung der Form der Hauptwellenfront entlang des Wellenleiters. Infolge der Streuung bei der Ausbreitung des Impulses existiert eine theoretische Grenze für die Impulslänge. Verf. bemerkt, daß die Aussagen über das Verhalten der einfachsten Funktion u_z des Lösungssystems (also der Axialkomponente $E_z^{(m)}$ des elektrischen Feldes einer *TM*-Welle mit der Eigenfrequenz ω_m) gültig bleiben für jede, irgendeinen eindimensionalen Wellenvorgang darstellende Funktion $F(t, z)$, die der Differentialgleichung $(1/c^2) F_{tt} - F_{zz} - (\omega_m^2/c^2) F = 0$ mit den Grenzbedingungen $F(t, 0) = 1(t) \cos \omega_0 t$, $F(0, z) = 0$, $F_t(0, z) = 0$ genügt.

H.-J. Hoehnke.

Gabarre, Leandro et Lorenzo Cairó: Méthode variationnelle pour la propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma. *C. r. Acad. Sci., Paris* **249**, 1750—1752 (1959).

Für einen rechteckigen Hohlleiter mit einer dünnen gyroelektrischen Plasmaschicht wird in erster Näherung die Ausbreitungskonstante für den TE_{10} -Modus auf Grund eines Variationsverfahrens berechnet. G. Wallis.

Achiezer (Akhiezer), A. N.: On the reflection of electromagnetic waves by a turnstile junction. Soviet Phys., Doklady 4, 334—337 (1959), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR 125, 300—303 (1959).

Mit Hilfe der Scattering Matrix werden die Eigenschaften der Turnstile-Wellenleiter-Verbindung beschrieben. Das daraus folgende Gleichungssystem für die komplexen Amplituden der einfallenden und reflektierten Wellen vereinfacht sich, wenn zwei oder gar alle vier Arme reflektierend abgeschlossen werden. Für diesen Fall wird eine geometrische Konstruktion angegeben, mit der in einfacher Weise die Polarisation der reflektierten Welle (oder umgekehrt die zugehörige Stellung der Reflektoren) erhalten wird. K. Raver.

Maljužinec (Maliuzhinets), G. D.: Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances. Soviet Phys., Doklady 3, 752—755 (1959), Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 436—439 (1958).

Verf. wendet eine in seiner Dissertation (Einige Verallgemeinerungen der Reflexionsmethoden in der Theorie der Beugung sinusförmiger Wellen; Eigenreferat der Dissertation, FIAN, Moskau 1950) mitgeteilte Methode zur Integration von $\Delta p + k^2 p = 0$ auf die folgende Randwertaufgabe an: G sei das ebene keilförmige Gebiet: $r > 0$, $-\Phi < \varphi < \Phi$, auf den Keilseiten $\varphi = \pm \Phi$ soll die Lösung den Randbedingungen dritter Art $r^{-1} dp/d\varphi \pm ikp \sin \varphi_{\pm} = 0$ genügen. Dabei sei $\sin \varphi_{\pm} = z_0/z_{\pm}$, wo $z_0 = \rho c$ der Wellenwiderstand des Mediums ist und z_{\pm} die Normalimpedanzen auf $\varphi = \pm \Phi$ bedeuten. Im Falle der Brechung der ebenen Welle lautet die Lösung $p(r, \varphi) = \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]$. Im allgemeinen Fall läßt sich diejenige Lösung des ebenen Problems, welche dem Extinktionsprinzip genügt und an den Grenzen stetig ist, durch das Sommerfeldsche Integral

$$p(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} s(\alpha + \varphi) d\alpha$$

darstellen, wobei $s(\alpha) = (\alpha - \varphi_0)^{-1}$ in dem Streifen $|\operatorname{Re} \alpha| < \Phi + \varepsilon$ regulär ist. Es ist $s(\alpha) = \sigma(\alpha) \Psi(\alpha) / \Psi(\varphi_0)$, wo

$$\sigma(\alpha) = \frac{\pi}{2\Phi} \cos \frac{\pi \varphi_0}{2\Phi} \left(\sin \frac{\pi \alpha}{2\Phi} - \sin \frac{\pi \varphi_0}{2\Phi} \right)$$

und $\Psi(\alpha)$ ein endliches Produkt von Funktionen

$$\Psi_{\varphi}(\alpha) = \exp \left[\frac{i}{8\Phi} \int_0^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi v}{4\Phi} \right) \frac{dv d\mu}{\cos(v - \mu)} \right]$$

ist. Das Ergebnis wird an einem Beispiel demonstriert.

W. Quade.

Head, A. K.: The two-mirror aplanat. Proc. phys. Soc., Sect. B 70, 945—949 (1957).

Verf. erhält eine analytische Lösung in geschlossener Form für die Gestalt der asphärischen Spiegel des Schwarzschildschen Spiegelpaares für den Fall, daß Objekt und Bild im Endlichen liegen. Die Forderung der Aplanasie für das Spiegelsystem (d. h. öffnungsfehlerfreie Abbildung des Achsenpunktes und Erfüllung der Sinusbedingung) führt im Verein mit geometrischen Überlegungen zu einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung für die Gestalt eines Spiegels in Polarkoordinaten, deren Lösung angegeben wird. Die in der berühmten Arbeit von Schwarzschild im Jahre 1905 angegebene Lösung eines aplanatischen Teleskops ist in den Formeln des Verf. als Spezialfall enthalten, falls Objekt oder Bild ins Unendliche rücken. Weitere Spezialfälle ergeben sich für den Abbildungsmaßstab $+1$ und -1 , wobei die Erzeugenden der Spiegel Kegelschnitte werden. H. Riesenberg.

Schulz, Dieter: Über ein Hohlprisma mit nicht-planparallelen Seitenplatten. Wiss. Z. Päd. Hochschule Potsdam, math.-naturw. R. 3, 15—18 (1957).

Die Brechungszahl n einer Flüssigkeit kann mit Hilfe der Methode der Minimalablenkung eines monochromatischen Lichtstrahls durch ein Hohlprisma bestimmt werden. Im idealen Fall eines Hohlprismas mit planparallelen Eintritts- und Austrittsplatten gilt dann die bekannte Beziehung $n = \sin [\frac{1}{2}(\gamma + \delta)] / \sin (\frac{1}{2}\gamma)$, wobei γ den Prismenwinkel und δ die kleinste Strahlablenkung bedeuten. Der Verf. untersucht die Frage, welche Korrektur an der Formel anzubringen ist, falls die begrenzenden Platten nicht genau planparallel sind, sondern einen Keilfehler haben. Das Brechungsgesetz liefert den Strahlenverlauf im Hohlprisma. Durch Nullsetzen der Variation der Ablenkung δ ergibt sich als Bedingung für das Auftreten einer extremen (minimalen) Ablenkung $\prod_{\nu=1}^4 \cos i_{\nu} = \prod_{\nu=1}^4 \cos i'_{\nu}$, wobei i_{ν} die Einfallswinkel und i'_{ν} die Ausfallswinkel an den vier auftretenden Planflächen sind. Diese Bedingung wird jedoch für die weitere Berechnung des Korrekturfaktors nicht benutzt. Der Verf. kommt zu einem Resultat, das bereits von amerikanischen Autoren auf einem anderen Wege gefunden wurde. — In einem praktischen Beispiel eines Hohlprismas von $\nu \approx 71^\circ$, bei dem die Keilfehler $+4''$ und $-10''$ betragen, unterscheidet sich der korrigierte vom unkorrigierten n -Wert nur durch fünf Einheiten der 7. Dezimale.

H. Riesenberg.

Richter, E.: Zur Theorie kraftfreier Magnetfelder. Z. Phys. 159, 194—211 (1960).

Es wird gezeigt, daß es für die Behandlung der Gleichung $\text{rot } \vec{H} = \alpha \vec{H}$ im Falle $\alpha = \alpha(\vec{r})$ zweckmäßig ist, Richtung \vec{t} und Betrag H des Magnetfeldes $\vec{H} = H\vec{t}$ zu unterscheiden. Man kann dann nämlich die Ausgangsgleichung umformen in $\text{grad}(\ln H/H_0) = -\vec{t} \text{div } \vec{t} - [\vec{t}, \text{rot } \vec{t}]$. Die Lösungen dieser Gleichung werden zunächst in allgemeinen orthogonalen Koordinaten und dann für spezielle untersucht, und zwar für karthesische, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten und Toruskoordinaten.

G. Wallis.

German, P., C. Schmelzer, W. Schnell and A. Susini: A special function generator: The frequency programming system for the 25 GeV C. E. R. N. proton synchrotron. Ann. Assoc. internat. Calcul Analogique 1, 290—297 (1959).

In einem Protonen-Synchrotron muß zwischen dem magnetischen Führungsfeld B und der Beschleunigungsfrequenz f die Beziehung $f(B) = f_{\infty} \cdot B \cdot (B^2 - B_0^2)^{-1/2}$ eingehalten werden. In der Anlage des CERN ist dazu ein Analogrechner gebaut worden, der mittels Hall-Generatoren eine Spannung proportional $B(B^2 - B_0^2)^{-1/2}$ erzeugt. Diese Spannung steuert einen Oszillator variabler Frequenz f .

Ambr. Speiser.

Sands, M.: Observation of quantum effects in an electron synchrotron. Nuovo Cimento 15, 599—605 (1960).

Für verschiedene Beschleunigungsspannungen und für Elektronenenergien von 800 bis 1200 MeV wurde der Elektronenverlust durch Abweichung vom Synchronismus in einem Synchrotron gemessen. Die Daten stimmen mit theoretischen Berechnungen überein, die von den Quantenanregungen der Phasenoszillationen erwartet werden.

E. Schmutzer.

Félici, Noël J.: Méthode élémentaire de calcul des lentilles électrostatiques. J. Phys. Radium 20, Suppl. au No. 12, 97 A — 109 A (1959).

Näherungsweise Berechnung der Brennweiten und Hauptebenen elektrostatischer und magnetischer Linsen. Das Verfahren von Busch zur Abschätzung der Brennweite kurzer, schwacher Linsen wird auf den Fall stärkerer Linsen erweitert. Zu diesem Zweck wird die starke Linse näherungsweise durch eine Reihe von mehreren

(z. B. zwei oder vier) unendlich dünnen Linsen ersetzt. An je einem Beispiel einer elektrischen und einer magnetischen Linse wird die so berechnete Abhängigkeit der Brennweiten und Hauptebenen von der Linsenstärke mit der exakt berechneten verglichen und eine in Anbetracht der rohen Näherung gute Übereinstimmung festgestellt.

F. Lenz.

Dormont, Henri: *Optique corpusculaire des pinceaux d'axe courbe.* Ann. de Physique, XIII. Ser. 4, 1341—1387 (1959).

Theoretische Untersuchung der paraxialen Eigenschaften von Bündeln geladener Teilchen in Systemen mit gekrümmter Achse. Nach Aufstellung der Bahngleichungen (zwei miteinander gekoppelte gewöhnliche lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Bahnkoordinaten als Funktion der Bogenlänge der Achse) werden eine Reihe einfacherer Spezialfälle behandelt.

F. Lenz.

Rao, Tyagaraja S.: A technique for eliminating the variation of mass with velocity in relativistic problems. Nuovo Cimento, X. Ser. 16, 274—282 (1960).

Substituiert man in die Bewegungsgleichung für die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem zeitlich konstanten elektrisch-magnetischen Feld an Stelle der Zeit t den Parameter τ durch die Beziehung $d\tau/dt = (1 - \beta^2)^{1/2}$ und führt an Stelle des elektrischen Potentials die in der Elektronenoptik als „relativistisch korrigiertes Potential“ bezeichnete Größe ein, so hat die neue Bewegungsgleichung dieselbe Form wie die bisherige, lediglich mit dem Unterschied, daß an Stelle der geschwindigkeitsabhängigen Masse in jener jetzt die von der Geschwindigkeit unabhängige Ruhmasse tritt. Die Lösung der neuen Bewegungsgleichung wird für den Fall eines Zentralfeldes diskutiert und im Rahmen des Bohrschen Atommodells die Sommerfeldsche Feinstrukturformel bis zu der in Feinstrukturkonstanten quadratischen Gliedern abgeleitet.

F. Lenz.

Fourès-Bruhat, Yvonne: *Problème des conditions initiales.* C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1384—1386 (1957).

Die Anfangsbedingungen der allgemeinen Relativitätstheorie werden durch Einführung von isothermen Koordinaten formuliert und die Einsteinschen Gleichungen $S^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = 0$ werden in der Form $S_{(i)}^{\alpha\beta} \equiv [2\sqrt{-g}]^{-1} \cdot \{\square G^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}\} = 0$ geschrieben, wo $H^{\alpha\beta}$ die Ableitungen der Unbekannten von höchstens erster Ordnung enthält. Dadurch wird die Lösung der Einsteinschen Gleichungen auf ein System von quasi-linearen elliptischen Differentialgleichungen zurückgeführt.

J. I. Horváth.

Papapetrou, A.: *Über periodische nichtsinguläre Lösungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.* Ann. der Physik, VI. F. 20, 399—411 (1957).

Verf. untersucht die Existenz von zeitlich periodischen, überall schwachen und daher notwendig singularitätsfreien Lösungen der Einsteinschen Gleichungen $R_{\mu\nu} = 0$. Hierzu wird das Gravitationspotential $g_{\mu\nu}$ in eine Reihe entwickelt. Durch successive Anwendung der de Donderschen Koordinatenbedingung werden dann aus den Einsteinschen Gleichungen in 1. Näherung homogene und aus höheren Näherungen inhomogene Wellengleichungen gewonnen. — Es wird gezeigt, daß, wenn das Gravitationspotential 1. Näherung eine wesentlich zeitlich periodische Lösung der homogenen Wellengleichung ist, das Gravitationspotential 2. Näherung notwendig logarithmisch divergiert. Daher ist eine zeitliche Periodizität des Gravitationsfeldes nicht mit der Annahme vereinbar, daß dieses Feld überall schwach ist.

H. Treder.

Weber, J.: *Detection and generation of gravitational waves.* Phys. Review, II. Ser. 117, 306—313 (1960.)

Verf. diskutiert ausführlich die Möglichkeit mit Hilfe von zeitabhängigen Spannungen, die an piezoelektrischen Kristallen auf elektrischem Wege erzeugt werden,

Gravitationsstrahlung zu erzeugen und diese ihrerseits mit Hilfe eines piezoelektrischen Kristalls nachzuweisen. Auf Grund der geodätischen Deviation führt das Überstreichen eines Kristalls durch Gravitationswellen zum Auftreten von Spannungen im Kristall, die ihrerseits zu piezoelektrischen Effekten Anlaß geben können. — Die quantitative Diskussion ergibt aber, daß Laboratoriumsversuche zur Zeit noch nicht durchführbar sind.

H. Treder.

Lowry, Edward S.: Geometrical representation of the Maxwell field in Minkowski space. *Phys. Review, II. Ser.* **117**, 616—618 (1960).

Verf. verknüpft den elektromagnetischen Feldtensor eines geladenen klassischen Teilchens mit der Orientierung und der Dichte einer Klasse zweidimensionaler Flächen, die radial um die im Minkowski-Raum verlaufende Weltlinie des Teilchens verteilt sind.

E. Schmutzer.

Fletcher, John George: Local conservation laws in generally covariant theories. *Reviews modern Phys.* **32**, 65—87 (1960).

Die vorliegende Arbeit stellt eine zusammenfassende Behandlung des Problems der Erhaltungsgesetze in allgemein-kovarianten Theorien dar, wobei auf die bis in die letzte Zeit auf diesem Gebiet erschienene Literatur (insgesamt werden 59 Zitate angeführt) verhältnismäßig vollständig zurückgegriffen wird. Nach Darlegung des historischen Entwicklungsganges um die Erhaltungsgesetze und der grundlegenden Begriffe befaßt sich Verf. mit folgenden Problemkreisen: Typische physikalische Theorien im Riemannschen Raum, Lagrangeformalismus im Riemannschen Raum, lokale Erhaltungssätze in differentieller und integraler Form, Symmetrioperationen, Erzeugende lokaler Erhaltungssätze (Symmetriemethode, Kommutatormethode), Noether-Theorem mit Beweis und Anwendungen auf die allgemeine Relativitätstheorie, Bedeutung von Erhaltungsgesetzen in allgemein-kovarianten Theorien, Beziehungen zwischen den verschiedenen Erhaltungsgesetzen, Energie-Impulstensor des Dirac-Feldes, Beziehung zwischen Eichung und Nebenbedingungen (im Sinne des Verf.), Behandlung der Eichung im Schwinger-Formalismus, infinitesimale kanonische Transformationen.

E. Schmutzer.

Buchdahl, H. A.: On the trace of the energy-momentum tensor of fields associated with particles of zero rest mass. *J. Austral. math. Soc.* **1**, 99—105 (1959).

Verf. zeigt, daß als Konsequenz der Feldgleichungen für Materie-Felder mit konformal-invarianter Lagrange-Dichte die Spur T_{μ}^{μ} des Materie-Tensors verschwindet. Aus diesem Satz folgt dann, daß bei Materie-Feldern, die zu Teilchen mit der Ruhmasse Null und beliebigem Spin ungleich Null gehören, notwendig $T_{\mu}^{\mu} = 0$ ist.

H. Treder.

Davidson, W.: Number count relations in observational cosmology. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **119**, 665—681 (1960).

Die theoretischen Formeln, welche die Strahlungsquellen und ihre Verteilung im Kosmos mit anderen Observablen der kosmologischen Modelle verknüpfen, werden auf der Basis der Informationstheorie systematisch zusammengestellt und geprüft.

G. Wallis.

Metzner, A. W. K. and P. Morrison: The flow of information in cosmological models. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **119**, 657—664 (1960).

Unter Zugrundelegung des Konzepts eines Horizontes in der Kosmologie (als Grenze zwischen beobachtbaren und nicht beobachtbaren Ereignissen) werden für den stationären Kosmos und die kosmologischen Modelle von deSitter, Page, Milne, Einstein-deSitter und von Dirac die Grenzwerte für die Informationsraten bestimmt. Parameter sind die Dopplerverschiebung und die Bandbreite des Empfängers.

G. Wallis.

Quantentheorie:

Furry, W. H. and N. F. Ramsey: Significance of potentials in quantum theory. Phys. Review, II. Ser. **118**, 623—626 (1960).

The effects of the scalar and vector potentials in quantum mechanics, which were pointed out recently by Aharonov and Bohm, are discussed from the point of view of the consistency of the quantum-mechanical description of interference experiments. A well-known requirement for this consistency is that if any measuring device is introduced that can be used to determine which path the particle has taken, it must have the effect of eliminating the interference phenomenon. Two conceptual experiments are discussed, corresponding to the two phase effects noted by Aharonov and Bohm. In each case it is found that the phase effect is of just the magnitude required to destroy the interference pattern when the circumstances are such that no pattern should be observed.

Zusammenfassung der Autoren.

Chadan, Khosrow: Interactions non locales séparables et matrice de diffusion. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 1597—1598 (1957).

Die Untersuchungen von M. Gourdin und A. Martin (dies. Zbl. 78, 213) werden auf nichtlokalisierbare, separable Potentiale angewandt, welche neben der Zentralkraft auch einen Tensoranteil enthalten. Die Ergebnisse bleiben dieselben; also daß sich nichtlokalisierbare Potentiale von lokalisierbaren bezüglich der Phasenverschiebungen nicht unterscheiden.

E. Breitenberger.

Havas, Peter: Multipole singularities of classical vector and pseudovector fields. Phys. Review, II. Ser. **116**, 202—217 (1959).

Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen eines Teilchens, die Multipol-singularitäten eines neutralen Vektor- oder Pseudovektor-Mesonenfeldes besitzt, wurde von Harish-Chandra aufgestellt unter der Annahme eines divergenzfreien Stromes. In einer neueren Arbeit wurde eine allgemeinere Form der Wechselwirkung vorgeschlagen und dafür die Bewegungsgleichungen für neutrale, geladene und ladungs-symmetrische Felder entwickelt. In der vorliegenden Arbeit werden sowohl Formen von Multipol-Impulsen von beliebiger Ordnung ausgearbeitet, vergleichbar mit diesen Gleichungen, als auch von Impulsen, vergleichbar mit den eingeschränkteren Wechselwirkungen, welche die Elektrodynamik als einen Spezialfall mit einschließen. Es wird dabei die Annahme zugrunde gelegt, daß der Teilchenspin von konstanter Größe ist und nur räumliche Komponenten im Ruhssystem hat. Im Anhang werden die Resultate einer früheren Arbeit über Singularitäten von skalaren und pseudo-skalaren Feldern verallgemeinert, um die Möglichkeit von induzierten Impulsen von allen Ordnungen zu zeigen. Dabei zeigt sich, daß ein Teilchen eine beliebige lineare Kombination von mehrfachen Singularitäten von Spin-0- und Spin-1-Feldern besitzen kann.

D. Schulz.

Ogieveckij (Ogievetskii), V. I. and I. V. Polubarinov: Wave equations with zero and nonzero rest masses. Soviet Phys., JETP **37** (10), 335—338 (1960), Übersetzung von Žurn. éksp. teor. Fiz. **37**, 470—476 (1959).

It is shown that wave equations with nonzero rest mass are invariant with respect to a 15-parameter group of transformations which is a representation of the conformal group.

Zusammenfassung der Autoren.

Jappa, Ju. A. (Yu. A.): On the method of functionals in the quantum field theory. Scalar field. Vestnik Leningradsk. Univ. **13**, Nr. 22 (Ser. Fiz. Chim. 4). Dem Akad.-Mitglied V. A. Fock vom 60. Geburtstag gewidmet. 172—181, engl. Zusammenfassung 181 (1959) [Russisch].

Auf Grund eines Satzes von Suchomlinov (dies. Zbl. 19, 32) über analytische Funktionale [siehe auch E. Hille, Functional Analysis and Semigroups (dies. Zbl. 33, 65) Chap. IV, § 2], wird gezeigt, daß es notwendig und hinreichend für die Darstellbarkeit des Zustandsvektors eines skalaren komplexen Feldes durch Focksche

Funktionale ist, daß dieses Funktional in einer Kugel des Hilbertraumes lokal beschränkt und schwach differenzierbar ist. *M. E. Mayer.*

Joos, Hans: On the problem of canonical field quantization. *Revista Un. mat. mat. Argentina* 18, 113—119 (1959).

Während sich die Representation der den kanonischen Variablen entsprechenden Operatoren bzw. der Vertauschungsrelationen im Falle endlicher Freiheitsgrade eindeutig bestimmen lassen, sind für die Systeme mit unendlichen Freiheitsgraden, d. h. im Falle der Quantenfeldtheorie, verschiedene nicht-äquivalente Representationen möglich, wenigstens wenn man den Formalismus des Hilbertschen Raumes behalten möchte. Das bedeutet aber nach Meinung des Verf., daß die Methode der kanonischen Quantisierung infolge der Existenz von nicht-äquivalenten Representationen der Vertauschungsrelationen abgeändert d. h. diejenige Representation aus den unendlich vielen nicht-äquivalenten Representationen bestimmt werden soll, bei denen wenigstens die Operatoren der wichtigsten physikalischen Größen existieren. Die Frage ob es eine (oder vielleicht mehrere?) solche Representation gibt, kann der Verf. jetzt noch nicht beantworten. Es wird endlich darauf hingewiesen, daß einige Probleme bei der Verwendung der Koopmannschen Operatorenmethode (dies. Zbl. 2, 57) in der Quantenfeldtheorie auftreten, die sehr ähnlich den bekannten Problemen der Quantenmechanik sind. *J. I. Horváth.*

Fajnberg (Fainberg), V. Ja. (V. Ja.): On analytic properties of causal commutators. *Soviet Phys., JETP* 36 (9), 1066—1069 (1959), Übersetzung von *Žurn. éksp. teor. Fiz.* 36, 1503—1508 (1959).

For the matrix element $f(x) = \langle p, r | [A(x/2), B(-x/2)] | p', r' \rangle$ of the causal commutator of two Heisenberg operators A and B (p_μ is the total momentum, r denotes all other quantum numbers for the state $|p, r\rangle$) exists a general integral representation, due to Jost and Lehmann and generalized by Dyson (this Zbl. 85, 434). A simple derivation of that is given. In simpler cases, i. e. if $|p, r\rangle, |p', r'\rangle$ are one-particle states, one of them being the vacuum-state, more detailed spectral formulas are found by more specific use of Lorentz-invariance. As a consequence, for the two-particle matrixelement one has a significant increase in the region of regularity; it is shown, that the scattering amplitude — for real values of the c. m. s. energy — is an analytic function of the square of the momentum transfer regular in the entire complex plane except for poles and cuts on the real axis. *F. Károlyházy.*

Deser, S., W. Gilbert and E. C. G. Sudarshan: Integral representations of two-point functions. *Phys. Review, II. Ser.* 117, 273—279 (1960).

Im Anschluß an frühere Arbeiten der Verff. [s. u. a. *Phys. Review, II. Ser.* 115, 731—735 (1959)] wird eine Integraldarstellung für das allgemeine Matrixelement (gebildet zwischen 2 Energie-Impuls-Eigenzuständen) des Kommutators zweier lorentzinvarianter, lokaler Feldoperatoren abgeleitet. Die Bedingungen der Kausalität und Spektralität sind eingearbeitet. Es handelt sich um eine 3-parametrische Darstellung. Man kann an Hand dieser Integraldarstellung Aussagen über die Analytizität der betreffenden Matrixelemente und der zugehörigen Greenschen Funktionen machen, aber es ist nicht möglich, aus ihr Dispersionsrelationen für die nicht-vorwärts-Streuung abzuleiten. *G. Heber.*

Nagy, K. L.: On a possibility for the elimination of the non-physical consequences of the indefinite metric. *Nuovo Cimento, X. Ser.* 10, 1071—1077 (1958).

We know that it is possible to construct a physically interpretable quantum theory using a linear space of indefinite metric either by giving a physical interpretation only to the vectors of a subspace of definite metric fixed in time or by modifying the usual connection between scattering matrix and equations of motion. A particular case of this last procedure is the treatment of Heisenberg (this Zbl. 78, 202) of the Lee model with "dipol ghost". Another possibility in this direction has been proposed by Bogoljubov, Medvedev and Polivanov [1958 annual internat.

Conf. high Energy Physics CERN, Geneva 1958, 129 (1958)] (Clearly there is a large arbitrariness in this kind of procedures, as it has been remarked particularly by Glaser [1958 annual internat. Conf. high Energy Phys. CERN, Geneva 1958, 265—270 (1958)]. The author here gives a reformulation of the procedure of Bogoljubov and others in which the connection between the physical scattering matrix and the S matrix obtained from the equations of motion is explicitly given; further he proposes a modified procedure in which this connection is expressed by simpler formulae. The author applies this last procedure to a formally local field theory with indefinite metric and verifies, at the first non-vanishing order of a perturbative expansion, that the theory is equivalent to a non-local field theory with definite metric. *R. Ascoli.*

Tixaire, Alberto Galindo: Scattering integral equations in Hilbert space. *Helvet. phys. Acta* **32**, 412—422 (1959).

A mathematical theory of the scattering operator for a multi-channel system is developed along the line laid down by Jauch (this Zbl. 88, 216). Three different integral representations are deduced for the Møller wave operators for each channel and, correspondingly, three integral equations are given for determining the outgoing (incoming) waves. There are no indications how these integral equations can be solved. The exposition is mathematically rigorous; but as a number of assumptions are introduced at various stages of the theory, it is not clear whether the theory can be applied to concrete problems of physics. *T. Katô.*

Nambu, Y.: Parametric representation of general Green's functions. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **6**, 1064—1083 (1957).

Die in vorangehenden Arbeiten (dies. Zbl. 74, 229) vorgeschlagenen parametrischen Darstellungen der Greenschen Funktionen werden in der vorliegenden Arbeit weiter eingeschränkt, um sie mit den analytischen Eigenschaften der störungstheoretischen Entwicklungen in Einklang zu bringen. Zum Unterschied von den erwähnten Arbeiten, enthalten die hier vorgeschlagenen, und im Rahmen der Störungsrechnung bewiesenen, Integraldarstellungen nur einen Nenner, der die Abhängigkeit von allen Impulsen enthält. Die eingeführte Darstellung wird dann zu einer eingehenden Diskussion der drei-Feld Greenfunktion (Vertexteil) verwendet, insbesondere wird die Ableitung von Dispersionsbeziehungen ins Auge gefaßt. Im letzten Paragraphen werden Divergenzfragen behandelt (dabei wird auf den Zusammenhang mit den Integraldarstellungen von Bogoljubov und Širkov hingewiesen). Ferner unterstreicht der Verf. die Tatsache, daß man auf Grund der störungstheoretischen Entwicklung nichts über die analytischen Eigenschaften der vollständigen Greenfunktionen aussagen kann, und daß die älteren Darstellungen nur in Spezialfällen aus den in dieser Arbeit gefundenen folgen. *M. E. Mayer.*

Miyatake, Yoshio: Nonlocal interactions and dispersion relations. *Progress theor. Phys.* **21**, 562—568 (1959).

The results of Oehme (this Zbl. 65, 441) that the dispersion relations can be derived even if microscopic causality is not satisfied, are criticized. On a simple example of non-local interaction the author shows that Oehme's formula for the Fourier transform of the scattering amplitude does not hold. It is concluded that the scattering amplitudes may have complicated forms including formfactors, and that we cannot give the usual physical meaning to the dispersion relations modified by Oehme. The problem of ghost is briefly discussed. *J. Rayski.*

Streater, R. F.: On the unphysical region in dispersion relations. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **13**, 57—76 (1959).

Die Bedingungen für die Massen von vier Teilchen werden so formuliert, daß sich mit den vorhandenen Methoden unelastische Dispersionsrelationen für Prozesse vom Typ $A + B \rightarrow C + D$ ergeben. Eine der notwendigen Bedingungen ist, daß elastische Relationen sowohl für $A + B \rightarrow A' + B'$ als auch für $C + D \rightarrow C' + D'$

im Fall der Vorwärtsstreuung ausfallen. Die Massen von p , n , π und π^0 genügen den Bedingungen, ebenfalls die Photomesonenerzeugung und das K -Meson-System-Modell mit $K = \frac{3}{2} \pi$, $\Lambda^2 N$ (dieses seien die Teilchenmassen). Mit Dispersionsrelationen und der Unitaritätsbedingung für den unphysikalischen Bereich dieses Modells erhält man Integralgleichungen für die unphysikalische Region in $KN \rightarrow \Lambda \Pi$ -Relationen; diese Gleichungen haben Lösungen in Termen der physikalischen S -Matrix-Elemente. Es ist auch möglich, ein Modell-System $KN \rightarrow KN$ so aufzustellen, daß die gebräuchlichen Dispersionsrelationen und auch die unelastischen Relationen, welche die Methode dieser Arbeit benötigt, um die physikalische Region zu interpretieren, durch die vorhandenen Methoden geliefert werden. Allerdings kann auch ein Modell derart konstruiert werden, daß zwar die Dispersionsrelationen geliefert werden, aber so, daß ihre unphysikalische Region nicht durch vorhandene Methoden interpretiert werden kann.

D. Schulz.

Kleitman, D.: On the parity of K -baryon vertices. Nuclear Phys. 14, 33—41 (1959).

Das Baryonenmassenspektrum wird für Theorien untersucht, in welchen π -Mesonen-Wechselwirkungen allgemein gelten und K -Mesonen-Wechselwirkungen zwischen Nukleonen und Kaskadenpartikeln sich nur dadurch unterscheiden, daß sie entgegengesetzte Rauminversionseigenschaften haben. Die Nukleon-Kaskaden-Teilchen-Masse wird durch Näherungen berechnet, in denen Vertexkorrekturen in dem Massenoperator vernachlässigt werden und nur die führenden divergenten Terme in der Massenrenormierung betrachtet werden. Es wird gezeigt, daß die Aufspaltung nur das richtige Vorzeichen hat, wenn die Nukleonen- K -Mesonen-Vertexparts skalar sind statt pseudoskalar.

D. Schulz.

Schwinger, Julian: Field theory of unstable particles. Ann. of Phys. 9, 169—193 (1960).

Die grundlegenden Züge einer einheitlichen Feldtheorie, die sowohl stabile als auch instabile Teilchen enthält, werden ausgehend von der Greenschen Funktion, die die Entwicklung eines beliebigen Anregungszustandes des Vakuums beschreibt, diskutiert. Man erhält auf diese Weise ein Spektrum von Massen, dessen untere Grenze durch die Masse des absolut stabilen Teilchens gebildet wird. Es wird explizit der einfachste Fall einer skalaren Modelltheorie (ladungsfreie Bosonen ohne Spin) betrachtet und abschließend der reelle Fall der π - und K -Mesonen kurz diskutiert. Es zeigt sich das bemerkenswerte Ergebnis, daß, falls ins Gewicht fallende Abweichungen vom exponentiellen Zerfallsgesetz für ein instabiles Teilchen auftreten, diese nicht nur von der Natur des Teilchens selbst, sondern auch wesentlich von den speziellen Umständen des Meßprozesses abhängen, so daß in diesem Fall die Grenze der Anwendbarkeit der Konzeption eines instabilen Teilchens selbst erreicht ist.

F. Engelmann.

Blankenbecler, R.: A contraction rule for composite particles. Nuclear Phys. 14, 97—105 (1959).

Eine Kontraktionsregel für ein beliebig zusammengesetztes Teilchen wird auf der Grundlage von Resultaten von Nishijima und Klein-Zemach abgeleitet. Die Beziehung zwischen dieser Kontraktionsregel und dem analogen Problem bei der Potentialstreuung wird durch eine explizite Reduktion auf den nichtrelativistischen Grenzfall gezeigt. Anwendungen dieser Regeln werden kurz diskutiert.

D. Schulz.

Koba, Z.: Statistical theory of multiple particle production with angular momentum conservation. Nuovo Cimento, X. Ser. 18, 608—612 (1960).

Logunov, A. A. and B. M. Stepanov: Dispersion relations for the photoproduction of pions. Soviet Phys., Doklady 1, 552—554 (1957). Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 110, 368—370 (1957).

Vorliegende Arbeit stammt aus der ersten Zeit (1956) der Theorie der Dispersionsrelationen. Man versteht unter Dispersionsrelationen die Beziehungen zwischen Real- und Imaginärteil der Amplituden der Vorwärtsstreuung. Sie waren insbesondere von Goldberger ausführlich untersucht und von verschiedenen Autoren (Anderson u. a.) auf die Meson-Nukleon-Streuung angewandt worden, waren aber für den Fall der Photoerzeugung von Pionen durch Mesonen nicht anwendbar. Die Verf. stellen im Anschluß an Methoden von Bogoliubov die Dispersionsrelationen auch für den letztgenannten Fall auf. *Th. Sexl.*

Physik vieler Teilchen:

Rendiconti dei lavori scientifici presentati al XLV Congresso nazionale della Società Italiana di Fisica, Pavia, 1—7 ottobre 1959. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 16, 1—146 (1960).

Caldirola, P.: Recenti sviluppi dei metodi ergodici nella meccanica statistica. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 16, 50—60 (1960).

Zusammenfassender Vortrag.

Kawasaki, Kyozi: An entropy concept in statistical mechanics. Progress theor. Phys. 23, 755—757 (1960).

Ausgehend von der Boltzmannschen Größe $S^* = \int \varrho \ln \varrho \, dx$ wird ein Konzept der Entropie diskutiert, das sich auch auf die Behandlung von Spin-Echos anwenden läßt, ohne daß dabei die von J. M. Blatt kritisierten Schwierigkeiten auftreten. *G. Wallis.*

● Khinchin, A. Y.: Mathematical foundations of quantum statistics. Transl. from the first (1951) russian ed. Edited by Irwin Shapiro. Albany, N. Y.: Graylock Press 1960. XI, 232 p. \$ 10,00.

The original work has been reviewed in this Zbl. 54, 79 and the translation into German in this Zbl. 71, 210. The English translation has been added to by the provision of an index. It also contains translations of two articles by the author which were published in 1951 and 1955 respectively. They deal with the general statistical properties of functions which are symmetric in their arguments. *P. T. Landsberg.*

Bowen, Julius and Paul H. E. Meijer: Master equation solution of Ornstein-Uhlenbeck processes. Physica 26, 485—491 (1960).

Die master equation mit kontinuierlichen Variablen wird für Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse gelöst, d. h. für den Fall, daß die Gleichgewichtsverteilung und die Übergangswahrscheinlichkeiten Gaußfunktionen sind. Nachdem die Zeitabhängigkeit absepariert und der Kern der Integralgleichung symmetrisiert ist, erhält man als Eigenfunktionen die hermiteschen Funktionen h_n mit den Eigenwerten ϱ^n , wobei ϱ die zeitabhängige Korrelationsfunktion mit der Zeitabhängigkeit $\varrho(\tau) = \exp(-\gamma|\tau|)$ (nach der Langevin-Gleichung) ist. Die vollständige zeitabhängige Lösung der master equation ist eine unendliche Reihe von hermite-artigen Funktionen, die mit den Relaxationszeiten $(n\gamma)^{-1}$ abklingen. Zur Berechnung der zeitabhängigen Momente n -ter Ordnung der Verteilungsfunktion ist die Kenntnis von höchstens $\frac{1}{2}(n+1)$ Momenten niedrigerer Ordnung der Anfangsverteilung erforderlich. Einige Beispiele für Anfangsverteilungen und deren zeitlichem Übergang zur Gleichgewichtsverteilung werden angegeben. *J. Mertsching.*

Zel'dovič (Zel'dovich), Ja. B. (Ya. B.) and E. M. Rabinovič (Rabinovich): Conditions for the applicability of statistical formulas to a degenerate Fermi gas. Soviet Phys., JETP 37 (10), 924—928 (1960), Übersetzung von Žurn. éksp. teor. Fiz. 37, 1296—1302 (1959).

A degenerate ideal Fermi gas in an arbitrary potential field is considered. It is shown that a sufficient condition for the applicability of statistical formulas to the problem of the change of the density under the action of the potential $V(r)$ is that the motion of the particles with

the maximum (Fermi limit) energy be a quasiclassical motion. This result is not invalidated by nonapplicability of the quasiclassical approximation to the motion of particles with smaller energies, and in particular, for $V < 0$, to that of bound particles. The corrections to the statistical formulas in the one-dimensional and three-dimensional problems have opposite signs.

Zusammenfassung des Autors.

Pavlikovskij (Pavlikovskii), A. and V. Ščuruvna (Shehuruvna): On Zubarev's method of auxiliary variables in statistical physics. Soviet Phys., Doklady 3, 71—74 (1958), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 61—64 (1958).

Verf. berechnen unter Benutzung der Zubarevschen Theorie der Hilfsvariablen [Žurn. éksper. teor. Fiz. 25, 548—559 (1953)] die Zustandssumme eines Systems, bestehend aus einer großen Zahl wechselwirkender Fermiteilchen. Das Wechselwirkungspotential erscheint hierbei in einem geeignet kanonisch transformierten Hamiltonoperator als Potential eines Satzes harmonischer Oszillatoren in den Hilfsvariablen. Der transformierte Hamiltonoperator besteht aus der Summe der Hamiltonoperatoren freier Teilchen und freier Oszillatoren nebst einem Wechselwirkungsterm, der hier vernachlässigt wird. Die bei der Lösung des transformierten Eigenwertproblems zu berücksichtigende Nebenbedingung (Beziehung zwischen Oszillatorkoordinaten und den Fourierkoeffizienten der Dichte) geht wesentlich in die Rechnung ein. Unter Vernachlässigung der Antisymmetrie der Zustände wird ein näherungsweise ausintegrierter Ausdruck für die Zustandssumme angegeben. S. Wolschke.

Malecot, G.: Sur quelques processus de „mouvement brownien“. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 20, 33—53 (1957).

Ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ wird gestoßen von Molekülen aus einer Menge, die in verschiedene Klassen mit Massen m_i und Geschwindigkeiten v_i zerfällt. Die Wahrscheinlichkeit des Stoßes mit einem Molekül der i -ten Sorte sei $\mu_i \cdot \Delta t$ unabhängig von $\dot{x}(t)$. Ein solcher Stoß bewirkt eine unstetige Veränderung von $\dot{x}(t)$, die proportional der Geschwindigkeitsdifferenz $(v_i - \dot{x}(t))$ ist. Für die charakteristische Funktion von $\dot{x}(t)$ leitet der Verf. eine Differentialgleichung erster Ordnung her, die im Markoffschen Fall eine Potenzreihe als Lösung zuläßt, deren Koeffizienten sich rekursiv berechnen. Die asymptotischen Lösungen der Gleichungen für das erste und das zweite Moment von $\dot{x}(t)$ zeigen, daß sich die Zitterbewegung des Teilchens nicht beruhigt, und schließlich endliche Varianz hat. (Wären die Wirkungen der Stöße als von $\dot{x}(t)$ unabhängig angenommen worden, strebte diese Varianz linear nach Unendlich.) Ist zusätzlich zu den Stößen noch eine rücktreibende Kraft im Spiele, die proportional der Entfernung $Y(t)$ des Teilchens vom Ursprung ist, erhält man einen sog. Prozeß mit linearen Mittelwerten. Solche Vektor-Prozesse genügen einer Gleichung

$$\Delta X_i(t) = L_i [X_1(\tau), \dots] \Delta t + \eta_i(t, \Delta t) + o(\Delta t), \quad 0 < \tau \leq t,$$

wobei L_i ein linearer Operator ist und die η_i „residus aléatoires“ genannt werden. Nachdem der Verf. diese Sorte von Prozessen besonders im Markoffschen Fall eingehend diskutiert hat, gewinnt er explizite Formeln für die Mittelwerte und Varianzen des 2-dimensionalen Prozesses $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$. Z. B. ergibt sich: die Schwingung des makroskopischen Oszillators kommt zur Ruhe, während die Varianz der Zitterbewegung unabhängig wird von der rücktreibenden Kraft.

H. Dinges.

Helfand, Eugene: Transport coefficients from dissipation in a canonical ensemble. Phys. Review. II. Ser. 118, 1—9 (1960).

Es werden Ausdrücke für die Transportkoeffizienten durch Untersuchung der mittleren zeitlichen Änderungen in Systemen eines kanonischen Ensembles abgeleitet, wobei der Anfangszustand eines Teilchens teilweise bekannt ist. Man berechnet ein geeignet gewogenes Mittel für die Vergrößerung der anfänglichen Kenntnis sowohl mit hydrodynamischen als auch statistisch-mechanischen Methoden. Der verwandte Gewichtungsfaktor bei der Mittelung läßt sich nicht näher begründen. Durch Vergleich

der Ergebnisse beider Rechnungen erhält man den bekannten Zusammenhang zwischen der Selbstdiffusion von Brownschen Teilchen und dem mittleren Quadrat ihrer Koordinatenverschiebung. Weiterhin wird gezeigt, daß die Viskositäten proportional zum mittleren Quadrat der Verschiebungen des mittleren Teilchenimpulses sind und die Wärmeleitfähigkeit proportional zum mittleren Quadrat der Verschiebung der mittleren Teilchenenergien ist. In der üblichen Weise können diese Ausdrücke in Zeitintegrale über Autokorrelationsfunktionen umgeformt werden.

J. Mertsching.

Nakano, Huzio: On a variation principle for calculating the electrical conductivity. Progress theor. Phys. 22, 453—455 (1959).

Es wird ein Funktional von Operatoren angegeben, dessen Extremum bezüglich dieser Operatoren die elektrische Leitfähigkeit ist. Die Operatoren hängen mit der Dichtematrix des Systems zusammen. Das Verschwinden der Variationsableitung des Funktional liefert die Schrödinger-Gleichung für die Dichtematrix; und nach Einsetzen der Lösungen dieser Gleichung in das Funktional ergibt sich die früher vom Verf. angegebene Leitfähigkeitsformel [Progress. theor. Phys. 15, 77 (1956)]. Das Variationsprinzip wird sowohl im Vielteilchen- als auch im Einteilchenbild formuliert. Eine störungstheoretische Approximation des Einteilchen-Variationsprinzips ist dem Kohler-Sondheimerschen Variationsprinzip äquivalent.

J. Mertsching.

Nakano, Huzio: On the extremum property in the variation principle in the theory of transport processes. Progress theor. Phys. 23, 526—527 (1960).

Das früher (dies. Zbl. 89, 223) vom Verf. angegebene Extremalprinzip für Transportkoeffizienten und innere Entropieproduktion eines Systems wird weiter entwickelt und auf eine Form gebracht, die analog zum Kohler-Sondheimerschen Extremalprinzip für die Lösung der Boltzmann-Gleichung ist. Es bestehen jedoch wesentliche Unterschiede zwischen beiden Extremalprinzipien.

J. Mertsching.

Nakano, Huzio: On the extremum problem in the variation principle in the theory of susceptibility or relaxation phenomena. Progress theor. Phys. 23, 527—529 (1960).

Das früher (dies. Zbl. 89, 223) vom Verf. angegebene Extremalprinzip für Suszeptibilitäten und Relaxationsphänomene wird am Beispiel der magnetischen Suszeptibilität und der Zunahme der inneren Energie im Magnetfeld weiter entwickelt und auf eine zum Kohler-Sondheimerschen Extremalprinzip analoge Form gebracht.

J. Mertsching.

● **Jonseher, A. K.:** Principles of semiconductor device operation. London: G. Bell and Sons, Ltd. 1960. VIII, 168 p. 30 s. net.

Das Buch enthält eine ausführliche Beschreibung der den für die Transistorphysik grundlegenden Effekten der Injektion, Rekombination und Bewegung von überschüssigen Ladungsträgern in Halbleitern zugrunde liegenden physikalischen Tatsachen. Einer kurzen Einführung in die Halbleitertheorie folgen Kapitel über Nichtgleichgewichtszustände, Transport von überschüssigen Ladungsträgern in homogenen Halbleitern, Theorie des p - n -Übergangs und der p - n -Gleichrichter, Theorie mehrfacher p - n -Strukturen, Bewegung von Ladungsträgern in inhomogenen Medien.

O. Madelung.

Green, Melville S.: Comment on a paper of Mori on time-correlation expressions for transport properties. Phys. Review, II. Ser. 119, 829—830 (1960).

Es wird gezeigt, daß der von Mori (dies. Zbl. 88, 233) abgeleitete Autokorrelationsausdruck für die Transporteigenschaften von Flüssigkeiten sich nur scheinbar von dem unterscheidet, welchen Verf. [J. Chem. Phys. 22, 398—413 (1954)] schon früher abgeleitet hatte.

G. Wallis.

Ferraro, V.: General theory of plasma. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 13, 9—56, discussion 56—58 (1959).

In einer zusammenfassenden Darstellung der verschiedenen Beschreibungsweisen des Plasmas wird zunächst die Boltzmann-Gleichung und der stationäre Zustand diskutiert. Nach einigen Bemerkungen über näherungsweise Berechnungen des Stoßterms werden Relaxationserscheinungen behandelt. In weiteren Abschnitten folgen Berechnungen der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit mit und ohne Magnetfeld, Diffusionserscheinungen und schließlich Wellen im Plasma.

G. Wallis.

Belyaev, S. T.: The Boltzmann equation for rarefied gases in strong fields. Plasma Physics and the Problem of controlled thermonuclear Reactions. **3**, 56—76 (1959).

Es wird eine genäherte kinetische Gleichung für ein verdünntes ionisiertes Gas in einem starken Magnetfeld hergeleitet. Dabei wird die Stoßfrequenz als klein gegen die Larmorfrequenz angenommen. In diesem Fall ist folgendes Näherungsverfahren naheliegend: Der ursprüngliche Satz von Teilchenkoordinaten wird in einen äquivalenten Satz kanonischer Variablen transformiert, dessen einer Teil die schnelle Bewegung (Larmorbewegung) und dessen anderer die langsame Bewegung (Drift der Larmorzentren) beschreibt. Von Interesse ist nur die makroskopische Driftbewegung des Systems. Es wird daher die Verteilungsfunktion über die „schnellen Variablen“ gemittelt und eine kinetische Gleichung für diese gemittelte „langsame“ Verteilungsfunktion hergeleitet. Da sich die durch diese Verteilungsfunktion beschriebenen Quasiteilchen (Larmorzyklen) wegen der angenommenen Verdünnung in einem starken Magnetfeld nur schwach beeinflussen, genügt es in erster Näherung, Markoffsches Verhalten anzunehmen (Fokker-Planck-Gleichung).

S. Wolschke.

Pinte, R. et R. Simon: Sur les oscillations radiales et la stabilité d'un plasma cylindrique. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **45**, 595—610 (1959).

Im Rahmen der hydrodynamischen Näherung wird die dynamische Stabilität eines homogenen zylindrischen Plasmas unter dem Einfluß eines eigenen Gravitationsfeldes und eines homogenen longitudinalen Magnetfeldes untersucht. Hierbei wird angenommen, daß Oberflächenströme im Plasma auch ein toroidales Feld in dem umgebenden Vakuum erzeugen. Die Stabilität wird hinsichtlich unendlich kleiner radialer Störungen berechnet. Die erhaltenen Ergebnisse werden unter Vernachlässigung der Schwerkraft auf den Pinch-Effekt angewandt.

G. Wallis.

Montgomery, David: Nonlinear Alfvén waves in a cold ionized gas. Phys. Fluids **2**, 585—588 (1959).

Ausgehend von den Grundgleichungen eines kalten, vollionisierten Gases werden die Ausbreitungsbedingungen für Alfvén-Wellen großer Amplitude längs des Magnetfeldes untersucht. Die möglichen Feldkonfigurationen und die Dispersionsbeziehungen werden abgeleitet.

G. Wallis.

Crupi, Giovanni: Sulle onde piane magneto-idrodinamiche. Boll. Un. mat. Ital. III. Ser. **12**, 439—442 (1957).

L'A. considera le soluzioni, dipendenti da una sola coordinata z , delle equazioni di Maxwell-Minkowski per un mezzo in moto (soggetto a un campo magnetico costante \vec{B}_0 parallelo a z) associate con le equazioni di Eulero per il moto dei fluidi. Può così dimostrare che, per particolari valori di B_0 , si può propagare, in un fluido conduttore in moto e in direzione parallela a \vec{B}_0 , un'onda piana sinoidale priva di smorzamento.

D. Graffi.

Surinov, Ju. A. (Ju. A.): On certain questions in the theory of radiation transfer and radiant heat exchange in an absorbing medium. Soviet Phys., Doklady **3**, 1136—1140 (1959). Übersetzung aus Doklady Akad. Nauk SSSR **123**, 813—816 (1958).

The processes of radiation transfer and radiant heat exchange in a radiating system consisting of bounded grey bodies separated by an absorbing moving medium

with internal heat sources are considered. Firstly, constructing the basic integral equation governing the incident hemisphere radiation density and solving it by the iterative procedure, the author obtains the expression which enables one in the case of the mixed problem to determine the resultant radiation density as well the proper radiation density. In addition to it, the equations for the determination of the radiation vector and of the space density of the incident radiation are derived. Furthermore, the generalized equation for a moving medium with internal heat sources are obtained.

S. Ueno.

Ueno, Suetō: The probabilistic method for problems of radiative transfer. IX: Diffuse reflection and transmission in a finite atmosphere with isotropic scattering in the non-conservative case. *Ann. Astrophysique* 22, 468—483 (1959).

Mit Hilfe einer geeignet formulierten Kolmogoroff-Fellerschen stochastischen Integrodifferentialgleichung für die diffuse Reflexion und Transmission von Licht durch eine planparallele endliche Platte werden die entsprechenden Gesetze abgeleitet. Das Ergebnis ist ähnlich dem von Chandrasekhar gefundenen.

G. Wallis.

Ueno, Suetō: The probabilistic method for problems of radiative transfer. XI: On the scattering and the transmission functions of S. Chandrasekhar. *Ann. Astrophysique* 22, 484—490 (1959).

In einer Behandlung des Strahlungstransports als Markov-Prozeß werden die Streu- und die Transmissionsfunktion von Chandrasekhar als Funktion der optischen Dicke berechnet.

G. Wallis.

Minin, I. N.: Non-stationary problems of the radiation transfer theory. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 14, Nr. 13 [Ser. Mat. Mech. Astron. 3] 137—141, engl. Zusammenfassung 141 (1959) [Russisch].

Die Strahlungstransportgleichung wird für eine Reihe von instationären Problemen durch Laplace-Transformation und den Übergang zu Mittelwerten der Strahlungsintensität gelöst.

G. Wallis.

Kitao, Kazuo: Energy loss and radiation of a gyrating charged particle in a magnetic field. Non-ionized medium. *Progress theor. Phys.* 23, 759—775 (1960).

Ausgehend von den Potentialausdrücken für das Feld eines rotierenden geladenen Teilchens werden allgemeine Formeln für den Energieverlust durch nahe und weite Stöße sowie durch Abstrahlung abgeleitet. Die Vereinfachungen im nicht-relativistischen Fall werden behandelt. Es werden die Elektronendichten und Magnetfeldstärken berechnet, bei denen die Energieverluste durch Stöße und Strahlung gleich groß werden. Im relativistischen Fall werden die Strahlungsverluste durch Synchrotronstrahlung und Tscherenkowstrahlung auch hinsichtlich ihrer Winkelverteilung untersucht.

G. Wallis.

Squires, E. J.: Brueckner theory and the shell model effective potential. *Nuclear Phys.* 13, 224—234 (1959).

A discussion is given of the properties of the shell model effective potential for non-closed shell nuclei (or excited states of closed shell nuclei) obtained from Brueckner theory. In lowest order Brueckner theory leads to the normal shell model procedures, with the t -matrix as the effective potential. It is shown that there are corrections to the simple description which are likely to be important. The corrections to the effective potential in the case of degenerate nuclei bear no simple relation to those which arise in the rearrangement energy. One of the consequences of these corrections is that it is probably not realistic to use the same effective potential in binding energy and single particle energy calculations as in the interactions among several particles outside a closed shell.

H. Kanazawa.

Chisholm, J. S. R. and E. J. Squires: On the inclusion of hole-hole scattering in the Brueckner t -matrix. Nuclear Phys. 13, 156—163 (1959).

It has recently been pointed out that for separable attractive potentials the Brueckner t -matrix is singular for infinite systems no matter how weak the potential may be. The effect of adding an additional set of terms to the usual t -matrix which can be described as hole-hole scattering is studied. The ground state energy is given by

$$(1) \quad E = \sum m^2 + \frac{1}{2} \sum \langle m_1 m_2 | t | m_1 m_2 \rangle$$

where

$$(2) \quad \langle m_1 m_2 | t | m_1 m_2 \rangle = \langle m_1 m_2 | v | m_1 m_2 \rangle_A + \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2} \frac{\langle m_1 m_2 | v | k_1 k_2 \rangle_A \langle k_1 k_2 | t | m_1 m_2 \rangle}{(m_1^2 + m_2^2 - k_1^2 - k_2^2)},$$

$$(3) \quad \langle k_1 k_2 | t | m_1 m_2 \rangle = \langle k_1 k_2 | v | m_1 m_2 \rangle_A + \frac{1}{2} \sum_{k'_1 k'_2} \frac{\langle k_1 k_2 | v | k'_1 k'_2 \rangle_A \langle k'_1 k'_2 | t | m_1 m_2 \rangle}{(m_1^2 + m_2^2 - k_1'^2 - k_2'^2)} \\ + \frac{1}{2} \sum_{m'_1 m'_2} \frac{\langle k_1 k_2 | t | m'_1 m'_2 \rangle \langle m'_1 m'_2 | v | m_1 m_2 \rangle_A}{(m_1'^2 + m_2'^2 - k_1^2 - k_2^2)}.$$

The suffix A means that the matrix element is to be antisymmetrized. m and k denote momenta below and above the Fermi surface respectively. The third term on the right hand side of (3) describes hole-hole scattering. For an attractive separable potential the nature of the singularity in the t -matrix equation is considerably altered, and for the infinite system, the new t -matrix can be written as the sum of a non-singular form and a δ -function.

H. Kanazawa.

Čeň Čuň-Sjaň (Ch'en Ch'un-hsien): A method for taking into-account correlation in a many-particle system. Soviet Phys., Doklady 4, 413—416 (1959), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 125, 1238—1241 (1959).

A general scheme for taking correlation into account in a many-particle system is presented. A series of integral equations for Green functions is obtained, and a method for obtaining an approximate solution is proposed. (The n -particle Green function of the system is defined by

$$(1) \quad G_n(x_1 x_2 \cdots x_n; x'_n \cdots x'_1) = i \langle T \{ \psi(x) \cdots \psi(x_n) \psi^\dagger(x'_n) \cdots \psi(x'_1) \} \rangle$$

which satisfies the equation

$$(2) \quad G_n(x_1 x_2 \cdots x_n; x'_n \cdots x'_1) = i \sum_{s=1}^n G_0(x, x'_s) G_{n-1}(x_2 \cdots x_n; x'_n \cdots x'_{s+1} x'_{s-1} \cdots x'_1) \\ + \int I(y y') G_0(x, y) G_{n+1}(y x_2 \cdots x_n y'; y' x'_n \cdots x'_1) d^4 y d^4 y',$$

where $G_0(x x')$ and $I(y y')$ are propagators for free particle and interaction respectively. The correlation function $F_n(x_1 \cdots x_n; x'_n \cdots x'_1)$ represents the sum of terms from all connected Feynman diagrams for the Green functions G_n :

$$(3) \quad G_1(x_1 x'_1) = F_1(x_1 x'_1) \\ G_2(x_1 x_2; x'_2 x'_1) = F_2(x_1 x_2; x'_2 x'_1) + i F_1(x_1, x'_2) F_1(x_2 x'_1) - i F_1(x_1, x'_1) F_1(x_2 x'_2)$$

and analogous expressions for G_3 and so on. By substituting (3) into (2), the series of equations for F_n is obtained. Approximate solution may be obtained by neglecting all correlation effects of order higher than n ; that is, $F_m = 0$ for $m > n$. The first approximation, in which $F_2 = 0$, corresponds to the method of self-consistent fields. The binary approximation, in which $F_3 = 0$, permits the investigations of high density electron gas, low density Fermi gas with short-range interaction and superconductivity.

H. Kanazawa.

Thouless, David J.: Single-particle energies in the many-fermion system. *Phys. Review, II. Ser.* **114**, 1383—1390 (1959).

The ground state of the many-fermion system is examined by using time-dependent perturbation theory. The propagator of a particle or a hole state is given as a sum of skelton graphs in which the propagators to be used are the ones which are to be calculated. The calculation of the propagators by this method gives a problem of self-consistency, which is expressed by a set of non-linear integral equations. The method is illustrated by deriving a form of the Brueckner approximation in a slightly altered and analytically much simpler form. The derivation avoids the off-energy shell troubles by introducing an extra parameter and suggest a treatment of the off-energy shell effect which simplify the calculation. An attempt is made to obtain an approximation for the one-particle propagators. It is shown how the properties of the propagators, given by Galitskii and Migdal, can be used to find the ground state energy.

H. Kanazawa.

Sawicki, J.: Note on the spin-orbit part of the optical model potential. *Nuclear Phys.* **17**, 89—95 (1960).

Das optische Potential, das über die Wechselwirkung zwischen Nukleonen und zusammengesetzten Kernen eine Rechenschaft gibt, muß auch eine Spin-Bahn-Wechselwirkung enthalten, um die Polarisationserscheinungen bei der elastischen Streuung zu beschreiben. Verf. berechnet dieses Spin-Bahn-Potential unter Heranziehung einer modifizierten, genaueren Form des für den asymptotischen Bereich hoher Energien vorgeschlagenen „impulse approximation“ Modells von Riesenfeld und Watson. Demgemäß kann das optische Spin-Bahn-Potential durch die Phasenverschiebungen der Nukleon-Nukleon-Streuung ausgedrückt werden. Verf. geht in der Hinsicht über den Rahmen des genannten Modells hinaus, indem er eine Integration über den Impuls des Targetteilchens ausführt. Dadurch wird der Anwendungsbereich des Potentials auf die Energien erweitert, bei denen der Impuls des Targetteilchens gegenüber dem des einfallenden Nukleons nicht vernachlässigbar ist. Die Ergebnisse werden mit denen früherer Arbeiten sowie mit den sich auf C^{12} beziehenden Messungsdaten verglichen. Die Integration über den Impuls des Targetteilchens vermindert im allgemeinen die Tiefe des Potentials. Die Änderung der Parameter mit der Energie des einfallenden Teilchens sowie deren Größenordnung zeigen im wesentlichen eine Übereinstimmung mit der Riesenfeld-Watson-Theorie. Bei dem Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen wird eine bessere Übereinstimmung gefunden als früher, obwohl das Verfahren nicht als völlig konsistent betrachtet werden kann. Das verwendete Zentralpotential ist einer früheren Arbeit von Ohnuma entnommen worden; von diesem wurde aber der Impuls des Targetteilchens vernachlässigt.

G. Györgyi.

Inglis, D. R.: Nuclear moments of inertia and effective nucleon mass. *Nuclear Phys.* **8**, 125—138 (1958).

The nuclear moment of inertia may be calculated as the sum of individual nucleon contributions by treating the dynamics of one sample nucleon in the ellipsoidal harmonic-oscillator potential representing its interaction with the others, on the plausible assumption that the moment of inertia due to all the other nucleons is simply associated with the orientation of the axes of the distortion ellipsoid. The moment of inertia has the rigid value when the magnitude of the distortion of an open-shell nucleus is obtained in the most simple manner, by minimizing the sum of the oscillator energies with constant nuclear volume. The moments of inertia of highly distorted nuclei are observed to be about half of the rigid value. One might hope to understand this discrepancy in terms of the nucleonic "effective mass" $M_e \approx \frac{1}{2} M$ which appears in some problems involving nucleons passing through nuclear matter, and is required in the shell model to reconcile excitation with binding energies.

Aus der Zusammenfassung des Autors.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abhyankar, Shreeram** (Finite factor groups of abelian groups) 251.
- Abramov, A. und M. Neuhaus** (Eigenwertprobleme von Matrizen höherer Ordnung) 119.
- Achiezer (Akhiezer), A. N.** (Reflection of electromagnetic waves) 442.
- Adam, A.** (Entropie und Streuung) 134.
- **Pedro Puig s. Puig Adam, Pedro** 1.
- Adams, E. N. und T. D. Holstein** (Quantum theory of transverse galvanomagnetic phenomena) 222.
- **J. F.** (Example in homotopy theory) 391.
- Adrian, P.** (Bernoullische Zahlen) 280.
- Aeschlimann, Florence** (Barycentre des systèmes de corpuscules) 212; (Onde moyenne d'un système de corpuscules) 212.
- Aggarwal, Om. P. und Irwin Guttman** (Truncation and tests of hypotheses) 148.
- Agranovič (Agranovich), M. S.** (Analytic solutions of partial differential equations) 73.
- — **V. N., V. E. Pafomov und A. A. Ruchadze (Rukhadze)** (Čerenkov radiation of an electron) 204.
- Agudo, F. R. Dias s. Dias Agudo, F. R.** 66.
- Aissen, M. I.** (Cyclically ordered sets) 279.
- Ajvazjan (Aivazian), S. A.** (Neuman-Pearson and Wald sequential probability ratio tests) 355.
- Akutowicz, Edwin J.** (Approximation par certaines fonctions entières) 283.
- Al-Salam, W. A. und L. Carlitz** (Congruence properties of orthogonal polynomials) 28; (Turán expressions for hypergeometric series) 45.
- Albert, A. A. und L. J. Paige** (Homomorphism property of Jordan algebras) 20.
- Albuquerque, J.** (Fonctions implicites définies par système d'équations) 274.
- Alda, Václav** (Réseaux de coniques) 168.
- Alder, Henry L. und Edward B. Roessler** (Probability and statistics) 337.
- Alekseev, A. I.** (Bethe-Salpeter equation) 215.
- Alexander, J. M.** (Thermal and irradiation creep buckling of a uranium fuel rod) 421.
- Alexandroff (Alexsandrov), P. S., M. I. Višik (Vishik), V. K. Saul'ev und L. É. El'sgol'c (El'sgol'ts)** (L. A. Ljusternik) 243.
- ALGOL** sub-committee report 333.
- Allanson, J. T.** (Rational polynomials) 10.
- Almeida Costa, A.** (Anneaux demi-premiers) 259.
- Altman, Mieczyslaw** (Théorie de F. Riesz) 251.
- Altmann, S. L.** (Symmetries of spherical harmonics) 46.
- Al'tšul', A. D.** (Begründung der Formel von Colebrook) 196.
- Ambarcumjan, S. A.** (Zweischichtige orthotrope Schalen) 414.
- Amoroso, Luigi** (Pensiero di M. Pantaleoni) 367.
- Amsler, Marc-Henri** (Calcul numérique des tarifs d'assurance) 369.
- Anańeva, G. V. und V. I. Balaganskij** (Oszillationsverhalten der Lösungen einiger Differentialgleichungen) 67.
- Anderson, Edgar** (Analysis of complex problems) 365.
- **Lee W.** (Topological lattices) 257.
- **T. W.** (Sequential probability ratio test) 355.
- Andreatta, Antonio** (Superficie cubiche singolari reali) 377.
- Andree, Richard V.** (Programming the IBM 650) 125.
- Andrews, A. L. und A. D. Buckingham** (Strong electric and magnetic fields on depolarization ratios) 225.
- Angelitch, T. P.** (M. Milankovitch) 243.
- Antosiewicz, H. A. s. H. Fitzhugh** 157.
- Apatenok, R. s. D. Suprunenko** 252.
- Archangel'skij, Ju. A.** (Schneller Gorjačev-Čaplyginscher Kreisel) 401.
- Argyres, Petros N.** (Quantum theory of transport) 223.
- Armentrout, Steve** (Collection of spirals in the plane) 177.
- Arrow, Kenneth J. und Marvin Hoffenberg**, with the assistance of Harry Markowitz and Ronald Shephard (Time series analysis of interindustry demands) 162.
- Artemiadis, Nicolas** (Transformées de Fourier) 53.
- Artobolevskij, I. I.** (Doppelte Führungsgruppe in kurvenläufigen Getrieben) 405.
- Aržanych (Arzhanykh), I. S.** (Algorithm for quantum mechanics) 212.
- Ashford, J. R., C. S. Smith und Susannah Brown** (Quantal response analysis of a series of biological assays) 158.
- Aškinuze, V. G.** (Halbreguläre Polyeder) 373.
- Asser, Günter** (Turing-Maschinen und Markowsche Algorithmen) 247; (Normierte Postsche Algorithmen) 247.
- Atkinson, F. V. s. A. I. Vinogradov** 28.
- Atsumi, Akira** (Stresses in a circular cylinder) 415.
- Aucoin, C. V. und N. C. Perry** (Relation of perfect points to a Fibonacci sequence) 169.

- Auslander, L. and R. E. MacKenzie (Topology of tangent bundles) 392.
- Maurice (Automorphisms of groups) 249.
- Avann, S. P. (Complementation in a modular lattice) 257.
- Aymerich, Giuseppe (Onda di rarefazione completa in un canale) 188.
- Azpeitia, A. G. (Convergence of sequences of complex terms) 41.
- Babister, A. W. (Struve functions) 281.
- Bachet, Claude-Gaspar (Problèmes qui se font par les nombres) 4.
- Backer, W. de (Error analysis of a DC integrator) 127.
- Backes, F. (Surfaces pseudo-sphériques) 171.
- Backus, J. W. s. P. Naur 125.
- Baer, Robert M. (Closure operators) 19.
- Bagemihl, F. (Power series, area, and length) 49.
- Bagley, R. W., E. H. Connell and J. D. McKnight jr. (Pseudo-compact spaces) 176.
- — — and J. D. McKnight (Q-spaces and collections of closed sets) 317.
- Bajraktarević, Mahmud (Équation intégral-fonctionnelle) 87.
- Baker jr., George A. (Neutron diffusion problem) 234.
- Balaganskij, V. I. s. G. V. Anaševa 67.
- Bandić, Ivan (Inhomogene Differentialgleichungen) 63; (Équations différentielles non-linéaires) 64.
- Barabošin, N. M. (Dual-konforme Transformation des Geradenkomplexes) 380.
- Barbašin, E. A. (Stabilitätseigenschaft von Integrodifferentialgleichungen) 310.
- Barbilian, D. (Principe de métrisation) 182.
- Bari, N. K. (Gegen Null konvergierende Teilfolgen) 44.
- Barnard, G. A. (Control charts and stochastic processes) 351.
- Barner, Martin (Geschlossene Laplace-Ketten) 171.
- — — und Wendelin Degen (Sich schließende Figuren asymptotisch transformierter Kurven) 171.
- Barnes, E. S. (Perfect and extreme forms. II.) 27.
- Bartle, Robert G. s. I. C. Gochberg 322.
- Bartlett, M. S. (Problems associated with random velocity) 346.
- Barton, D. E. and F. N. David (Haemocytometer counts and occupancy theory) 158.
- Bartošek, Václav (Abkühlung eines Körpers im kompressiblen Medium) 188.
- Baş, Enis B., Lucien Preuss und Werner Schneider (Relativistische Elektronenoptik) 208.
- Bašelevšvili, M. O. (Differentialgleichungen eines anisotropen elastischen Körpers) 406.
- Bass, Hyman (Finite monadic algebras) 19.
- J. et J. Guilloud (Méthode de Monte-Carlo) 115.
- Basson, A. H. and D. J. O'Connor (Symbolic logic) 6.
- Bastiani, Andrée (Pyramides topologiques) 92.
- Batchelor, G. K. s. Sir Geoffrey Ingram Taylor 435.
- Battaglia, Antonio (Equazione indeterminata $x^{2n} + y^{2n} = z^2$) 26.
- Batuner, L. M. und M. Je. Posin (Mathematische Methoden in der chemischen Technik. I.) 33.
- Bauer, F. L. (Sequential reduction to tridiagonal form) 118.
- — — s. J. W. Backus 125.
- Friedrich L. s. Alston S. Householder 118.
- Baumslag, Gilbert (Wreath products and p -groups) 14.
- Bayman, B. F. and L. Silverberg (Coupling of a $j = 3/2$ particle) 226.
- Beauregard, Olivier Costa de s. Costa de Beauregard, Olivier 210.
- Beck, F. (Harmonic analysis) 126.
- Becker, R. und F. Sauter (Theorie der Elektrizität. 2.) 212.
- Bedel'baev, A. K. (Begrenzung des Stabilitätsbereichs von Regelsystemen) 299; (Stabilitätsgrenzen von Regelsystemen) 299.
- Bel, Louis (Champ de gravitation) 210.
- Belyaev, S. T. (Boltzmann equation for rarefied gases) 453.
- Bemer, R. W. (Card code for 256 characters) 331.
- Ben-Amoz, M. (Deflections and flexural vibrations of plates) 424.
- Bendrikov, G. A. and T. F. Teodorčik (Teodorchik) (Constructing root loci) 329.
- Benedetti, Carlo (Disuguaglianze collegate al campo di variazione di indici statistici) 361.
- Benz, N. (Bonus distributions by life offices) 165.
- Bergman, Stefan (Pseudo-conformal and quasi-pseudo-conformal mappings) 57.
- Bergmann, Otto (Endliche Theorie des Elektrons) 201.
- Berman, D. L. (Verteilung der Knoten im Interpolationsprozeß von S. N. Bernštejn) 41.
- Bernays, Paul (Gestaltung geometrischer Axiomensysteme) 165.
- Bernštejn (Bernshtein), S. N. (A priori estimates in Dirichlet's problem) 81.
- Bertrais, Jean (Somme ou produit de fonctions) 159.
- Bessaga, C. (Converse of the Banach "Fixed-point principle") 315.
- Bethe, Hans A. and Edwin E. Salpeter (Quantum mechanics) 210.
- Beurling, A. et J. Deny (Espaces de Dirichlet. I.) 81; (Dirichlet spaces) 82.
- Bhonsle, B. R. (Jacobi polynomials) 279.
- Białnicka-Birula, Z. s. I. Białnicki-Birula 221.
- Białnicki-Birula, I. (Internal degrees of freedom of the interacting fields) 221; (Schwinger's functional) 221.
- — — und Z. Białnicka-Birula (Polarisation and magnetic moment of spinor particles) 221.
- Bianco, Edmond, Henri Cabannes et Jean Kuntzmann (Nombres de Crocco) 189.
- Bickmore, Robert W. (Focusing electromagnetic radiations) 441.
- Biermann, Kurt-R. (Iteratorik bei Leonhard Euler) 4; (Woeppkes Beziehungen zur

- Berliner Akademie) 5;
(Dirichletiana) 5; (Urteile A. L. Crelles über seine Autoren) 5.
- Biernacki, Mieczysław (Coefficients de Taylor des fonctions univalentes. II.) 50.
- Bihari, I. (Sturmsche Oscillationen- und Vergleichssätze) 68; (Oscillation and monotonicity theorems) 69.
- Bijbosunov (Biibosunov), I. (Plane-parallel transonic flow) 429.
- Bijlaard, P. P. (Thermal stresses and deflections in sandwich plates) 418.
- Bincer, Adam M. (Scattering of longitudinally polarized fermions) 214.
- Bing, R. H. (Cartesian product of a nonmanifold and a line) 395.
- Bingen, Franz (Métrisation des espaces topologiques) 387.
- Birch, B. J. (3 N points in a plane) 385.
- Birnbaum, Z. W. and Ronald Pyke (Distributions related to the statistic D_n^+) 148.
- Bitay, L. (Triangles et tétraèdres non-euclidiens) 166.
- Black, Harold S. (Modulation theory) 203.
- Blambert, M. (Répartition des singularités d'une série de Dirichlet) 284.
- Blankenbecler, B. (Contraction rule for composite particles) 449.
- Blenk, Hermann (Herausgeber) (Jahrbuch 1957) 427.
- Blij, F. van der (Representation of integers) 267.
- — — — and T. A. Springer (Arithmetics of octaves) 258.
- Boas jr., Ralph P. (Primer of real functions) 34.
- — — — s. S. N. Mergeljan 42.
- Bodner, V. A., V. P. Seleznev und V. E. Ovčarov (Ovčarov) (Gedämpfte Inertialsysteme mit willkürlicher Periode) 399; (Inertial damped systems) 399.
- Boehm, George A. W. and the editors of Fortune (New world of mathematics) 2.
- Boesler, J. (Binomische Reihen) 120.
- Bögel, Karl (Normdiagramm der Gleichungen dritten Grades) 331.
- — und Günter Bräuning (Darstellbarkeit einer Funktion) 43.
- Böhm, F. (Dreherschwingungen von Zahnradgetrieben) 405.
- Boleanțu, Lazăr (Équation d'équilibre d'un cable élastique) 411; (Pulsation critique des arbres à oscillations transversales) 424.
- Bonsall, F. F. (Decomposition of continuous linear functionals) 313.
- Boot, J. C. G. and G. M. de Wit (Investment demand) 368.
- Borisenko, A. I. und I. E. Tarapov (Vektoranalysis und Elemente der Tensorrechnung) 169.
- Boron, Leo F. s. M. A. Naimark 101.
- Borš (Borš), K. I. (C. I.) (Torsion des barres cylindriques) 411.
- Borůvka, Otokar und Mitarbeiter (M. Lerch) 242.
- Borwein, D. (Borel-type methods of summability) 40.
- Bose, R. C. and Dale M. Mesner (Linear associative algebras) 150.
- — — — and S. S. Shrikhande (Code construction) 149.
- Bottenbruch, H. (Übersetzung von Formelsprachen in Programmsprachen) 332.
- Bouligand, Georges (Transformations conservant les volumes) 174; (Axiomes en mécanique des fluides) 186; (Régimes intermédiaires) 186; (Axiome d'incompressibilité) 187.
- Bourgin, D. G. (Fixed points on neighborhood retracts) 389.
- Bouzitat, J. s. S. Vajda 161.
- Bowen, Julius and Paul H. E. Meijer (Ornstein-Uhlenbeck processes) 450.
- Brace, John W. (Topology of almost uniform convergence) 91.
- Bracewell, Ronald N. (edited by) (Paris symposium on radio astronomy) 240.
- Bragard, L. (Condensation ellipsoïdale du relief topographique) 85.
- Brainerd, Barron (Embedding of vector lattices in F -rings) 106; (F-rings of continuous functions. I.) 106.
- Bräuning, Günter s. Karl Bögel 43.
- Bremermann, Hans J. (Charakterisierung Rungescher Gebiete) 59.
- Brenig, W. s. R. Becker 212.
- Brennan, Michael J. (Reply) 368.
- Brenner, J. L. and K. L. Cooke (Hadamard matrices) 9.
- Breny, H. (Problèmes d'analyse statistique. II.) 137.
- Briggs, Lyman J. (Magnus effect for smooth spheres) 187.
- Bröcker, Walter (Kant und die Mathematik) 5.
- Brockmeyer, E., H. L. Halström and Arne Jensen (A.K. Erlang) 343.
- Brodskij (Brodsky), M. S. (Inverse of a problem for systems of linear differential equations) 293.
- (Brodskij), M. S. and M. S. Livšic (Spectral analysis of non-selfadjoint operators) 108.
- Bronfenbrenner, Martin and Thomas Mayer (Liquidity functions) 369.
- Brout, R. and M. Nauenberg (Quantum theory of surface energy) 228.
- Brown, Susannah s. J. R. Ashford 158.
- Brownlee, K. A. (Statistical theory) 349.
- Bruaux, A. (Calcul matriciel) 120.
- Bruck, R. H. (Moufang loops) 249.
- Brudno, A. L. (Methoden der kleinsten Quadrate) 363.
- Bruins, E. M. (Geometry of the plummet) 3.
- Brunk, H. D. (Mathematical statistics) 142.
- Bruzzese, Eugenio (Configurazioni secondarie di equilibrio del tipo flesso-torsionale in travi) 411.
- Buchdahl, H. A. (Trace of energy-momentum tensor) 445.
- Buck, R. C. (Hadamard product theorem) 285.
- Buckingham, A. D. s. A. L. Andrews 225.
- Budak, B. M. (Straight line method for boundary problems) 303.
- — — — and A. D. Gorbunov

- (Cauchy problem for the equation $dy/dx = f(x, y)$) 121.
- Budini, P. (Regular representation of the Lorentz group) 252.
- Bufler, H. (Rollende Reibung) 425.
- Bulmer, M. G. (Confirming statistical hypotheses) 146.
- Bureau, Florent (Représentation asymptotique de la fonction spectrale des opérateurs elliptiques) 80.
- Burgess, C. E. (Chainable continua and indecomposability) 177.
- Bush, Robert R. and William K. Estes (edited by) (Mathematical learning theory) 157.
- Butzer, Paul L. (Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren) 113.
- Buzby, B. and G. Whaples (Quadratic forms over arbitrary fields) 11.
- Cabannes, Henri s. Edmond Bianco 189.
- Cairó, Lorenzo s. Leandro Garbarre 441.
- Calabi, E. (Errata) 308.
- Calapso, Maria Teresa (Trasformazione delle congruenze paraboliche) 379.
- Caldirola, P. (Metodi ergodici nella meccanica statistica) 450.
- Callahan jr., Francis P. (Extremal problem for polynomials) 282.
- Calleja, Pedro Pi s. Pi Calleja, Pedro 271.
- Cansado, E. (Moments and factorial coefficients) 353.
- Capriz, Gianfranco (Instabilità di una trave sollecitata a torsione) 411.
- Caravelli, Vito (Traité des hosphères) 241.
- Cardoso, Jayme Machado (Hundertjahrfeier von Volterra) 242.
- Caricato, Gaetano (Propagazione stazionaria del calore attraverso un involucro) 305.
- Carlitz, L. (Legendre polynomials) 29; (Higher congruence) 266; (Multiplication formulas for products of Bernoulli and Euler polynomials) 280.
- — s. W. A. Al-Salam 28, 45.
- Casimir, H. B. G. s. Paul Ehrenfest 184.
- Castellano, Vittorio (Correlazione e connessione tra due variabili) 362.
- Castillejo, L., I. C. Percival and M. J. Seaton (Elastic collisions) 214.
- Cattabriga, Lamberto (Problema fondamentale di valori al contorno per equazioni paraboliche lineari) 75.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Note storico-bibliografiche) 167.
- Čech, Eduard (Type différentiel d'une courbe) 377.
- Celles, Paul de and Gordon Feldman (Dispersion relations) 219.
- Cellner (Tsellner), V. (Dispersion relations) 220.
- Čeň Čuň-Sjaň (Ch'ên Ch'un-hsien) (Correlation in a many-particle system) 455.
- Čerkesov, L. V. (Wellen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit) 199.
- Černin, K. E. s. I. A. Ibragimov 139.
- Černjavskij, I. Ja. (Multiplikatives Integral) 254.
- Černov (Chernov), A. A. (Kinetic equation for layers) 238.
- Černyšev, K. V. (Statische Deformationen eines hydroakustischen Schallabsorbenten) 200.
- Chadan, Khosrow (Interactions non locales séparables) 446.
- Chakravorti, Amitava (Centre of flexure of a beam) 412.
- Chang, C. T. s. H. W. Emmons 195.
- Li-chien (Triangular association schemes) 151.
- Chaplanov (Haplanov), M. G. (Infinite matrices in an analytic space) 111.
- Charasachal (Kharasakhal), V. Ch. (V. Kh.) (Theorem of Bohr and Neugebauer) 68.
- Charles, Bernard (Intersections de sous-groupes divisibles) 16.
- Chaskind, M. D. (Schiffswiderstand bei Fahrt) 199.
- Čhašminskij (Hasminski), R. Z. (Positive solutions of $\mathfrak{A} + V \cdot u = 0$) 345.
- Chen, Jing-jun (Waring's problem for $g(5)$) 27.
- Yung-Ming (Integrability of power series) 45.
- Von, Li s. Li Chen Von 134.
- Chernoff, Hermann and Lincoln E. Moses (Decision theory) 144.
- Chinitz, Wallace s. Robert A. Gross 199.
- Chisholm, J. S. R. and E. J. Squires (Inclusion of hole-hole scattering in the Brueckner t -matrix) 455.
- Chlypalo, E. I. (Übergangsprozesse in nichtlinearen Systemen) 70.
- Chovanskij (Chovansky), G. S. (Praktische Nomographie) 123; (Nomographic methods for an approximate representation of a function) 124.
- Chowla, S. s. Th. Skolem 267.
- Christeller, Silvio (Wurzeln einer Gleichung 4. Grades) 117.
- Chu, E. L. (Lagrangian and energy-momentum tensors in classical electrodynamics) 201; (Fictitious surface charges) 209.
- Chuard, Jules (Rendement des obligations amortissables) 369.
- Ciesielski, Z. (Inequalities) 37.
- Cimino, Massimo (G. Armellini) 5.
- Čistjakov (Čistyakov), V. P. (Limit theorems for branching processes) 343.
- Cives, G. (Didattica della matematica) 1.
- Cloizeaux, Jacques des (Transition entre états métalliques et application. I.) 231.
- Clunie, J. (Schlicht functions) 52.
- Coleman, C. DeW. s. R. E. Trees 130.
- Connell, E. H. s. R. W. Bagley 176.
- Conner, P. E. and E. E. Floyd (Action of $SO(3)$) 254.
- Constantinescu (Konstantinesku), Corneliu (Corneliu) (Verhalten analytischer Funktionen) 53.
- Conti, Roberto (Matrici e l'equivalenza asintotica dei sistemi differenziali lineari) 297.
- Continuous mortality investigation 164.
- Cooke, J. C. and C. J. Tranter (Dual Fourier-Bessel series) 44.

- Cooke, K. L. s. J. L. Brenner 9.
 Cooper, J. L. B. s. I. S. Iochvidov 108.
 Corduneanu, Alice et Ligia Papuc (Équations différentielles dans l'enseignement secondaire. I, II.) 2.
 — C. (Notion de stabilité) 296.
 Corput, J. G. van der (Coefficients in asymptotic factorial expansions. IV—VII.) 286.
 Corrádi, Keresztély (Konvergenz-Eigenschaften von Potenzreihen) 48.
 Costa, A. Almeida s. Almeida Costa, A. 259.
 — de Beauregard, Oliver (Théorie de l'inertie de D. W. Sciama et de D. Park) 210.
 Cotlar, Mischa and Rafael Panzone (Operators in L^p -spaces) 108.
 Couffignal, L. (Notions de base) 132; (Linear programming computation) 160.
 Court, N. A. (Four intersecting spheres) 372.
 Courtilot, Marcel (Programmation linéaire) 160.
 Cox, C. P. (Orthogonal polynomials) 155.
 Craig, Allen T. s. Robert V. Hogg 144.
 Crane, Lawrence J. (Thermal convection) 194.
 Crawley, Peter (Equivalence of two surfaces) 182.
 Čremošnik, G., A. Frei und M. J. O. Strutt (Impedanznetzwerke) 126.
 Crupi, Giovanni (Onde piane magneto-idrodinamiche) 453.
 (Császár, Á. et J. Czipser (Courbes irrégulières) 388.
 Čudov (Chudov), L. A. (Singularities in the solutions of linear partial differential equations) 73.
 Cun-Sjan, Cen s. Cen Cun-Sjan 455.
 Curtis, Charles W. (Representations of Lie algebras) 253.
 — M. L. (Imbedding theorem) 395.
 — — — and M. K. Fort jr. (Fundamental group of one-dimensional spaces) 388.
 — jr., Philip C. (Order and commutativity in Banach algebras) 106.
 Cutler, Edward H. s. Franklin B. Wells 167.
 Czipser, J. s. Á. Császár 388.
 Čžou, Juj-liú (Randwertprobleme für nichtlineare parabolische Gleichungen) 78.
 Daboni, Luciano (Distribuzioni poissoniane) 349.
 Dalla Volta, Vittorio (Varietà geodetiche nello spazio di Siegel-Hua) 172.
 Damburg, R. und V. Kravčenko (Effektive Querschnitte der Elektronenstreuung an Alkalielementen) 214.
 Danilevskaja, V. I. (Problem über das stationäre Temperaturfeld) 306.
 Danó, S. and E. L. Jensen (Production and inventory planning) 163.
 Dantzig, George B. (Linear programming problems) 161.
 Darbo, Gabriele (Coincidence di mappe ponderate) 390.
 Darsow, W. (Boundedness of trigonometric series) 277.
 Darwin, J. H. (Realizations of a Markoff chain) 345.
 Das, Sisir Chandra (Flow lines in rheological bodies) 420.
 Dašek, Václav (Statik der Rahmenkonstruktionen) 409.
 David, F. N. s. D. E. Barton 158.
 — Herbert T. (Three-sample Kolmogorov-Smirnov test) 149.
 Davidenko, D. F. (Dirichlet's axially symmetrical problem for Laplace's equation) 121.
 Davidson, W. (Number count relations in observational cosmology) 445.
 Davis, Chandler (Subdivision which can not be shelled) 395.
 — Robert B. (Reduction of order theorem) 308.
 Davison, B. (Multilayer problems) 234.
 Day, Mahlon M. (L -space isomorphic to a strictly convex space) 92; (Criteria of Kasahara and Blumenthal) 314.
 Dean, R. G. s. F. Ursell 438.
 Deaux, R. (Équation cubique et triangle) 167.
 Debever, Robert (Tenseur de super-énergie) 210.
 Debrunner, H. s. H. Hadwiger 173.
 Dedebant, G. (Applications de la statistique à la mécanique de l'atmosphère. I, II.) 240.
 Degen, Wendelin s. Martin Barner 171.
 Degroot, Morris H. (Estimating the *MNS* gene frequencies) 158.
 B. N. Delone 5.
 Deltheil, R. et R. Huron (Statistique mathématique) 349.
 Deming, Lola S. (Statistical literature. III.) 337.
 Denčev (Denchev), R. (Spectrum of an operator) 306; (Dirichlet's problem for the wave equation) 306.
 Deny, J. s. A. Beurling 81, 82.
 Derwidé, L. s. Y. Glénisson 329.
 Deser, S., W. Gilbert and E. C. G. Sudarshan (Integral representations of twopoint functions) 447.
 Désirant, M. and J. L. Michiels (edited by) (Solid state physics. Vol. 3.) 238.
 Deutsch, Armin J. (Orbits for planetary satellites) 401.
 — Ralph (Distribution nonlinear circuit transformations of a Markov process) 346.
 Devinatz, A. (Infinitely differentiable positive definite functions) 312.
 — — and I. I. Hirschman jr. (Multiplier transformations on l^2, α) 110.
 Diananda, P. H. (Inequality of H. S. Shapiro) 282.
 Dias Agudo, F. R. (Non symmetric linear differential operators) 66.
 Diaz, J. B. (Bounds for eigenvalues) 122; (Two-dimensional flow at high subsonic speeds) 189.
 Dicman, A. P. (p -Untergruppen) 250.
 Dietrichs, Bruno and Reimut Jochimsen (Long-run development of national income) 369.
 Discussion on the symposium 357.
 Dlin, A. M. (Mathematische Statistik in der Technik) 350.
 Dobbie, James M. (Storage of nuclear weapons) 161.
 Dobrescu-Purice, Lucia (Géométrisation du phénomène de propagation par ondes) 73; (Solutions singulières sur caractéristiques régulières) 302.
 Doetsch, G. (Laplace-Transformation in der Technik. I, II.) 87.
 Doganovskij (Doganovskii), S. A. and A. A. Fel'dbaum (Compensation for strip thickness variation) 336.

- Dolbeault, Pierre (Formes différentielles II.) 380.
- Domar, Yngve (Closed primary ideals) 321.
- Doob, J. L. (Théorie des probabilités) 340.
- Doog, K. Caj s. I. J. Good 133.
- Dorfman, A. Š. (A. Sh.), N. I. Pol'skij (Pol'skii) and P. N. Romanenko (Laminar boundary layer equations for a compressible fluid) 193.
- Dorfwirth, Josef R. (Verkehrsplanung und Mathematik. I.) 161.
- Dormont, Henri (Optique corpusculaire des pincesaux d'axe courbe) 444.
- Do-šin, Sja s. Sja Do-šin 104.
- Dowker, C. H. (Imbedding of metric complexes) 388.
- Drăgălă, P. (Parallélisme de deux surfaces) 378.
- Pavel (Transformations T des congruences de droites) 379.
- Drbohlav, Karel (Gruppenartige Multigruppen) 248.
- Dreicer, H. (Electron velocity distributions) 224; (Electron and ion runaway in a fully ionized gas. II.) 224.
- Dubois, Philippe (Théorie de l'information) 340.
- Dugundji, J. (Absolute neighborhood retracts) 389.
- Dulmage, A. L. Diane Johnson and N. S. Mendelsohn (Orthogonal latin squares) 249.
- Dumitrescu, Lucian (Heat-transfer in free-molecule flows) 430.
- Dummer, K.-F. (Rechnen mit dekadischer Ergänzung) 130.
- Dummett, Michael (Propositional calculus with denumerable matrix) 243.
- Dvořák, Jaroslav (Distribution of stress near openings) 407.
- Dwass, Meyer (Statistics related to empirical distribution functions) 148.
- Dynkin, E. B. (Markovsche Prozesse) 138.
- Dzjalošinskij (Dzjaloshinskii) I. E. and L. P. Pitaevskij (Pitaevskii) (Van der Waals forces) 238.
- Džorbenadze, N. P. (Instationärer Fluß einer zähen Flüssigkeit) 194.
- Ebel, O. s. G. A. Lienert 157.
- Edelfelt, I. H. s. F. G. Gravalos 429.
- Edrei, Albert (Gap and density theorems for entire functions) 50.
- Edwards, R. E. (Simultaneous analytic continuation) 60; (Derivatives of vector-valued functions) 317.
- Eecke, Paul Ver s. Vito Caravelli 241.
- Egervary, J. (Matrices and hypermatrices in engineering analysis) 115.
- Eggers, Klaus (Wellenbild einer pulsierenden Störung) 438.
- Egorov, V. B. (Bonnet's theorem) 401.
- Ehlers, E. s. F. D. Hains 197.
- Ehrenfest, Paul (Scientific papers) 184.
- Ehrhart, E. (Polyèdres rationnels) 28; (Polygones et polyèdres réguliers entiers) 268.
- Ehrmann, Hans (Iterationsverfahren höherer Ordnung) 329; (Iterationsverfahren mit veränderlichen Operatoren) 330.
- Eicker, Friedhelm (Poissonsche Differentialgleichung) 309.
- Éjdel'man (Eidelman), S. D. and F. O. Porper (Solutions of systems parabolic in the sense of G. E. Šilov) 74.
- Ellis, David (Elementary symmetric functions) 10.
- Él'sgol'c, L. É. s. P. S. Alexandroff 243.
- Elveback, Lila (Estimation of survivorship in chronic disease) 159.
- Emery, A. s. R. A. Seban 196.
- Emmens, C. W. (Statistics in physiological research) 365.
- Emmons, H. W., C. T. Chang and B. C. Watson (Taylor instability of finite surface waves) 195.
- — — s. F. G. Gravalos 429.
- Endl, Kurt (Dirichletsches Problem auf den Greenschen Linien) 82.
- Engeli, M., Th. Ginsburg, H. Rutishauser and E. Stiefel (Self-adjoint boundary value problems) 121.
- Englman, R. (Temperature waves in insulators) 224.
- F. Enriques 5.
- Entwicklung der angewandten Mathematik. 1.
- Epstein, Bernard and I. J. Schoenberg (Schlicht functions) 51.
- Erdős, Paul and Alfréd Rényi (Singular radii of power series) 49.
- Eriksson, Karl-Erik (Time-energy distribution of slowed-down neutrons) 234.
- Estes, William K. s. Robert R. Bush 157.
- Evans, William T. (Exact airfoil theory) 428.
- Eweida, M. T. (Three-point expansions) 283.
- Ezawa, Hiroshi and Hiroomi Umezawa (Green's functions for elementary particles) 220.
- Fabian, Václav (Measures the values of which are classes of equivalent measurable functions) 337.
- Faedo, Sandro (Principio di esistenza nell'analisi lineare) 315.
- Fajnberg (Fainberg), V. Ja. (V. Ya.) (Analytic properties of causal commutators) 447.
- Falgas, Maurice (Séries de base de polynômes) 48.
- Falk, David S. (Green's function approximation method. I, II.) 226.
- Farzetdinov, M. M. (Equation of weak convection) 435.
- Fáy, Gy., I. Fényes and R. Törös (Quantenmechanisch mögliche Zustände) 212.
- Fay, James A. (Gaseous detonations) 437.
- Fazekas, Francis (Tensions dans la chaîne d'isolateur) 440.
- Federer, Herbert (Curvature measures) 384.
- L. Fejér. 5.
- Fekete, Michael (Polynomials of least deviation) 47.
- Fel'dbaum, A. A. (Rechenvorrichtungen in automatischen Systemen) 129.
- — — s. S. A. Doganovskij 336.
- Feldman, Gordon s. Paul de Celles 219.
- J. (Gaussian processes) 135.
- Félici, Noel J. (Lentilles électrostatiques) 443.
- Fempl, S. (Reihen) 38.
- Fényes, I. s. Gy. Fáy 212.

- Fenyő, István (Laplace-transformation in probability theory) 348.
- Féraud, Lucien (Fondements de l'actuariat) 164.
- Ferguson, Thomas S. (Best asymptotically normal estimates) 154.
- Ferrari, Italo (Campo di un filo percorso da corrente alternata) 440.
- Ferraro, V. (Theory of plasma) 452.
- Fichera, Gaetano (L. Fantappiè) 5.
- Fichtengol'c, G. M. s. O. A. Ladyženskaja 243.
- Fiedler, Miroslav (Metrische Geometrie der Simplexe in euklidischen Räumen) 167.
- Filippov, A. F. (Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen) 291.
- Fine, N. J. and R. Harrop (Uniformization of linear arrays) 245.
- Finelli, J. J. (Installing electronic procedures) 165.
- Finsler, P. (Näherungskonstruktionen für den Kreisumfang) 372.
- Fischer, Johannes (Projektiv-verzerrte Netze) 124.
- Fitzhugh, R. and H. A. Antosiewicz (Automatic computation of nerve excitation) 157.
- Fixman, Uri (Problems in spectral operators) 321.
- Fletcher, John George (Local conservation laws) 445.
- Floyd, E. E. s. P. E. Conner 254.
- Focke, Joachim (Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Sprungfunktionen) 293.
- Foguel, Shaul R. (Theorem by A. E. Taylor) 90.
- Foias, Ciprian s. Béla Sz.-Nagy 108.
- Foldy, Leslie L., Kenneth W. Ford and Donald R. Yennie (Elastic scattering of high-energy electrons) 215.
- Ford, F. A. J. (Paper of Miller, Bernstein and Blumenson) 348.
- Kenneth W. s. Leslie L. Foldy 215.
- jr., L. R. (Ranking problem from binary comparisons) 153.
- Förstner, Karl und Rudolf Henn (Dynamische Produktions-Theorie) 162.
- Fort jr., M. K. s. M. L. Curtis 388.
- Fotheringham, J. A. and M. de V. Roberts (Ferranti Mercury computer) 125.
- Fourès-Bruhat, Yvonne (Problème des conditions initiales) 444.
- Fourgeaud, C. et A. Nataf (Consummation en prix et revenu) 369.
- Franckx, Ed. (Surfaces réglées gauches) 378.
- Franz, W. (Beugung elektromagnetischer Wellen) 205; (Elektronenbeweglichkeit in Halbleitern) 223.
- Fréchet, M. (Espace des courbes) 314; (Tableaux de corrélation) 360.
- Frei, A. s. G. Čremošnik 126.
- Frenkian, Aram (Mathématiques suméro-akkadiennes, égyptiennes et grecques. III.) 3.
- Freud, G. (Propagation de la chaleur) 77.
- Fridlender, V. R. (Cauchy-Kowalewskisches Problem) 72.
- Herbert M. (Structure theorem for photon propagator) 219.
- Friedman, Avner (Free boundary problems for parabolic equations. I.) 78.
- Friedrichs, K. O., H. N. Shapiro et al (Integration of functionals) 316.
- Fröberg, Carl-Erik (Wilson and Fermat remainders) 29.
- Frössling, N. (Thermal laminar boundary layers) 432.
- Fruchter, Benjamin and Edwin Novak (Three methods of rotation) 155.
- Fulda, S. s. M. E. Sherry 336.
- Furry, W. H. and N. F. Ramsey (Significance of potentials in quantum theory) 446.
- Gabarro, Leandro et Lorenzo Cairó (Ondes électromagnétiques dans un plasma) 441.
- Gabriel, K. R. (Successes in a sequence of dependent trials) 347.
- Gadd, George E. (Normal shock waves on a body with convex surfaces) 190.
- Gagliardo, Emilio (Funzioni in più variabili) 94.
- Gajewski, Ryszard (Transient radiation of a dipole. II.) 441.
- Galanin, A. D. (Kernreaktoren mit thermischen Neutronen) 233.
- Galasiewicz, Zygmunt (Problem of subsidiary condition) 232.
- Galer, G. S. (Computers for economic planning) 162.
- Gallant, H. (Gitterkorrektur) 200.
- Gal'perin, I. M. (arg $f'(z)$ einer p -wertigen Sternfunktion) 52.
- Ganzburg, I. M. (Results obtained by S. M. Nikolsky and A. F. Timan) 276.
- Garnier, René (Mathématiques générales. IV.) 62.
- Garsia, Adriano (Surfaces with a rectilinear geodesic circle) 379.
- Garstang, R. H. (Quadrupole line strengths) 235.
- Gary, John (Higher dimensional cyclic elements) 388.
- Gasiorowicz, S. G., D. R. Yennie and H. Suura (Magnitude of renormalization constants) 217.
- Gatteschi, Luigi (Serie involupanti) 46.
- Geffroy, Jean (Théorème de M. Paul Lévy) 139.
- Gehring, F. W. and A. J. Lohwater (Lindelöf theorem) 53.
- Geisser, Seymour (Testing treatment effects in the presence of learning) 365.
- Gel'fond, A. O. (Approximation von algebraischen Zahlen durch rationale) 269.
- Geppert, F. (Programmierung von Digital-Rechenautomaten) 125.
- Gerard, Geofge (Plastic stability theory of thin shells) 421.
- Harold B. and Harold N. Shapiro (Degree of inconsistency in a set of paired comparisons) 364.
- Gerber, Sébastien et Pierre Pilod (Application de la cuve rhéographique) 201.
- Gericke, Helmuth (Situation der Mathematik) 1.
- Germain, P., C. Schmelzer, W. Schnell and A. Susini (Special function generator) 443.
- Geronimus (Heronimus), Ja. L. (J. L.) (Töplitz forms and orthogonal polynomials) 275.
- Gersten, Klaus (Geschwindigkeitsfeld von Tragflügeln) 427.

- Ghika, Al. (Algèbres de transformations d'un espace Hilbertien) 321.
- Ghinea, Monique s. Daniel Pham 116.
- Giambiagi, J. J. (Analogy between Lorentz and Foldy-Wouthuysen transformation) 214.
- Gibson, R. O. and J. G. Semple (Cayley models of homaloidal curve-systems) 376.
- Gilbert, Edgar J. (Identifiability problem) 345.
- W. s. S. Deser 447.
- Gill, S. (Automatic programming) 125.
- Gillespie, Evan L. s. Henry L. Alder 337.
- Ginevskij (Ginevskii), A. S. and E. E. Solodkin (Lateral surface curvature on axially-symmetric turbulent boundary layers) 196.
- Gini, Corrado (Medie di serie) 363.
- Ginsburg, Th. s. M. Engeli 121.
- Girault, Maurice (Processus aléatoires) 137.
- Glénisson, Y. et L. Derwidué (Zéros des polynômes) 329.
- Glicksberg, Irving (Transformation groups) 254; (Stone-Čech compactifications of products) 387.
- s. Karel de Leeuw 327.
- Gluskin, L. M. (Transitive semigroups of transformations) 19.
- Gluško (Glushko), V. P. and S. G. Krejn (Krein) (Fractional powers of differential operators) 325.
- Gochberg (Gohberg), I. C. and M. G. Krejn (Krein) (Basic propositions on defect numbers) 322.
- (Gokhberg), I. C. (I. Ts.) and M. G. Krejn (Krein) (Completely continuous operators) 323.
- Godeaux, Lucien (Surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro) 375; (Surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls) 375; (Surfaces algébriques de genres nuls) 376.
- Gol'cov (Goltsov), N. A. (Functional series in deducing formulas) 120.
- Goldberg, J. N. (Conservation laws in general relativity) 209.
- K. (Submatrices of a non-negative matrix) 8; (Random notes on matrices) 9.
- Golden, Sidney (Statistical theory of many-electron systems) 232.
- Goldstein, Louis (Theory of liquid and solid He³) 227.
- S. and J. D. Murray (Exchange processes in fixed columns. III—V.) 431.
- Golinskij, B. L. (Summierung der Fourier-Cebyšev-Reihen) 43.
- Golubiew, W. (Twin numbers) 267.
- Gonçalves, J. Vicente (Historiae ac pedagogiae de minutiis. XXV.) 38.
- Gonor, A. L. (Kopfwelle bei Umströmung eines zugespitzten Körpers) 429.
- Gonseth, F. s. W. Scherrer 243.
- Good, I. J. and K. Caj Doog (Paradox concerning rate of information) 133.
- Goodman, Leo A. (Simplified runs tests) 153; (Statistical tests for Markov chains) 355; (Stepanov's tests for Markov chains) 355.
- Gorbunov, A. D. s. B. M. Budak 121.
- Gorenstein, Daniel (Frobenius groups) 15.
- and I. N. Herstein (Solvable groups) 15.
- Górski, J. (Suites de points extrémaux liés aux ensembles) 83.
- Gorup, G. v. (Den Hankelschen Zylinderfunktionen verwandtes Integral) 336.
- Gouarné, René (Méthode des cycles) 329.
- Gould, A. H. (Operational research) 161.
- , H. W. (Paper of Steinberg) 8.
- Gourdin, M. and J. Tran Thanh Van (Relativistic deuteron wave function. I.) 215.
- Granas, A. (Theorem on antipodes and theorems on fixed points) 112.
- and J. W. Jaworowski (Multi-valued mappings of subsets of the Euclidean space) 179.
- Grätzer, G. and E. T. Schmidt (Lattice-congruences) 256.
- Grauert, Hans und Reinhold Remmert (Bilder und Urbilder analytischer Garben) 60.
- Gravalos, F. G., I. H. Edelfelt and H. W. Emmons (Supersonic flow about a blunt body) 429.
- Graves, Lawrence M. (Lemma of Haar) 86.
- Gray, Glenn A. (Multivelocité electron streams) 207.
- Grebensčikov, V. N. (Mehrpole Kontakt-Ventilschaltungen) 334.
- Green, J. s. J. W. Backus 125.
- Melville S. (Paper of Mori) 452.
- Greenberg, B. G. and A. E. Sarhan (Matrix inversion) 156.
- Greenwald, Irwin D. (Handling macro instructions) 125.
- Gregg, J. L. s. E. M. Sparrow 194.
- Greguš, Michal (Randwertprobleme der Differentialgleichung dritter Ordnung) 294.
- Gribov, V. N. (Vertex part meson theory) 217.
- Griffith, James L. (Finite Fourier transforms) 311.
- Grigoljuk, É. I. (Tangentialmodulbelastung kreiszylindrischer Schalen) 415.
- Grioli, Giuseppe (Stato tensionale dei continui in equilibrio) 407.
- Gross, Robert A. and Wallace Chinitz (Supersonic combustion) 199.
- Grossman, Howard D. (Fun with lattice points) 8.
- Grötzsch, Herbert (Diskrete Gebilde. II—XII.) 395.
- Gruber, Boris (Theory of dislocations) 236.
- Grzegorzczak, Andrzej (Entscheidbarkeitsprobleme) 246.
- Gschwind, Max s. George A. W. Boehm 2.
- Guggenheimer, H. (Complexes avec automorphismes non admissibles) 382; (Variétés riemanniennes. I.) 382.
- Guilloud, J. s. J. Bass 115.
- Guiraud, Jean-Pierre (Notion d'équilibre thermodynamique) 221.
- Gumbel, E. J. (Statistical theory of extreme values) 360.
- Gumerov, Š. A. (Hamilton-Jacobische Methode für nichtholonome konservative Systeme) 398.
- Günzler, Hans (Satz von Hahn und Banach) 90.
- Gurland, John (Inequality satisfied by the gamma function) 282.
- Guttman, Irwin s. Om. P. Aggarwal 148.
- — (Optimum tolerance regions and power) 153.

- Haber, Seymour and Azriel Rosenfeld (Groups as unions of proper subgroups) 14.
- Hacques, Gérard (Écoulement d'un fluide conducteur) 198.
- Hadwiger, H. und H. Debrunner (Kombinatorische Geometrie) 173.
- Hafer, Xaver (Aerodynamik der Flügel-Rumpf-Anordnungen) 427.
- Haimovici, Adolf (Méthode de Fourier) 112.
- Hains, F. D. and Y. A. Yoler (Axi-symmetric, magnetogas dynamic channel flow) 197.
- — — — — and E. Ehlers (Axi-symmetric hydromagnetic channel flow). 197.
- Halanay (Chalanaj), A. (Differentialgleichungen mit retardiertem Argument) 300.
- Aristide (Systèmes linéaires à argument retardé) 301; (Équations différentielles linéaires à argument retardé) 301.
- Halbwachs, F. (Relativistic motion of a free rotating particle) 212.
- Haley, K. B. s. K. B. Williams 367.
- Halperin, Israel (Discontinuous functions with the Darboux property) 34.
- Halpern, Edward (Primitivity of Hopf algebras) 392.
- Halphen, Étienne (Analyse intrinsèque des distributions de probabilité) 155.
- Halström, H. L. s. E. Brockmeyer 343.
- Hannan, E. J. (Spectral density after trend removal) 155; (Testing for serial correlation) 360.
- Hanneken, C. B. (Irreducible congruences over $GF(p)$) 266.
- Hanš, Otto (Random variables) 339.
- Harary, Frank (Exponentiation of permutation groups) 16.
- Harris, Bruno (Centralizers in Jordan algebras) 21.
- Harrop, R. s. N. J. Fine 245.
- Hart, William L. and Theodore S. Motzkin (Fundamental theorem on implicit functions) 36.
- Hartmanis, Juris (Lattice of geometries) 370; (Lattice theory of generalized partitions) 370.
- Hasimoto, Hidenori (Viscous flow of a perfectly conducting fluid) 437.
- Havas, Peter (Multipole singularities of classical vector fields) 446.
- Havel, Václav (Staudtscher Satz) 370.
- Head, A. K. (Two-mirror aplanat) 442.
- Hecht, F. (Schriftleiter) (IXth International Astronautical Congress Amsterdam 1958. I, II.) 400.
- Heinrich (Schaltschemata und Differentialgleichungen) 202.
- Hequet, J. et V. Thébault (Sphères adjointes d'un tétraèdre) 167.
- Heffter, Lothar (Begründung der Funktionentheorie) 47.
- Heine, Volker (Group theory in quantum mechanics) 185.
- Heins, Maurice (Conformal mapping of Riemann surface. II.) 56.
- Helfand, Eugene (Transport coefficients from dissipation in a canonical ensemble) 451.
- Hemelrijk, Jan (Distribution-free tests against trend) 354.
- Henn, Rudolf s. Karl Förstner 162.
- Henze, Alfred (Ausbildung von Industriemathematikern) 1.
- Herlach, Fritz s. W. Pauli 211.
- Hermann, Rudolf (Hypersonic flight) 430.
- Herpin, André (Propagation des neutrons) 232.
- Herstein, I. N. (Finite groups) 16.
- — — s. Daniel Gorenstein 15.
- Heuser, Harro (Spectral theory of symmetric finite operators) 324.
- Hewitt, Edwin (Abstract harmonic analysis) 108.
- — s. A. A. Markov 247.
- Heyda, James F. (Hyperbolic equation with constant coefficients) 301.
- Heyting, A. (Blick von der intuitionistischen Warte) 245.
- Hickerson, T. F. (Intersection of straight line with spiral) 118.
- Higman, Graham (Varieties of groups) 13.
- Hille, Einar (Systèmes des équations différentielles linéaires) 65.
- Hintikka, K. Jaakko J. (Vicious circle principle) 244.
- Hirata, Kazuhiko (Relative homological algebra of Frobenius extensions) 22.
- Hirokawa, Hiroshi (Remarks on "uniform convergence of trigonometrical series") 278.
- Hirschfeld, R. A. (Best approximations in normed vector spaces. I, II.) 314.
- Hirschfelder, Joseph O. (Diffusion coefficients in flames and detonations) 198.
- Hirschman jr., I. I. (Maximal problem in harmonic analysis. II.) 110.
- — — — s. A. Devinatz 110.
- Hodge jr., Philip G. (Yield point load of an annular plate) 415.
- Hoffenberg, Marvin s. Kenneth J. Arrow 162.
- Hoffman jr., Stephen P. s. M. S. Brodskij 108.
- — — s. M. S. Livšic 108.
- Hofmann, Joseph E. (Sechsquadratproblem) 241.
- Hogben, Lancelot (Statistical theory) 142.
- Hogg, Robert V. and Allen T. Craig (Mathematical statistics) 144.
- Holstein, T. D. s. E. N. Adams 222.
- Hooykaas, R. (C. de Waard) 243.
- Hori, Jun-ichi (Vibration of disordered linear lattice. III.) 235.
- Horne jr., J. G. (Ideal structure of certain semirings) 105; (Multiplications on the line) 254.
- Hornecker, Georges (Approximations rationnelles) 42.
- Hornick, S. D. (IBM 709 tape matrix compiler) 331.
- Householder, Alston S. (Dandelin, Lobačevskii or Gracffe?) 242.
- — — — and Friedrich L. Bauer (Expanding the characteristic polynomial) 118.
- Houthakker, H. S. (Capacity method of quadratic programming) 160.
- Howarth, L. s. K. Stewartson 191.
- Howells, I. D. (Multiple scattering of waves) 225.
- Hu, Sze-Tsen (Fibre spaces with cross-sections) 179.
- Huber, Heinz (Analytische Theorie hyperbolischer Raumformen) 61.
- Hughenoltz, N. M. and D. Pines (Ground-state energy

- and excitation spectrum of interacting bosons) 227.
- Hull, T. E. and W. A. J. Luxemburg (Numerical methods and existence theorems for ordinary differential equations) 290.
- Hunter, Robert P. and Paul M. Swingle (Indecomposable trajectories) 177.
- Hunziker, Paul R. (Heat transfer and Reynold's analogy in a turbulent flow) 195.
- Huron, R. s. R. Deltheil 349.
- Hutcherson, W. R. s. J. C. Morelock 169.
- Huybrechts, M. (Tangente à la trajectoire d'une particule chargée) 235.
- Ibragimov, I. A. and K. E. Černin (Unimodality of stable laws) 139.
- Idlis, G. M. (Phase density of finite stationary axially symmetric self-gravitating stellar systems) 239.
- Ignaczak, Józef (Thermal displacements in an elastic semi-space) 418.
- Imamura, Tsutomu s. Keizo Kobayakawa 220.
- Ince, Simon s. Hunter Rouse 200.
- Ingleton, A. W. (Independence functions and rank) 18.
- Inglis, D. R. (Nuclear moments of inertia and effective nucleon mass) 456.
- Inoue, Yoshiro (Cohomology operations) 177.
- Iochvidov (Iohvidov), I. S. and M. G. Krejn (Krein) (Spectral theory of operators. I.) 108.
- Ionescu, D. V. (Forme canonique d'un déterminant) 8; (Réduction d'une forme bilinéaire) 11.
- Iordanskij (Iordanskii), S. V. (Asymptotics of an axially symmetric diverging wave) 199.
- Iosifescu, Marius (Integration des différentielles binômes) 37; (Fonctions continues) 274.
- Isay, W.-H. (Nahe der Wasseroberfläche fahrende Tragflächen) 428.
- Iséki, Kiyoshi (Locally bounded functions) 176.
- Ishihara, Shigeru (Holomorphic planes) 173.
- Iswata, Takesi (Locally Q -complete spaces. I, II.) 317; (Ring homomorphisms. I, II.) 318; (Normality of product space) 387.
- Itô, Jun-iti (Subharmonic and analytic functions) 83.
- Takasi (Commutative family of subnormal operators) 323.
- Ivanov, Ju. A. (Iu. A.) (Frontal zones in Antarctica) 240.
- Ivanova, L. S. (Impact of a liquid on the wall of container) 428.
- Ivlev, D. D. (Elastic-plastic problems) 421; (Small elastic-plastic deformations) 421.
- Iwano, Masahiro (Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires. I, II.) 291.
- Iwasawa, Kenkichi (I' -extensions of algebraic number fields) 24.
- Iyer, P. V. Krishna s. Krishna Iyer, P. V. 155.
- Jablonskij (Iablonsky), S. V. (Impossibility to eliminate the trial of all functions) 129.
- Jackson, H. L. W. s. G. Power 202.
- J. Edward (Bibliography on sequential analysis) 144.
- Jacob, M. (Coordonnées polaires tangentielles) 168.
- Jacobs, Konrad (Übertragung diskreter Informationen) 339.
- Jaglom, A. M. s. A. M. Obuchov 196.
- Jakovkin, M. V. (Rechenta-feln) 336.
- James, I. M. (Homotopy groups of Stiefel manifolds) 393; (Cross-sections of Stiefel manifolds) 393; (Spaces associated with Stiefel manifolds) 394.
- Jankovič, Z. (Inelastic scattering) 232.
- Jappa, Ju. A. (Yu. A.) (Functionals in the quantum field theory) 446.
- Jarmai, L. and E. Szereday (Buckling of connected parallel beams) 412.
- Javor, S. Ja. s. V. M. Kel'man 208.
- Jaworowski, J. W. s. A. Granas 179.
- Jenkins, G. M. and M. B. Priestley (Spectral analysis of time-series) 356.
- Jensen, Anton (Homotopy structure of coverings) 179.
- Jensen, Arne s. E. Brockmeyer 343.
- E. L. s. S. Danö 163.
- Jilek, M. and O. Liška (Table of random sample sizes) 149.
- Jindra, F. (Nichtlineare Torsion) 412.
- Jiřina (Iržina), Miloslav (Branching stochastic processes) 341.
- Jochimsen, Reimut s. Bruno Dietrichs 369.
- Johnson, Diane s. A. L. Dulmage 249.
- Jonas, P. (Zentripetalturbine für kompressible Medien) 438.
- Jones, D. S. and G. B. Whitham (High-frequency scattering) 205.
- Howard L. (Selecting a particular sample) 352.
- Jonscher, A. K. (Semiconductor device operation) 452.
- Joos, Hans (Unitary representations of Lorentz group) 216; (Canonical field quantization) 447.
- Josephson jr., B. s. K. W. H. Stevens 213.
- Jung, Richard (Strahlgebläse) 200.
- Jurchescu, Martin (Theorem of Stoilow) 60.
- Kac (Kats), I. S. (Behaviour of spectral functions) 66.
- M. and Harry Kesten (Rapidly mixing transformations) 111.
- Mark and David Slepian (Large excursions of Gaussian processes) 341.
- Kaliski, S. and J. Petykiewicz (Dynamical equations of motion) 407.
- Sylvester (Orthotropic elastic and anelastic semi-space) 417.
- Kaminisi, Keisuke (Electron degeneracy in the stellar interior) 240.
- Kan, Daniel M. (Homotopy relation for c. s. s. maps) 391; (C. s. s. categories) 391.
- Kanwal, Ram Prakash (Motion of a circular disk) 192.
- Kaphengst, Heinz (Abstrakte programmgesteuerte Rechenmaschine) 331.
- Kaplan, E. L. and Paul Meier (Nonparametric estimation from incomplete observations) 148.

- Kaplansky (Kaplanskij), Irving (I.) (Differential algebra) 23.
- Kargapolov, M. I. (Z-groups) 13.
- Karinskij, S. Ju. s. I. D. Moljukov 417.
- Karlin, S., R. G. Miller jr. and N. U. Prabhu (Moving single server problem) 136.
- Karmišin, A. V. (Systeme fünggliedriger algebraischer Gleichungen) 117.
- Karpova, N. A. (Contact schemes for monotonic functions) 129.
- Karrass, A. and D. Solitar (Free products) 13.
- Kasper, John S. and Kathleen Lonsdale (edited by) (Tables for X-ray crystallography. II.) 237.
- Kastenbaum, Marvin A. and Donald E. Lamphiear (No three-factor interaction hypothesis) 154.
- Katayama, Miyoko (Fourier series. VII, XIII.) 278.
- Kato, Tosio (Perturbations of self-adjoint operators) 324.
- Katz, C. s. J. W. Backus 125.
- Kawasaki, Kyozi (Entropy concept in statistical mechanics) 450.
- Kawata, T. (Convergence theorems for stationary stochastic processes) 135.
- Kelley, J. L. (Hypercomplete linear topological spaces) 90.
- Kel'man, V. M. und S. Ja. Javor (Elektronenoptik) 208.
- Kemeny, John G. and J. Laurie Snell (Finite Markov chains) 137.
- Kemperman, J. H. B. (Kolmogorov-Smirnov distributions) 349.
- Kendall, David G. (Birth-and-death processes) 366.
- — — s. D. Vere-Jones 139.
- Kennedy, E. S. (Birüni's determination of the local meridian) 4.
- H. (Aristotelian definition of mathematics) 1.
- Kervaire, Michel A. (Fibré normal à une sphère immergée) 182.
- Kesten, Harry s. M. Kac 111.
- Kestin, Joseph, Wolfgang Leidenfrost and C. Y. Liu (Viscosity of gases) 192.
- Khinchin, A. Y. (Mathematical foundations of quantum statistics) 450.
- Kiesow, Horst (Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie) 131.
- Kimura, Naoki (Existence theorems on multiplicative systems. I. II.) 18.
- Kiržnic (Kirzhnits), D. A. (Quasi-classical equation of state of matter) 228.
- Kiss, E. (Fautes dans les recueils d'exercices d'analyse mathématique) 2.
- Ernest (Equation diophantienne) 26.
- Kister, James (Small isotopies in euclidean spaces) 395.
- Kitao, Kazuo (Energy loss and radiation of a gyrating charged particle) 454.
- Klamkin, M. S. and D. J. Newman (Distinct zeros of polynomials) 10.
- Klee jr., V. L. and R. G. Long (Method of mapping due to Kadec and Bernstein) 314.
- Klein, Martin J. s. Paul Ehrenfest 184.
- Kleitman, D. (Parity of K -baryon vertices) 449.
- Klejnerman, G. I. s. Irving Kaplansky 23.
- Klepikov, N. P. and S. N. Sokolov (Non-linear confluence analysis) 363.
- Klinken, J. van (Applications of tests) 164.
- Kljušnikov, V. D. (Stabilität von Platten) 415; (Deviatoren in der Theorie der kleinen elastoplastischen Deformationen) 420.
- Knapecz, Géza (Schwache affine Erhaltungssätze der Multimomente) 209.
- Knobloch, Hans-Wilhelm (Konvergente und asymptotische Entwicklungen bei Lösungen linearer Differentialsysteme) 292.
- Knoepfel, Heinz E. s. W. Pauli 211.
- Knox, Robert S. (Exciton states) 229.
- Knuth, Donald E. (Runcible, algebraic translation on a limited computer) 126.
- Koba, Z. (Multiple particle production) 449.
- Kobayakawa, Keizo and Tsutomu Imamura (Multiple meson production) 220.
- Koga, T. s. L. Talbot 190.
- Kogalovskij (Kogalovsky), S. R. (Universal classes of algebras) 246; (Universal classes of models) 246.
- Koizumi, Sumiyuki (Fractional integration) 37.
- Kolar, Vaclav (Turbulence in spiral flow) 195.
- Kollath, Rudolf (Teilchenbeschleuniger) 207.
- Koman, Milan (Topologische K -Lineale) 313.
- Komatu, Yūsaku (Convolution of power series) 284; (Convolution of Laurent series) 284.
- König, Heinz und Josef Meixner (Lineare Systeme und Transformationen) 93.
- Konijn, H. S. (Dependence of two random variables) 155.
- Kooistra, R. (Ungleichungen) 373.
- Kooy, J. M. J. (Orbital computations of a space rocket) 400.
- Korenblit, L. L. s. A. G. Samojlovič 238.
- Korickij (Koritsky), G. V. (Curvature of "level curves" in schlicht conformal mappings) 289.
- Korobejnik (Korobeinik), Ju. F. (Yu. F.) (Equations of infinite order with polynomial coefficients) 65; (Analytische Lösungen einer Gleichung unendlicher Ordnung) 292.
- Korobov, N. M. (Approximate evaluation of repeated integrals) 42; (Approximate solution of integral equations) 42.
- Korolev L. N. (Circuit switching function) 128.
- Kostovskij, A. N. (Konstruktionen mit dem Zirkel) 372.
- Kostrikin, A. I. (Burnsidesches Problem) 14.
- Kotljär, Ja. M. (Luftaufhängungen sphärischen Typus) 435.
- Kóvacs, C. (Fondements de la géométrie) 165.
- Kövari, T. (Gap-theorem of Pólya) 49.
- Kozlov, Ju. M. (Folgesysteme mit Selbstausgleichsparametern) 130.
- Krajňáková, Dorota s. Štefan Schwarz 11.
- Král, Josef (Curvilinear integrals in the plane) 272.
- Krasinski, J. E. de (Boundary layer separation on swept wings and stall) 432.
- Krasner, Marc (Algèbres cylindriques) 18.
- Krasnosel'skij, M. A. and E. I.

- Pustyl'nik (Fractional powers of operators) 326.
- Krasovskij (Krasovskii), N. N. (Conditions for optimization) 334.
- Kravčenko, V. s. R. Damburg 214.
- Krein (Krein), M. G. and G. E. Šilov (Šilov) (M. A. Najmark) 243.
- M. G. s. I. C. Gochberg 322, 323.
- — — s. I. S. Iochvidov 108.
- (Krein), S. G. (Interpolation theorem) 322.
- S. G. s. V. P. Gluško 325.
- Krishna Iyer, P. V. (Theorem on factorial moments) 155.
- Krishnamurthy, V. (Zeros of entire functions) 50.
- Krňan, František (Totally non-commutative bicomact semigroups) 12.
- Krylov, V. I. (Cotes' quadrature formula) 276.
- Kuhn, P. (Problem in der Theorie der Primzahlen) 267.
- Kühnau, Reiner (Extremalfunktion der konformen Abbildung) 289.
- Kukles, I. S. (Singuläre Punkte gewisser Differentialgleichungen) 63.
- Kumar, Ram (Infinite series expansions) 281.
- Kümmel, H. (Bruecknersche Theorie) 226.
- Kuntzmann, Jean s. Edmond Bianco 189.
- Kuramochi, Zenjiro (Ideal boundaries of abstract Riemann surfaces) 54; (Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces. III.) 54; (Harmonic functions) 56.
- Kuratowski, K. (Fonction rationnelle) 389.
- Kurčakov (Kurchakov), A. V. (Optical properties of atmosphere and surface of Mars) 240.
- Kurepa, G. (Reciprocity, distribution and duality law) 270.
- Svetozar ((F) -differentiable functions) 114; (Invariant of a matrix) 115.
- Kurita, Minoru (Volume in homogeneous spaces) 385.
- Kurlat, S. and M. D. Springer (Reliability of an antitank-mine simulator system) 161.
- Kuttner, B. (Quasi-Hausdorff transformation) 39.
- Kuzmak, G. E. (Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations) 298.
- Kuznecov (Kuznetsov) L. I. (Movement of a gyroscope in a resisting medium) 401; (How to count amplitudes) 402.
- L'Abbé, Maurice (Structures algébriques suggérées par la logique mathématique) 18.
- Labosne, A. s. Claude-Gaspar Bachet 4.
- Lacombe, Daniel (Procédés de définition en topologie récursive) 7.
- Ladyženskaja O. A. and G. M. Fichtengol'c (V. I. Smirnov) 243.
- Laha, R. G. (Laws of Cauchy and Gauss) 140.
- Lambek, J. and L. Moser (Classifications of integers) 266.
- Lambert, François (Problèmes d'attente) 136.
- Lamens, A. (Processus non homogène de naissance et de mort) 159.
- Lamphiear, Donald E. s. Marvin A. Kastenbaum 154.
- Landau, H. G., J. H. Weiner and E. E. Zwicky jr. (Thermal stress in a viscoelastic-plastic plate) 422.
- Landis, E. M. (Länge einer Kurve) 34; (Growth of the solution of an elliptical equation) 76; (Growth of the solution of a parabolic equation) 77.
- Lang, Serge (Unramified class field theory) 262; (Séries L d'une variété algébrique) 263; (Lefschetz principle) 264.
- — et Jean-Pierre Serre (Revetements non ramifiés des variétés algébriques) 264.
- Langenhop, C. E. (Almost periodic solutions of non-linear differential equations) 298.
- Langhaar, H. L. (Number of dimensionless variables) 185.
- Lapidus, I. Richard and Jerry L. Pietenpol (Classical interaction of an electric charge) 207.
- Läuchli, P. (Tschebyscheff-Ausgleichung) 330.
- Laurent, B. E. (Variational principle and conservation theorems) 215.
- Lavrent'ev (Lavrentiev), M. A. and B. V. Šabat (Šabat) (Geometric properties of solutions of non-linear systems) 290.
- — — s. J. J. Stoker 199.
- Lavruk, B. R. (Boundary problem operator for an elliptical system) 307; (Operator in a boundary problem for an elliptical system) 307; (Boundary problem for an elliptical type of systems) 308.
- Lawton, B. (Well distributed sequences) 269.
- Laybourn, K. (Training of teachers) 1.
- Layton, J. M. (Eddy currents in cores) 202.
- Le Roy, Henri Louis (Populationsgenetik) 156.
- Lebedev, A. N. (Analogrechengeräte) 126.
- Lebowitz, J. L. (Gibbsian ensembles) 222.
- Lech, Christer (Associativity formula for multiplicities) 260.
- Lee, T. D. and C. N. Yang (Many-body problem in quantum statistical mechanics. II.) 227.
- Leeuw, Karel de and Irving Glicksberg (Almost periodic compactifications) 327.
- Legendre, Robert (Analogie hydraulique pour des écoulements hypersoniques) 190.
- Lehmann, E. L. (Testing statistical hypotheses) 141.
- Leibfried, G. s. R. Becker 212.
- Leibowitz, Martin L. and Gerald J. Lieberman (Heterogeneous local air-defence system) 161.
- Leichtweiss, Kurt (Affine Exzentrizität konvexer Körper) 383.
- Leidenfrost, Wolfgang s. Joseph Kestin 192.
- Leja, F. (Suites liées aux ensembles plans) 83.
- Lenhard, H.-Chr. (Zerlegung von Tetraedern) 373.
- Leslie, Joshua (Modules simpliciaux sur une algèbre simpliciale) 22.
- P. H. (Stochastic model for studying biological systems) 158.
- Levič, V. G. (Physikalisch-chemische Hydrodynamik) 430.

- Levine, Norman (Anticenter of a group) 249.
- — s. William J. Pervin 175.
- Lévy, A. (Definitions of finiteness) 7.
- — s. R. A. Seban 196.
- Lewandowski, Zdzisław (Théorèmes de Schild) 51.
- Lewis, D. J. s. Th. Skolem 267.
- F. M. (Rayleigh's principle for calculating beam frequencies) 424.
- Lewy, Hans (Reflection laws of second order differential equations) 80.
- Li Chen Von (Li Heng Won) (Optimal filtering of a signal) 134.
- Liebel, Eberhard und Günter Zeyen (Optimale Zuordnung von Maschinen zu Betriebspunkten) 163.
- Lieberman, Gerald J. s. Martin L. Leibowitz 161.
- Lienert, G. A. und O. Ebel (Niveau-Eigenschaft eines psychologischen Tests) 157.
- Likař, O. s. M. Jilek 149.
- Lin, Chin (Eigenvalues for functional equations) 325.
- Linnik, Ju. V. (Yu. V.) (Sets of lattice points on a sphere) 27.
- — — (Iu. V.) und V. P. Skitovič (H. Cramer's theorem) 141.
- Lintz, Rubens G. (Bi-cellule et les variétés dans un espace abstrait) 182.
- Lippmann, Bernard A., Marvin H. Mittleman und Kenneth M. Watson (Scattering of electrons) 214.
- Litvinčuk, G. S. (Integralgleichungen mit mehrdeutigen Kernen) 309.
- Litwiniszyn, Jerzy (Flows with the exchange of mass, momentum and energy) 432.
- Litzman, Otto (Frequency spectrum and thermodynamic functions of crystals) 236.
- Liu, C. Y. s. Joseph Kestin 192.
- Livartovskij, I. V. (Stabilität eines Systems von Differentialgleichungen) 298.
- Livšic, M. S. (Isometric operators with equal deficiency indices) 108.
- — — s. M. S. Brodskij 108.
- Lloyd, D. E. (Problem of estimation) 154.
- Loewner, C. and E. Netanyahu (Compositions of Hadamard type) 285.
- Logunov, A. A. (Dispersion relations) 219.
- — — and B. M. Stepanov (Dispersion relations for photoproduction of pions) 449.
- Lohwater, A. J. s. F. W. Gehring 53.
- Lomadse, G. (Darstellung der Zahlen durch quadratische Formen) 267.
- Lomnicki, Z. A. and S. K. Zarembo (Spectral density function) 356.
- Long, R. G. s. V. L. Klee jr. 314.
- Robert R. (Notions of a conducting liquid) 198.
- Longo, Antonio (Criterio di previsione di Wiener) 340.
- Lonsdale, Kathleen s. John S. Kasper 237.
- Look, K. H. (Schwarz lemma) 59.
- Lotkin, Mark (Characteristic values) 119.
- Lovass-Nagy, V. (Polyphase electrical systems) 440.
- Lowry, Edward S. (Maxwell field in Minkowski space) 445.
- Luchins, Edith H. (Homomorphisms into Banach algebras) 106.
- Lugaresi, Erminia (Reciprocità dell'elettromagnetismo) 439.
- Lukacs, Eugene (Distribution-free partition statistics) 353.
- Lupanov, O. B. (Number of graphs) 183.
- Luxemburg, W. A. J. s. T. E. Hull. 290.
- Maass, Hans (Verteilung der Punkte in Gittern) 61.
- Macaev (Matsaev), V. I. (Transformation operator for high-order differential equations) 66.
- MacCamy, Richard C. (Asymptotic developments for a boundary value problem) 83.
- MacCarthy, Charles A. (Nilpotent part of a spectral operator) 321.
- MacKenzie, R. E. s. L. Auslander 392.
- MacRobert, T. M. (Multiplication formulae for the E -functions) 45.
- Mahler, K. (Groups of linear transformations) 268.
- Makai, E. (Bounds for the principal frequency of a membrane) 424.
- Maksimov, L. A. (Remarks regarding Heisenberg's paper) 218.
- Malcolm, D. G. (Simulation in management analysis) 162.
- Malecot, G. (Processus de „mouvement brownien“) 451.
- Maljužinec (Maluzhinets), G. D. (Inversion formula for Sommerfeld integral) 88; (Sommerfeld integral inversion formulas) 88; (Excitation, reflection and emission of surface waves) 442.
- Mamedov, R. G. (Approximation of functions by linear operators) 114.
- Mampel, K. L. (Umdrehungsproblem von Kakeya) 383.
- Mandan, Sahib Ram (Harmonic inversion) 167.
- Mandelstam, S. (Unitarity condition below physical thresholds) 216.
- Mangano Guido (Carichi critici) 407.
- Manin, Ju. I. (Yu. I.) (Cubic congruences to a prime modulus) 26.
- Mann, Erich s. Alfred Seeger 235.
- Marchaud, André (Convexité et connexité linéaire) 174.
- Marcus, Marvin and B. N. Moys (Transformations on tensor product spaces) 89.
- Marzewski, E. and H. Steinhaus (Distance of sets) 35.
- Mardešić, Sibe (Chainable continua and inverse limits) 177.
- Markham, Jordan J. (Interaction of normal modes) 229.
- Markov, A. A. (Konstruktive Funktionen) 6; (Algorithms) 247.
- Markowitz, Harry s. Kenneth J. Arrow 162.
- Markus, A. S. (Holomorphic operator functions) 322.
- Maroni, Pascal (Décharge dans les plasmas Lorentziens: distribution électronique) 232.
- Martalogu, N. (Fokussierung in Teilchenbeschleunigern) 208.
- Martindale III, Wallace S. (Structure of a class of rings) 259.
- Maruyama, Gisirô and Hiroshi Tanaka (One-dimensional diffusion processes) 346.
- Marziani, Marziano (Integrazione delle equazioni di Maxwell) 440.

- Masani, P. and N. Wiener (Bivariate stationary processes) 340.
- Maschler, Michael (Analytic functions) 287.
- Maskell, E. C. and D. A. Spence (Jet flap in three dimensions) 187.
- Maškevič, V. S. (Quasinormale Koordinaten in der Kristalloptik) 238.
- Massa, Emilio (Stabilità delle vibrazioni sincrone) 404.
- Massey, W. S. (Cohomology ring of a sphere bundle) 392; (Stiefel-Whitney classes of a manifold) 393.
- Mast, C. B. and J. Strathdee (Relativistic interpretation of astronomical observations) 239.
- Mateescu, C. (Propriétés des isogonales) 167.
- Matsumoto, Kazuo s. Masao Ohnishi 6.
- Kishi (Absolute Riesz summability of Fourier series) 278.
- Matsushima, Yatarō (Hausdorff interval topology) 257.
- Matveev, R. F. (Multidimensional stationary random processes) 340.
- Mauldon, J. G. (Beta-distribution) 139.
- Maurice, Rita (Ranking means of normal populations) 354.
- Mayer, Thomas s. Martin Bronfenbrenner 369.
- Mazzarella, Franco (Piastra quadrata appoggiata al centro) 415.
- McCarthy, J. s. J. W. Backus 125.
- McCrackin, Frank L. s. Jack C. Smith 425.
- McDougle, Paul (Quasi-compact mappings) 176.
- McGuinness, John S. (Managerial game for an insurance company) 164.
- McKnight, J. D. s. R. W. Bagley 317.
- jr., J. D. s. R. W. Bagley 176.
- McLennan jr., James A. (Statistical mechanics of the steady state) 222.
- Medgyessy, Pál (Partial differential equations for stable density functions) 348.
- Meier, Paul s. E. L. Kaplan 148.
- Meijer, Paul H. E. s. Julius Bowen 450.
- Meixner, Josef s. Heinz König 93.
- Mel'nikov, V. K. (Einfangbereich für eine Gleichung zweiter Ordnung) 404.
- Melzak, Z. A. (Analytic homeomorphisms) 276.
- Melzi, Giovanni (Trasformazioni puntuali fra due spazi affini) 170.
- Mendelsohn, N. S. s. A. L. Dulmage 249.
- Menges, Günter (Stichproben aus endlichen Gesamtheiten) 350.
- Menkes, J. (Plane deflagration wave) 437.
- Mennicke, Jens (Einige endliche Gruppen) 14.
- Meredith, G. Patrick (Epistemic communication) 5.
- Mergelyan (Mergelyan), S. N. (Weighted approximations by polynomials) 42.
- Méric, Jean (Problème de marche au hasard dans le plan) 349.
- Merk, H. J. (Macroscopic equations for simultaneous heat and mass transfer) 193; (Mass transfer in laminar boundary layers) 193; (Mass transfer in laminar boundary layer along a flat plate) 193.
- Merli, Luigi (Integrali di un'equazione alle derivate parziali) 71.
- Merten, Ludwig (Lange optische Gitterschwingungen) 235.
- Mesner, Dale M. s. R. C. Bose 150.
- Mettler, E. (Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen) 402.
- Metzner, A. W. K. and P. Morrison (Flow of information in cosmological models) 445.
- Meyer, André (Fonctions de transition subordonnées) 345.
- Michael, E. (Partially ordered sets) 270.
- Michiels, J. L. s. M. Désirant 238.
- Mickelsen, William R. (Molecular diffusivity in turbulent diffusion) 196.
- Mickle, E. J. and T. Radó (Uniqueness theorem for Haar measure) 271.
- Earl J. (Closure property of measurable sets) 271.
- Miele, Angelo (Lagrange multipliers and quasi-steady flight mechanics) 399; (Flight paths of rocket-powered aircraft) 400.
- Mihăilescu, Tiberiu (Géométrie différentielle affine) 170.
- Mihaljinec, Mirko (E. S. Barnes and H. P. F. Swinnerton-Dyer's paper) 27.
- Millar, R. F. (Diffraction by an infinite slit) 206.
- Miller, Kenneth S. (Finite differences and difference equations) 290.
- jr., R. G. s. S. Karlin 136.
- — Rupert G. (Priority queues) 344.
- Mills, Edwin S. (Seasonal inventories) 368.
- Milne-Thomson, L. M. (Theoretical hydrodynamics) 426.
- Minin, I. N. (Radiation transfer) 454.
- Minuchin, B. L. (Lösung diophantischer Gleichungen) 26.
- Mirsky, L. (Theorems on doubly-stochastic matrices) 9.
- Mišenko, E. F. (Asymptotische Methoden in der Theorie der Relaxationsschwingungen) 71.
- Misonov (Mishonov), M. K. (Shallow shells) 416.
- Misra, S. P. (Scattering matrix elements of nucleons) 219.
- Mitas, Günter (Strukturtheorie separabler Algebren) 260.
- Mitra, Manindra (Buried line source problem) 408.
- Mitrinović, D. S. s. S. Fempl 38.
- Dragoslav S. (Quelques inégalités) 8.
- Mittelstaedt, P. (Rearrangement energy) 226.
- Mittleman, Marvin H. s. Bernard A. Lippmann 214.
- Mittmann, O. M. J. (Variance of the integral of an empirical function) 362.
- Miyatake, Yoshio (Nonlocal interactions and dispersion relations) 448.
- Mogyoródi, József (Motion of neutrons) 233.
- Moiseev, N. N. (Elastic oscillations of a fluid-filled body) 423.
- — — s. J. J. Stoker 199.
- Moljukov, I. D. und S. Ju. Karinskij (Stabile Halbgewölbe und Gewölbe) 417.
- Monna, A. F. (Espaces localement convexes sur un corps valué) 91.
- Montaldo, Oscar (Equazioni paraboliche lineari) 75; (Problema di valori al contorno) 78.

- Montgomery, David (Alfvén waves in a cold ionized gas) 453.
- Montroll, Elliott W. and John C. Ward (Quantum statistics of interacting particles. II.) 222.
- Moore, John C. (Semi-simplicial complexes and Postnikov systems) 180.
- Richard A. and Zeev Nehari (Nonoscillation theorems) 69.
- Mordell, L. J. (Reflections of a mathematician) 1.; (Representation of a number as a sum of three squares) 27.
- Moreau, E. et J. Salmon (Opérateur de collision élastique de Boltzmann) 224.
- Morelock, J. C., N. C. Perry and W. R. Hutcherson (Fibonacci sequence) 169.
- Morgenthaler, George W. (Walsh-Fourier series) 277.
- Morita, Tohru (Bose-Einstein lattice gases) 231; (Bose-Einstein lattice gas theory) 231; (Free energy and distribution functions) 231.
- Morrison, P. s. A. W. K. Metzner 445.
- Mortality investigation, continuous 164.
- Moser, J. (Quantentheorie der Zentralkräfte) 213.
- L. s. J. Lambek 266.
- Moses, Lincoln E. s. Herman Chernoff 144.
- Moskalenko, S. A. and K. B. Tolpygo (Energy spectrum of a mott exciton) 228.
- Mostowski, A. Włodzimierz (Direct sums of cyclic groups) 16.
- Motoo, Minoru s. Hisao Watanabe 347.
- Motzkin, T. S. and J. L. Walsh (Polynomials of best approximation. I.) 48.
- Theodore S. s. William L. Hart 36.
- Moyls, B. N. s. Marvin Marcus 89.
- Muir, Andrew (Automatic sales forecasting) 163.
- Mulholland, H. P. (Product of n complex homogeneous linear forms) 268.
- Müller, Hans Robert (Ermittlung von Hüllflächen) 170.
- Murakami, Haruo (Non-linear partial differential equations of parabolic types. I.—III.) 304; (Regularity of domains for parabolic equations) 304; (Parabolic and elliptic differential equations) 304.
- Murata, Kentaro (Additive ideal theory in multiplicative systems) 257.
- Murray, J. D. s. S. Goldstein 431.
- Murskij (Murskii), V. L. (Transformations of contact circuits) 128.
- Myrberg, Lauri (Meromorphe Funktionen auf Riemannschen Flächen) 54.
- Nachbin, Leopoldo (Algebras of finite differential order) 99.
- Nadolschi, V. (Détermination des éléments d'une orbite planétaire) 239.
- Nagano, Tadashi (Conformal transformation on a space with parallel Ricci tensor) 172.
- Nagata, Masayoshi (14-th problem of Hilbert) 25; (Paper of Zariski) 169; (Jacobian criterion of simple points) 261; (Algebraic geometry over Dedekind domains. I, II) 264, 265.
- Nagy, K. L. (Equivalence theorem for integro-differential equations) 87; (Elimination of the non-physical consequences of the indefinite metric) 447.
- Nahon, Fernand (Distributions de vitesses radiales) 239; (Résolution d'une équation intégrale qui généralise l'équation de Jeans) 239.
- Naimark, M. A. (Normed rings) 101.
- Nakagawa, Yoshinari (Heat transport by convection) 197.
- Nakamura, Yoshio (Distribution of ideals) 23.
- Nakanishi, Noboru (Clothed unstable particles) 220.
- Nakano, Huzio (Variation principle for transport phenomena) 223; (Variation principle for susceptibility tensors) 223; (Electrical conductivity) 452; (Variation principle in the theory of transport processes) 452; (Variation principle in susceptibility) 452.
- Takeo (Nearly semisimple ring) 21.
- Nakayama, Tadasi und Tosi-ro Tsuzuku (Frobenius extensions and endomorphism rings) 22.
- Nambu, Y. (General Green's functions) 448.
- Naor, P. (Approximation to machine interference) 344.
- Napolitano, L. G. (Blasius equation) 434.
- Narain, Roop (Laplace transform. III.) 88; (Generalized Laplace transform) 312.
- Narasimhan, M. S. (Curvature and the Dirichlet problem) 81.
- Narayana Rao, M. L. s. Rao, M. L. Narayana 89.
- Nardini, Renato (Gruppo di casi relativi ad onde magnetoidrodinamiche) 436.
- Nariboli, G. A. (Mixed boundary value problems for rectilinear plates. I.) 416.
- Nash-Williams, C. St. J. A. (Abelian groups, graphs and generalized knights) 184.
- Nataf, A. s. C. Fourgeaud 369.
- Nauenberg, M. s. R. Brout 228.
- Naur, Peter (Editor), J. W. Backus, F. L. Bauer, J. Green, C. Katz, J. McCarthy, A. J. Perlis, H. Rutishauser, K. Samelson, B. Vauquois, J. H. Wegstein, A. van Wijngaarden and M. Woodger (The algorithmic language ALGOL 60) 125.
- Nečas, Jindřich (Transformée de Laplace d'une fonction) 312.
- Nečiporuk (Nechiporuk), É. I. (Scheme synthesis by linear transformations of variables) 128.
- Nehari, Zeev s. Richard A. Moore 69.
- Nejmark (Neimark), Ju. I. (Ju. I.) (Dependence of periodical motions on parameters) 296.
- Nelepin, R. A. (Dynamik einer Regelung) 130.
- Nemytskii, V. V. and V. V. Stepanov (Qualitative theory of differential equations) 295.
- Nerode, A. (Linear automaton transformations) 334.
- Netanyahu, E. s. C. Loewner 285.
- Neufeld, Jacob (Vavilov-Čerenkov radiation) 204.
- Neuhaus, M. s. A. Abramov 119.
- Neumark, M. A. (Normierte Algebren) 101.
- Neuringer, Joseph L. (Optimum power generation) 198.

- Nevanlinna, F. und R. Nevanlinna (Absolute Analysis) 29.
 — R. s. F. Nevanlinna 29.
 — Rolf (Normalsysteme von gewöhnlichen Differentialgleichungen) 290.
 Newman, D. J. s. M. S. Klamkin 10.
 Nguen Kan Toam (Flächen zweiter Ordnung im elliptischen Raume) 371.
 Nickel, K. (Laminare Grenzschichtströmungen) 432.
 Nicolescu, Lilly Jeanne (Differentiability in Fréchet's or Gâteaux's sense) 114.
 — Miron (Analysis. I—III.) 30, 31, 32.
 Nijboer, B. R. A. s. K. Schram 222.
 Nikaidô, Hukukane (Minimax theorem) 367.
 Nikodým, Otton Martin (Basic notions in Boolean lattices. II.) 19.
 Nitsche, Joachim A. (Fehler-schranken beim Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen) 120.
 Nobusawa, Nobuo (Integral basis of algebraic function fields) 24.
 Nočevkina (Nochevkina), I. I. (Plane rotational flow in magnetohydrodynamics) 436.
 Nollet, Louis (Locale compacité des espaces topologiques) 386.
 Northrop, Theodore G. and Edward Teller (Adiabatic motion of charged particles) 207.
 Novak, Edwin s. Benjamin Fruchter 155.
 Novotný, J. s. M. Pišl 169.
 — Miroslav (Quasi-geordnete Mengen) 270.
 Nowacki, Witold (Steady-state three-dimensional thermo-elastic problem) 418; (Thermo-elastic problem) 419; (State of stress in an elastic space) 419.
 Nraňjan (Nranjan), A. A. (Equivalent orbits method and semiconductors of $A^{III}B^V$ -type) 229.
 Numerov, Š. N. (Instationäre Filtration) 439.
 Obata, Morio (Affine connections on manifolds) 172.
 Oberhettinger, F. (Expansions for Bessel integral functions) 281.
 Obolašvili, E. I. (Momentenfreies Gleichgewicht einer Schale) 416.
 O'Brien, J. P. (Decomposition of multi-order linear differential equations) 120.
 Obuchov, A. M. und A. M. Jaglom (Mikrostruktur der ausgebildeten Turbulenz) 196.
 O'Connor, D. J. s. A. H. Basson 6.
 Ogievckij (Ogievetskii), V. I. and I. V. Polubarinov (Wave equations with zero and non-zero rest masses) 446.
 Oğuztöreli, M. Namik (Épauement des surfaces de Riemann) 56.
 Ohnishi, Masao and Kazuo Matsumoto (Gentzen method in modal calculi. II.) 6.
 O'Keeffe, Jeremiah (Singularities of Hadamard's finite part of improper integrals) 273.
 Ol'chovskij (Ol'khovskii), I. I. (Hydrodynamic theory of a supersonic interferometer) 190.
 Oldenburger, Rufus (Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen. I, II.) 117.
 Olech, C. (Result of Z. Opial) 274.
 Olesiak, Z. and I. N. Sneddon (Thermal stress in an infinite elastic solid) 420.
 Olévskij (Olevsky), A. M. (Linear methods of summation) 38.
 Olkin, Ingram (Inequalities for norms of compound matrices) 9.
 O'Neill, Barrett (Leray isomorphism theorem) 390.
 Opial, Z. (Équation différentielle) 70; (Inégalité) 274.
 Ore, Oystein (Hamilton circuits) 395.
 Orgeval, Bernard d' (Variétés à n dimensions) 375.
 Orlovski, N. s. Anton Sesan 408.
 Oroveanu, T. and H. Pascal (Propagation of pressure waves) 201.
 Osiński, Zbigniew (Forced vibration of a system of one degree of freedom) 70.
 Oster, Ludwig (Distribution of cyclotron radiation) 204.
 Ostrowski, A. M. (Rayleigh quotient iteration. III, IV.) 119.
 Oswatitsch, K. (Ablösungsbedingung von Grenzschichten) 432.
 Ovčarov, V. E. s. V. A. Bodner 399.
 Pafomov, V. E. s. V. N. Agranovič 204.
 Page, Chester H. (Algebra of electronics) 202.
 Paige, L. J. s. A. A. Albert 20.
 Pailloux, Henri (Piézoélectricité. Calcul des vitesses de propagation) 238.
 Pais, A. and G. E. Uhlenbeck (Quantum theory of the third virial coefficient) 227.
 Palamodov, V. P. (Polynome, die eine rekurrente Folge bilden) 45.
 Palas, Frank J. (Rodrigues' formula) 280.
 Panzone, Rafael s. Mischa Cotlar 108.
 Papapetrou, A. (Periodische nichtsinguläre Lösungen in der allgemeinen Relativitätstheorie) 444.
 Papić, Pavle (Espaces H -fermés) 175.
 Papuc, Ligia s. Alice Corduneanu 2.
 Parchomenko (Parkhomenko), P. P. (Mechanization of the analysis of circuits) 128.
 Parchomovskij (Parkhomovskii), S. I. (Impulsive symmetrical cavitation flow) 188.
 Parodi, Maurice (Zéros des polynomes) 10.
 Parrent jr., G. B. and P. Roman (Theory of partial polarization) 213.
 Pârvu, Monica Pavel (Resolvent equation) 105.
 Parzen, Emanuel (Probability theory) 337.
 Pascal, H. s. T. Oroveanu 201.
 Päsler, Max (Mechanik deformierbarer Körper) 406.
 Patterson, H. D. (Fitting an exponential curve) 155.
 Pauc, C. Y. s. D. Rutovitz 35.
 Pauli, W. (Wellenmechanik) 211.
 Pavlikovskij (Pavlikovskii), A. and V. Ščuruvna (Šchuruvna) (Zubarev's method) 451.
 Payne, L. E. (Representation formulas for solutions of partial differential equations) 73.
 Pearson, B. J. (Connected point set in the plane) 177.
 Peetre, Jaak (Opérateurs différentiels) 325.
 Pentkovskij, M. V. (Projektive Transformation von Nomoogrammen) 124.
 — — — s. O. A. Žautykov 1.

- Perčinkova-V'čkova, Danica (Compléments au traité de Kamke) 63.
- Percival, I. C. s. L. Castillejo 214.
- Peres, Asher (Gravitational waves) 210.
- Pérez, Albert (Transformation ou σ -algèbre suffisante) 352.
- Perlis, A. J. s. J. W. Backus 125.
- Perry, N. C. s. C. V. Aucoin 169.
- — s. J. C. Morelock 169.
- Pervin, William J. and Norman Levine (Connected mappings of Hausdorff spaces) 175.
- Pervozvanskij, A. A. (Näherungsmethode zur Untersuchung von Eigenschwingungssystemen) 71; (Automatische Frequenzregelung) 336.
- Peschka, W. (Wirbelsätze der Magnetohydrodynamik) 436.
- Petrašen, G. I. (Fortpflanzung instationärer Wellen) 199.
- Petrov, V. V. und V. Ju. Rutkovskij (Servomechanismen) 334.
- Petykiewicz, J. s. S. Kaliski 407.
- Pfanzagl, J. (Tests und Konfidenzintervalle für exponentielle Verteilungen) 359.
- Pham, Daniel et Monique Ghinea (Méthode d'itération dans la théorie des équations) 116.
- Philip, A. G. Davis (Viscosity on the splash of water) 192.
- Pi Calleja, Pedro (Haarsches Maß in lokalkompakten metrischen Räumen) 271.
- Pierson, Willard J. and Leo J. Tick (Stationary random processes) 137.
- Pietenpol, Jerry L. s. I. Richard Lapidus 207.
- Pilod, Pierre s. Sébastien Gerber 201.
- Pines, D. s. N. M. Hugenholtz 227.
- Pinte, R. et R. Simon (Oscillations radiales et la stabilité d'un plasma cylindrique) 453.
- Pišl, M. und J. Novotný (Fußpunkturvenbewegung) 169.
- Pitaevskij, L. P. s. I. E. Dzjałošinskij 238.
- Pitcher, Everett (Variation in index of a quadratic function) 11.
- Pjateckij-Šapiro (Piatetskii-Shapiro), I. I. (Problem proposed by E. Cartan) 62.
- Pleszczyńska, E. (Screening in statistical testing) 351.
- Podderiouguine, Victor (Automatisation de la programmation) 125.
- Podlovčenko, R. I. (Grundbegriffe des Programmierens) 125.
- Pohl, K. H. (Strömungsverhältnisse in einem Diffusor) 200.
- Poitou, G. (Fractions continues arithmétiques) 28.
- Pol'skij, N. I. s. A. Š. Dorfman 193.
- Polubarinov, I. V. s. V. I. Ogievckij 446.
- Polubarinova-Kočina (Polubarinova-Kochina), P. Ja. (P. Ya.) (Ground water movements) 439.
- Pommerenke, C. (Gitterpunkte auf m -dimensionalen Ellipsoiden) 268.
- Ponomarev, V. (Open mappings of normal spaces) 175.
- Pontrjagin, L. S. (Optimale Regelungsprozesse) 334.
- Popović, Konstantin P. (Stellungsprozeß von Relaiskontakten) 334.
- Popovici, V. s. D. Rimer 1.
- Porper, F. O. s. S. D. Ejdel'man 74.
- Portnov, I. G. (Vordere Grenze des Kavitationsgebietes) 187.
- Posin, M. Je. s. L. M. Batuner 33.
- Possel, René de (Variétés à deux dimensions) 56.
- Postnikov, M. M. s. Irving Kaplansky 23.
- Potapenko, A. A. (Schwingungszahl eines mechanischen Systems) 402.
- Power, G. and H. L. W. Jackson (Fields in homogeneous anisotropic media) 202.
- Prabhu, N. U. s. S. Karlin 136.
- Prager, William (Introduction to plasticity) 420.
- Praisman, N. I. (Calcul approximatif dans l'école moyenne soviétique) 2.
- Pratt, J. W. (Tests for the mean of a rectangular distribution) 359.
- Prékopa, András (Secondary processes) 340.
- Preuss, Lucien s. Enis B. Baš 208.
- Priestley, C. H. B. (Temperature fluctuations) 196.
- M. B. s. G. M. Jenkins 356.
- Prochorov (Prohorov), Ju. V. (Yu. V.) (Strong law of large numbers) 139.
- Proskurjakov, I. V. (Eigenschaft des n -dimensionalen affinen Raumes) 383.
- Pucker, N. (Brennfleckverschiebung eines paraxialen Ionenstrahles) 209.
- Puig Adam, Pedro (Ruolo del concreto nella matematica) 1.
- Pustyl'nik, E. I. s. M. A. Krasnosel'skij 326.
- Pyke, Ronald (Supremum and infimum of the Poisson process) 136.
- — s. Z. W. Birnbaum 148.
- Rabinovič, E. M. s. Ja. B. Zel'dovič 450.
- Rabson, Gustave (Nonabsolutely convergent Fourier series on compact groups) 327.
- Radhakrishna Rao, C. s. Rao, C. Radhakrishna 153.
- Radó, T. s. E. J. Mickle 271.
- Rahman, Q. I. (Inequalities for polynomials) 282.
- Raillard, Georges (Assurances en cas de décès sur deux têtes) 369.
- Rajkov, D. A. (Extremale lokal konvexe Topologie) 313.
- Ralston, Anthony and Herbert S. Wilf (edited by) (Mathematical methods for digital computers) 126.
- Raman, C. V. (Caustics and geometric theory of diffraction patterns) 206.
- Ramsey, N. F. s. W. H. Furry 446.
- Rankin, R. A. s. Ju. V. Linnik 27.
- Rao, C. Radhakrishna (Method of estimation by minimum chi-square) 153.
- M. L. Narayana (Kernels for the derivation of self-reciprocal functions) 89.
- Tyagaraja S. (Eliminating the variation of mass) 444.
- Rapaport, Elvira Strasser (Nielsen transformations) 250.
- Rasulov, M. L. (Residuenmethode zur Lösung gemischter Probleme für Differentialgleichungen) 302.
- Read, R. C. (Enumeration of locally restricted graphs. I.) 183.

- Rees, D. (Form rings and ideals) 260.
- Rehbach, J. (Spaltverluste von Turbinenleiträdern) 200.
- ReiBig, Rolf (Nichtlineare Mechanik) 405.
- Reijmers (Reimers) É. G. (Mean value theorems) 38.
- Remmert, Reinhold s. Hans Grauert 60.
- Rendiconti dei lavori scientifici presentati al XLV Congresso della Società Italiana di Fisica. 450.
- Rényi, A. (Mixing sequences of sets) 132.
- Alfréd s. Paul Erdős 49.
- Rešetnjak (Reshetniak), Ju. G. (Ju. G.) (Test for the continuity of a mapping) 289.
- Reuter, G. E. H. (Denumerable Markov processes. II.) 138.
- Reza, F. M. (Multiplication theorem for positive real functions) 288.
- Rham, Georges de (Variétés différentiables) 81.
- Ricci, Giovanni (Equazione indeterminata $x^{2n} + y^{2n} = z^{2n}$) 26.
- Rice, J. R. (Algorithm for best Tchebycheff approximations) 42.
- Richter, E. (Kraftfreie Magnetfelder) 443.
- Rider, Paul R. (Quasi-ranges of samples) 156; (Variance of the median of samples) 362.
- Rieger, G. J. (Ideale in algebraischen Zahlkörpern) 23; (Wienersche Methode in der Zahlentheorie) 23; (Anzahl der Ideale in einer Idealklasse mod f) 23.
- Ladislav (Gödel's axiomatic set theory. I.) 244; (Remark on s. c. free closure algebras) 256.
- Riives (Rijves), S. (Z.) (Projektionseigenschaften des orthozentrischen Tetraeders) 167.
- Rimer, D. et V. Popovici (Enseignement mathématique dans les écoles professionnelles) 1.
- Riney, T. D. (Coefficients in asymptotic factorial expansions) 286.
- Rionero, Mario (Curve algebriche piane e trasformazioni quadratiche) 169.
- Salvatore (Validità del principio dell'effetto giroscopico) 402.
- Rios, Sixto (Problèmes des maxima et minima) 360.
- Rivaud, Jacques (Exercices d'analyse. I, II.) 33.
- Rivlin, R. S. s. G. F. Smith 235.
- Roberson, Robert E. (Inertial control of satellite attitude) 403.
- Roberts, M. de V. s. J. A. Fothingham 125.
- Robertson, W. H. (Fisher's method of comparing two percentages) 360.
- Rocard, Y. (Instabilités et vitesses critiques) 403.
- Rocos, Pant. (Algèbre-anneaux) 255.
- Rodriquez, Gaetano (Quasikorpi distributivi finiti) 256.
- Roessler, Edward B. s. Henry L. Alder 337.
- Rofe-Beketov, F. S. (Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichung) 295.
- Roginskij, V. N. (Struktursynthese von Relais-Steuer-schaltungen) 127.
- Rogožin (Rogoghin), V. S. (Infinite systems of linear algebraic equations) 111.
- Rokowska, B. et A. Schinzel (Problème de M. Erdős) 266.
- Roman, P. s. G. B. Parrent jr. 213.
- Romanenko, P. N. s. A. Š. Dorfman 193.
- Roquette, Peter (Algebraische Gruppen) 254; (Hassesches Klassenkörper-Zerlegungsgesetz) 261.
- Rosciszewski, Jan (Shock-wave attenuation by boundary-layer growth) 190.
- Rose, Alan (Multiplicateur ultrarapide) 331.
- Rosenberg, Leonard s. Larry Spruch 213.
- Rosenfeld, Azriel s. Seymour Haber 14.
- Roth, W. (Tordierte, einfach gekrümmte Welle) 413.
- Rothe, E. H. (Fundamental solutions of parabolic differential equations) 75.
- Rouse, Hunter and Simon Ince (History of hydraulics) 200.
- Roy, Henri Louis Le s. Le Roy, Henri Louis 156.
- J. (Efficiency factor of block designs) 352.
- — s. S. N. Roy 153.
- S. N. and J. Roy (Problems in "normal" multivariate analysis of variance) 153.
- Royden, H. L. (Euclidean and non-Euclidean plane geometry) 165.
- Royster, W. C. (Functions having positive real part in an ellipse) 288.
- Rožanov, Ju. A. (Yu. A.) (Spectral analysis of abstract functions) 326; (Interpolation of stationary processes) 340.
- Rozenbljum, V. I. (Anpassungsfähigkeit erwärmter elastoplastischer Körper) 419.
- Rozin, S. M. (Nullstellen der Dirichletschen L -Reihen) 28.
- Rubinstein (Rubinstein), L. I. (Stephan's one-dimensional problem) 77.
- Ruchadze, A. A. s. V. N. Agronovič 204.
- Rudakov, L. I. and R. Z. Sagdeev (Rarefied plasma) 225.
- Rudin, Walter (Measure algebras on Abelian groups) 109.
- Ruegg, M. Alain (Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques) 140.
- Rufener, E. (Quasiarithmetische Mittelbildungen an Verbindungsrenten) 164.
- Rumanova, I. M. (Elektronendichte von Kristallen) 237.
- Rumjancev (Rumyantsev), V. V. (Equilibria of a rigid body) 401.
- Rusak, B. I. (Leitfähigkeit in kondensierten Phasen) 223.
- Rusakov, S. A. (Subgroups of strongly π -solvable groups) 15.
- Russell, Dennis C. (Nörlund summability methods) 39.
- Rutishauser, H. s. J. W. Backus 125.
- — s. M. Engeli 121.
- Rutkovskij, V. Ju. s. V. V. Petrov 334.
- Rutovitz, D. and C. Y. Pauc (Theory of Ward for cell functions) 35.
- Rychlik, Karel (Theorie der reellen Zahlen) 242.
- Šabat, B. V. s. M. A. Lavrent'ev 290.
- Sacharov, I. E. (Erzwungene Schwingungen einer Scheibe) 423; (Frequenzen der Eigenschwingungen von Ringplatten) 425.
- Sachs, Horst (Ausbildung von Industriemathematikern) 1.
- Sadowski, W. (Statistical decision functions) 144.
- Safonov, S. A. (Groups with a class of unattainable isordic II d -subgroups) 15.

- Sagdeev, R. Z. s. L. I. Rudakov 225.
- — — s. A. A. Vedenov 224.
- Săginjan, A. L. (Ungleichung in der Theorie der analytischen Funktionen) 287.
- Saitō, Teishirō (Product of W^* -algebras) 107.
- Saito, Yoshihiro s. Hiroshi Toda 181.
- Sakaguchi, Kōichi (Classes of multivalent functions) 52.
- Sakakura, Eiichi (Isoperimetry on the surface) 384.
- Salmeri, Antonio (Equazione diofantea) 26.
- Salmon, J. s. E. Moreau 224.
- Salpeter, Edwin E. s. Hans A. Bethe 210.
- Šamanskij, V. E. (Harmonic functions in adjacent regions) 309.
- Samelson, K. (Technik des Maschinenrechnens) 125; (Digitales Maschinenrechnen) 331.
- — — s. J. W. Backus 125.
- Samojlovič (Samoilovich), A. G. and L. L. Korenblit (Faraday effect) 238.
- Sands, M. (Quantum effects in an electron synchrotron) 443.
- Sankaranarayana, G. (Asymptotic properties of Poisson process) 341.
- Sansone, G. (Parole pronunciate) 5.
- Santaló, L. A. (Affinvariante für ebene und räumliche konvexe Figuren) 174.
- Šao Da-čuan (Shao Da-chuan) (Oscillations in control systems) 335.
- Šarafutdinov, V. I. (Angenäherte Berechnung von Balken und Rahmen) 413.
- Sarhan, A. E. s. B. G. Greenberg 156.
- Sarmanov, O. V. (Maximum correlation coefficient) 361.
- Sasao, Seiya (Cup product) 178.
- Šaškin (Shashkin), Ju. A. (Yu. A.) (Inverse problem of the potential theory) 309.
- Sato, Hiroshi (Two-dimensional jet) 435.
- Satō, Tokui (Équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$. II.) 308.
- Sauer, Robert (Überschallströmung um Rumpf-Flügel-Anordnungen) 427.
- Saul'ev, V. K. s. P. S. Alexandroff 243.
- Sauter, F. s. R. Becker 212.
- Sauvénier-Goffin, Elisabeth (Enseignement des sciences exactes dans l'ancien pays de Liège) 4.
- Săvulescu, Șt. N. (Lösungen der instationären inkompressiblen Grenzschicht) 194.
- Sawicki, J. (Spin-orbit part of optical model potential) 456.
- Sayili, Aydin (Thābit ibn Quarra's generalization of the Pythagorean theorem) 241.
- Sazonov, V. (Characteristic functionals) 338.
- Scarfi, F. L. (Equations of motion) 219.
- Herbert (Statistical inventory problem) 368.
- Schaaf, S. A. (Recent progress in rarefied gasdynamics) 191.
- Schaefer, Helmut (Komplexe Erweiterung linearer Räume) 89.
- Schäffer, J. J. (Normed vector spaces) 93; (Function spaces with translations) 94, 95.
- Schelling, Hermann von (Intrinsic equations of twisted curves) 378.
- Schenkman, Eugene (Ideals in commutative rings) 14.
- Scherrer, Willy (Geometrie und Erkenntnistheorie) 243.
- Schiefer, Herbert F. s. Jack C. Smith 425.
- Schiffer, M. M. (Variational methods in the theory of conformal mapping) 288.
- Schinz, A. (Problème de P. Erdős) 25.
- — — s. B. Rokowska 266.
- Schlichting, Hermann (Entwicklung der Grenzschichttheorie) 192.
- Schmölzer, C. s. P. Germain 443.
- Schmidt, E. T. s. G. Grätzer 256.
- Jürgen (Begriff der Teilfolge) 385.
- Schneider, Werner s. Enis B. Baş 208.
- Schnell, W. s. P. Germain 443.
- Schoenberg, I. J. (Integrability of certain functions. I, II.) 40.
- — — s. Bernard Epstein 51.
- Schopp, J. (Inequality of Steensholt) 373.
- Schram, K. and B. R. A. Nijboer (Wigner distribution function) 222.
- Schröder, H. J. (Strömung durch eine Sammelspirale) 200.
- Schulz, Dieter (Hohlprisma) 443.
- Schwartz, Laurent (Distributions à valeurs vectorielles. I.) 96. (II.), 98.
- Lorraine and Stanley Wear-den (Estimating, testing, and setting confidence limits for heritability) 366.
- Schwarz (Švarc), Štefan (Invariant measures on compact semigroups) 12; (Semigroup of measures on a finite semigroup) 12.
- — — and Dorota Krajňáková (Totally non-commutative semigroups) 11.
- Schwinger, Julian (Field theory of unstable particles) 449.
- Ščuruvna, V. s. A. Pavlikovskij 451.
- Seaton, M. J. s. L. Castillejo 214.
- Seban, R. A., A. Emery and A. Levy (Heat transfer to subsonic turbulent flows) 196.
- Sedmak, Viktor (Partitions des ensembles) 270.
- Seeger, Alfred und Erich Mann (Nichtlineare Elastizitätstheorie) 235.
- Segre, Beniamino (Evangelista Torricelli) 4.
- Seiden, Joseph (Ferromagnétisme d'un cristal imparfait) 236.
- Seleznev, V. P. s. V. A. Bodner 399.
- Semple, J. G. s. R. O. Gibson 376.
- Serre, Jean-Pierre s. Serge Lang 264.
- Serrin, James (Calculus of variations) 85; (Integral for non-parametric problems) 86; (Stress-deformation relations) 186; (Compressible fluid motions) 191; (Periodic solutions of the Navier-Stokes equations) 191.
- Šesan, Anton et N. Orlovski (Équations de la méthode des déformations) 408.
- Sestini, Giorgio (Problemi analoghi a quello di Stefan) 305; (Propagazione del calore con convezione forzata) 305.
- Sevast'janov (Sevastyanov), B. A. (Limit theorems for branching stochastic processes) 342.
- Severi, Francesco (L. Fantappiè) 5; (Irregolarità delle varietà algebriche. I, II.) 374; (Caratteri di una varietà al-

- gebrica) 374; (Irrégularités des variétés algébriques) 375.
- Shah, B. V. (Kronecker product designs) 152.
- Tao-shing (Goluzin's number $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$) 289; (Radius of superiority in subordination) 289.
- Shamir, E. (Continuous nowhere differentiable functions) 273.
- Shankar, Hari (Theorem of Shah) 287.
- Shanks, Daniel and J. W. Wrench jr. (Khinchine's constant) 41.
- Shannon, Claude E. (Coding theory for noisy channels) 339.
- Shapiro, H. N. s. K. O. Friedrichs 316.
- Harold N. (Khinchine-Wiener theorem) 347.
- — s. Harold B. Gerard 364.
- Irwin s. A. Y. Khinchin 450.
- Victor L. (Multiple trigonometric series) 278.
- Shaw, R. (Influence of hole dimensions) 200.
- Shepherd, Ronald s. Kenneth J. Arrow 162.
- Sherman, P. M. s. L. Talbot 190.
- Sherry, M. E. and S. Fulda (Calculation of gamma functions) 336.
- Shields, Allen s. Ju. I. Manin 26.
- Shirai, Tameharu (Ranked space. II.) 386.
- Shrikhande, S. S. (Triangular association scheme) 151.
- — s. R. C. Bose 149.
- Shukla, U. K. (Points of non-symmetrical differentiability of a continuous function. III.) 273.
- Shuler, Kurt E. (Multistate systems) 222.
- Siddiqui, M. M. (Distribution of a serial correlation coefficient) 361.
- Sikkema, P. C. (Approximation mit Bernstein-Polynomen) 275.
- Šilov, G. E. s. M. G. Krejn 243.
- Silverberg, L. s. B. F. Bayman 226.
- Silverman, B. D. and P. R. Weiss (Polarization of electron gas) 229.
- E. (Miniature theory of Lebesgue area) 272.
- Šimanov (Shimanov), S. N. (Proposition by Liapunov) 68.
- Simon, R. s. R. Pinte 453.
- Simonov, R. A. (Pédagogie mathématique dans l'URSS) 1.
- Simonsen, W. (Differentiation of functions of several variables) 331.
- Singh, V. N. (Partial sums of hypergeometric series) 281.
- Vikramaditya (Extremum problems for the coefficient a_5) 50.
- Virendra (Ground-state energy of a boson gas) 227.
- Sinha, S. R. (Absolute Riesz summability of Fourier series) 278.
- Sirotn, Ju. I. (Temperaturspannungen bei Monokristallen) 235.
- Sja, Do-šin (Shah Tao-shing) (Parametrische Darstellung quasikonformer Abbildungen) 57; (Halbnormierte Ringe mit Involution) 104; (Semi-normed rings with involution) 104.
- Sjölander, Alf (Multi-phonon processes) 237.
- Skitović, V. P. s. Ju. V. Linnik 141.
- Skljarenko (Sklarenko), E. (Imbedding of normal spaces into bicomplexes) 389; (Spaces having an infinite number of dimensions) 389.
- Skof, Fulvia s. Nives Maria Verlan 284.
- Skolem, Th., S. Chowla and D. J. Lewis (Diophantine equation $2^{n+2} - 7 = x^2$) 267.
- Skowroński, Janisław and Stefan Ziemia (Mechanical models of structures) 398.
- Slepian, David s. Mark Kac 341.
- Slezkin, N. A. (Flow of a viscous heat-conducting gas) 192.
- Slowikowski, W. ((hF) -spaces and Banach inversion property) 91; (Extensions of map-systems. I.) 100).
- Smale, Stephen (Immersion of the two-sphere) 181; (Immersion of spheres) 182; (Vietoris mapping theorem for homotopy) 390.
- Smiley, M. F. (Jordan homomorphisms onto prime rings) 259.
- Smith, C. S. s. J. R. Ashford 158.
- G. F. and R. S. Rivlin (Strain-energy function) 235.
- Jack C., Frank L. McCrackin and Herbert F. Schiefer (Stress-strain relationships in yarns. V.) 425.
- Sneddon, I. N. s. Z. Olesiak 420.
- Snell, J. Laurie (Finite Markov chains) 347.
- — s. John G. Kemeny 137.
- Sobolev, V. V. (Brightness of a spherical nebula) 240.
- Sobolevskij (Sobolevskii), P. E. (Fractional powers of self-adjointed operators) 114.
- Sokal, Robert R. (Thurstone's analytical method) 155.
- Sokolik, G. A. (Representations of full Lorentz group) 211.
- Sokolov, G. N. s. A. A. Voronov 331.
- (Sokoloff), Ju. D. (G.) (Résolution approchée des équations intégrales) 123.
- S. N. s. N. P. Klepikov 363.
- Solitar, D. s. A. Karrass 13.
- Soldkin, E. E. s. A. S. Ginevskij 196.
- Spampinato, Nicolò (Ipersuperficie dell' S'_{11}) 376; (Congruenza (S_9)₁₂ dell' S'_{15}) 376.
- Sparrow, E. M. and J. L. Gregg (Nonisothermal free stream) 194.
- Spence, D. A. s. E. C. Maskell 187.
- Spinner, Sam and Rudolph C. Valore jr. (Comparison of theoretical and empirical relations between the shear modulus and torsional resonance frequencies for bars of rectangular cross-section) 423.
- Spitzer, Frank (Theorems concerning Brownian motion) 136.
- Springer, George (Interpolation problems) 58.
- M. D. s. S. Kurlat 161.
- T. A. s. F. van der Blij 258.
- Spruch, Larry and Leonard Rosenberg (Scattering lengths) 213.
- Squire, William (Relaxation methods) 330; (Turbulent flow. I.) 436.
- Squires, E. J. (Brueckner theory) 454.
- — s. J. S. R. Chisholm 455.

- Srivastav, R. P. (Mean value of integral functions) 287.
- Stallmann, F. (Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. III.) 289; (Alternierendes Verfahren von Schwarz und Neumann) 330.
- Steinhau, H. s. E. Marczewski 35.
- Stepanjuk, K. L. (Principe du point stationnaire) 315.
- Stepanov, B. M. s. A. A. Logunov 449.
- V. V. s. V. V. Nemytskii 295.
- Stephenson, G. (Covariant non-linear Lagrangians) 209.
- Stevens, K. W. H. and B. Josephson jr. (Coupling of spin system to cavity mode) 213.
- Stewartson, K. and L. Howarth (Flow past a quarter infinite plate) 191.
- Stiefel, E. s. M. Engeli 121.
- Stojaković, Mirko (Inversion d'une classe de matrices) 117.
- Stoka, Marius I. (Groupes G_r mesurables d'un espace R_n) 254.
- Štokalo (Shtokalo), I. Z. (Calculus of operations) 99.
- Stoker, J. J. (Dž. Dž.) (Water waves) 199.
- Stalker, R. J. (Sweepback effects in turbulent boundary-layer shock-wave interaction) 196.
- Storchi, Edoardo (Problema plastico ristretto degli sforzi piani) 422.
- St-Pierre, Jacques (Distribution of linear contrasts of order statistics) 362.
- Strachey, C. (Square root of a complex number) 126.
- Strathdee, J. s. C. B. Mast 239.
- Streeter, R. F. (Unphysical region in dispersion relations) 448.
- Strutt, M. J. O. s. G. Čremošnik 126.
- Struzik, T. (Kinetics of the reaction of haemoglobin) 123.
- Stumpf, Harald und Max Wagner (Elektron-Gitter-Kopplung) 228.
- Sudan, Gabriel (Théorème de Obrechhoff) 28.
- Sudarshan, E. C. G. s. S. Deser 447.
- Sukhatme, Balkrishna V. (Two sample distribution free test) 149.
- Šul'gin, D. F. s. V. A. Vasil'ev 439.
- Sunouchi, Gen-ichirô (Fractional integration) 37.
- Suprunenko, D. and R. Apate-nok (Nilpotent irreducible linear groups) 252.
- Süray, Saffet (Analytic functions of order n) 58.
- Surinov, Ju. A. (Iu. A.) (Radiation transfer and radiant heat exchange) 453.
- Susini, A. s. P. Germain 443.
- Suura, H. s. S. G. Gasiorowicz 217.
- Suvorov, G. D. (Sequences of topological mappings) 176.
- Suzuki, Michio (Linear groups. I, II.) 16.
- Švec, Marko (Intégrales de l'équation $y^{(n)} + Q(x)y=0$) 66.
- Svetlanov, A. V. (Differential-integral calculus) 37.
- Swingle, Paul M. s. Robert P. Hunter 177.
- Sydlr, J.-P. (Polyèdres équivalents) 372; (Tétraèdres équivalents) 373.
- Symanzik, K. (Axial vector β -decay coupling) 218.
- Synge, J. L. (Stationary principles for forced vibrations) 84.
- Sz.-Nagy, Béla et Ciprian Foiaş (Vecteurs propres d'un opérateur) 108.
- Szabo, J. (Stabilité élastique des barres) 413.
- Szász, F. (Anneaux ne contenant que des sous-anneaux propres cycliques) 259.
- Szegő, Gabor (L. Fejér) 242; (Orthogonal polynomials) 275.
- Szendy, Charles (Transient analysis of electrical networks) 440.
- Szereday, E. s. L. Jarmai 412.
- Takahashi, Shuichi (Arithmetic of group representations) 251.
- Takesaki, Masamichi (Conjugate space of operator algebra) 107; (Functional on operator algebra) 107.
- Talaljan, A. A. (Reihen nach Basen des Raumes L_p) 277.
- Talantsev (Talantsev), A. D. (Analysis of potential-pulse circuits) 335.
- Talantova, N. V. (Biaxialer Raum parabolischen Typus) 379.
- Talbot, L., T. Koga and P. M. Sherman (Hypersonic viscous flow) 190.
- Tameroglu, S. (Membran- und Biegetheorie der Kreiszyinderschale) 416.
- Tanaka, Chuji (Cluster sets of the meromorphic functions) 288.
- Hiroshi s. Gisirô Maruyama 346.
- Tani, I. (Flow separation over a step) 432.
- Taniuti, T. (Motion of charged particles) 207.
- Tannenwald, L. M. (Coulomb scattering) 214.
- Tarapov, I. E. s. A. I. Borisenko 169.
- Tarnopol'skij, V. G. (Jacobische Matrices) 328.
- Tarumoto, Kôichi (Cauchy integral on Riemann surfaces) 55.
- Taylor, A. B. (Equations of subsonic potential flow. I, II.) 189.
- Taylor, Sir Geoffrey Ingram (Papers. II.) 435.
- J. G. (Theorem of continuation for functions of several complex variables) 59.
- Teghem, J. (Prolongement analytique de Borel) 283.
- Téj Luj-vy s. Tu Sjuj-jaň 335.
- Tekše, K. (Theorie der geometrischen Konstruktionen) 167.
- Teller, Edward s. Theodore G. Northrop 207.
- Teodorčik, T. F. s. G. A. Bendrikov 329.
- Teodorescu, N. (D. Pompeiu) 5.
- P. P. (Teodoresku) (Calcul des poutres-parois) 414; (Ebenes Problem der Elastizitätstheorie) 417.
- Terpstra, Fedde J. (Neighbour points of a projective space) 373.
- Teuffel, Erich (Quadratwurzel-schnecke) 8.
- Thébault, V. s. J. Hecquet 167.
- Theorie und Anwendung diskreter automatischer Systeme. 333.
- Thomann, H. (Heat transfer and recovery temperature) 190.
- Thomé, Vidar (Mixed problems for hyperbolic differential equations) 302.

- Thompson, Gerald L. (Game theory) 161.
- Thorne, Roger Chapman (April 30, 1929 — May 19, 1959) 5.
- Thouless, David J. (Single-particle energies in the many-fermion system) 455.
- Tichomirov (Tikhomirov), V. M. (n -dimensional diameters of functional classes) 93.
- Tichonov (Tikhonov), A. N. (Continuous electromagnetic wave in a laminarly anisotropic medium) 441.
- Tick, Leo J. s. Willard J. Pier-son 137.
- Timman, R. (Dreidimensionale Grenzschichten) 432.
- Ting, Lu (Mixing of two streams) 434.
- Tirskij (Tirskii), G. A. (Energy equation in a viscous incompressible fluid) 191.
- Titus, C. J. and G. S. Young (Extension theorem for differential operators) 67.
- Tixaire, Alberto Galindo (Scattering integral equations in Hilbert space) 448.
- Toam, Nguen Kan s. Nguen Kan Toam 371.
- Toda, Hiroshi (Sequences in Steenrod algebra mod. 2) 178.
- , Yoshihiro Saito and Ichiro Yokota (Generator of $\pi_7(SO(n))$) 181.
- Todd, J. A. (Mathieu groups as collineation groups) 168.
- Toll, John S. s. David Y. Wong 205.
- Tolpygo, K. B. s. S. A. Moskalenko 228.
- Tolstov, G. P. (Fourier-Reihen) 277.
- Tonin, M. (Quantization of two-component fermion theory) 216.
- Tordion, G. V. (Creep of an elastic belt) 422.
- Törnqvist, Leo (Linear programming problems) 160.
- Törös, R. s. Gy. Fáy 212.
- Tran Thanh Van, J. s. M. Gour-odin 215.
- Tranter, C. J. s. J. C. Cooke 44.
- Trees, R. E. and C. De W. Coleman (Tables for diagonalizing matrices) 130.
- Trenogin, V. A. (Verzweigungen nicht-linearer Gleichungen) 113.
- Truesdell, C. (Stress functions for continua) 408.
- Tschauner, Johann (Kugelfunktionen und Zylinderfunktionen) 279.
- Tsuji, Masatsugu (Behnke-Stein's theorem) 55.
- Tsuneto, T. (Excitations in superconductors) 227.
- Tsuzuku, Tosiro s. Tadasu Nakayama 22.
- Tu Sjuj-jañ (Tu Syui-Yan) and Tej Luj-vy (Tei Lui-Vy) (Auto-oscillations in automatic control system) 335.
- Tulub, A. V. (Electron-phonon interaction) 229.
- Tungl, E. (Parallelogrammplatte mit Einzellast) 417.
- Turcotte, Donald L. (Combustion of a high-velocity gas) 199.
- Turekij (Turetsky), A. Ch. (A. Kh.) (Saturation class in Gelder's method) 43.
- Turri, Tullio („Regolarita" delle superficie) 374; (Trasformazioni birazionali dello spazio) 374.
- Tutaev, L. K. (Lobačevskijsche Geometrie) 166.
- Tverberg, Helge (Derivation of the information function) 134.
- Tzou, Kuo-Hsien (Chiralité des interactions) 220.
- Ueno, Sueo (Radiative transfer. IX, XI.) 454.
- Uhlenbeck, G. E. s. A. Pais 227.
- Ullman, J. L. (Tchebycheff polynomials) 48.
- Ul'm, S. (Konvergenz einiger Iterationsverfahren) 116; (Konvergenz des Verfahrens berührender Parabeln) 116; (Konvergenztheorie von Iterationsverfahren) 329.
- Ulrich, E. (Problem der Vergleichsspannungen) 408.
- Uluçay, Cengiz (Coefficients of schlicht functions) 51; (Inequalities of schlicht functions) 51.
- Umezawa, Hiroomi s. Hiroshi Ezawa 220.
- Urban, Alois (Théorème du contact des courbes) 379.
- Ursell, F., R. G. Dean and Y. S. Yu (Forced small-amplitude water waves) 438.
- Ušakova (Ushakova), I. V. (Uniqueness theorem for holomorphic functions) 53.
- Usoľcev, S. A. (Wärmeleitungsgleichung für einseitig unendlichen Stab) 305.
- Vajda, S. (Théorie des jeux) 161.
- Vajnberg (Vainberg), M. M. (Method of steepest descent for nonlinear equations) 113.
- Valcovič, Victor (Liaisons holonomes et non holonomes) 398.
- Val'dman, A. (Erzwungene Schwingungen eines Systems) 405.
- Valickij (Valitsky), Ju. N. (Y. N.) (Functions analytical in respect to integro-differential operators) 311.
- Valore jr., Rudolph C. s. Sam Spinner 423.
- Vartak, Manohar Narhar (Non-existence of certain PBIB designs) 150.
- Vasil'ev, Ju. L. (Ju. L.) (Minimum contact circuits for Boole's functions) 129.
- V. A. und D. F. Šul'gin (Zustrom von Infiltrationswasser) 439.
- Vauquois, B. s. J. W. Backus 125.
- Vedenov, A. A. and R. Z. Sagdeev (Plasma with anisotropic ion velocity distribution) 224.
- Vekua, I. N. (Verallgemeinerte analytische Funktionen) 57.
- Ventcel' (Wentzell), A. D. (Multidimensional diffusion processes) 134.
- Verblunsky, S. (Expansion in exponential series. II.) 43.
- Vere-Jones, D. and David G. Kendall (Commutativity problem) 139.
- Verlan, Nives Maria e Fulvia Skof (Struttura lacunare) 284.
- Verma, G. S. (Nuclear spin-lattice relaxation) 230.
- Vernotte, Pierre (Exécution de calculs numériques) 116.
- Vesentini, Edoardo (Compact Kähler varieties. I, II.) 381.
- Vetuchnovskij (Vetukhnovsky) F. Ja. (F. J.) (Undecomposable nets) 128.
- Vilenkin, N. Ja. (N. J.) (Group of real orthogonal matrices) 252; (Group of Lobachevsky space motions) 253.

- Vinogradov, A. I. (Application of $\zeta(s)$ to the sieve of Eratosthenes) 28.
 — I. M. (Obere Schranke für $G(n)$) 27.
 Vinokurov, V. R. (Vollerrasche Integralgleichungen zweiter Art. II.) 310.
 Vinti, John P. (Multipath propagation of frequency modulated waves) 204.
 Virabjan (Virabian), G. V. (Spectral equivalence of two operators) 306.
 Višik, M. I. s. P. S. Alexandroff 243.
 Vogler, H. (Aufgabe von Ottajano) 373.
 Volkin, Howard C. (Slow-neutron scattering) 214.
 Volta, Vittorio Dalla s. Dalla Volta, Vittorio 172.
 Voronov, A. A. und G. N. Sokolov (Digital integrator device for programming curves) 331.
 Vranič, Vladimir (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik) 130.
 Vyšin, Jan (Axiomensystem der Euklidischen Geometrie) 371.
Wada, Junzo (Positive linear functionals) 318.
 Wadhwa, Y. D. (Boundary layer growth on a spinning body) 434.
 Waelbroeck, L. (Algèbres du calcul symbolique) 319; (Algèbres commutatives) 319; (Calcul symbolique et ensembles bornés de fonctions rationnelles) 319; (Algèbres d'éléments réguliers) 320.
 Waerden, B. L. van der (Démonstration dans les sciences exactes de l'antiquité) 2.
 Wagner, Max s. Harald Stumpf 228.
 — T. C. Gordon (Analytical transients) 203.
 Wakita, Hitoshi (Measurement in quantum mechanics) 212; (Representations of field quantities. II.) 216.
 Walter, Wolfgang (Euler-Poisson-Darboux-Gleichung) 302.
 Walz, A. (Gemittelte Grenzschichtbedingungen nach v. Kármán) 432.
 Wang, Hao (Circuit synthesis by solving sequential Boolean equations) 247.
 Watanabe, Hisao and Minoru Motoo (Ergodic property of recurrent diffusion processes) 347.
 — Takesi (Markov processes) 346.
 Watson, G. S. (Sufficient statistics, similar regions and distribution-free tests) 353.
 — Kenneth M. s. Bernard A. Lippmann 214.
 Walsh, J. L. s. T. S. Motzkin 48.
 Wan, Zhe-xian (Commutator subgroup of the orthogonal group) 17.
 Ward, John C. s. Elliott W. Montroll 222.
 Wasiutyński, Zbigniew (Forming of transport systems) 161.
 Watson, B. C. s. H. W. Emmons 195.
 — W. K. R. (Ball lightning formation) 207.
 Wearden, Stanley s. Lorraine Schwartz 366.
 Weber, Erna (Ergebnis-Folge-Verfahren) 144.
 — J. (Gravitational waves) 444.
 Weeg, Gerard P. (Numerical integration) 123.
 Wegstein, J. H. s. J. W. Backus 125.
 Wehrmann, O. und R. Wille (Laminar-turbulenter Übergang im Freistrah) 432.
 Weichselberger, K. (Parameterschätzung bei Kontingenztafeln. II.) 359.
 Weier, Joseph (Résultat de M. J. P. Serre) 392.
 Weinberger, H. F. (Forced-vibration problems) 84.
 Weiner, J. H. s. H. G. Landau 422.
 Weiss, Lionel (Functions of sample spacings) 135; (Test of fit for multivariate distributions) 354.
 — P. R. s. B. D. Silverman 229.
 Weisskopf, Victor F. (Meson-nucleon scattering) 219.
 Wells, Franklin B. and Edward H. Cutler (Modification of a figure) 167.
 Wermer, John (Subalgebra of $L(-\infty, \infty)$) 107.
 Werner, Helmut (Surfaces of constant mean curvature) 379.
 Wesler, Oscar (Classification problem involving multinomials) 145; (Invariance theory) 145.
 Weston, J. D. (Operational calculus and generalized functions) 99; (Theorems on cluster sets) 175; (Convergence of monotonic sequences in vector spaces) 313.
 — V. H. (Toroidal wave functions) 46.
 Wetherill, G. B. (Most economical sequential sampling scheme) 351.
 Wetterling, W. (Einschließungssatz von Kryloff-Bogoliubov) 294.
 Whaples, G. s. B. Buzby 11.
 Whitham, G. B. s. D. S. Jones 205.
 Whitney, D. Ransom (Mathematical statistics) 144.
 — Hassler (Bounded functions) 276.
 Whittle, P. (Curve and periodogram smoothing) 357.
 Whyburn, G. T. (Convergence of mappings) 387.
 Wiener, N. s. P. Masani 340.
 — Norbert and Aurel Wintner (Non-vanishing of Euler products) 286.
 Wijngaarden, A. van s. J. W. Backus 125.
 Wijsman, Robert A. (Incomplete sufficient statistics) 146; (Theory of BAN estimates) 147.
 Wilder, R. L. (Axiomatics and development of creative talent) 1.
 Wilf, Herbert S. s. Anthony Ralston 126.
 Wilkes, M. V. (Second decade of computer development) 125.
 Wilkinson, John W. (Analysis of paired comparison designs) 149.
 Wille, R. s. O. Wehrmann 432.
 Williams, K. B. and K. B. Haley (Linear programming in mining industry) 367.
 Wilson, R. (Hadamard composition with algebraic-logarithmic singularities) 285.
 Wintner, Aurel s. Norbert Wiener 286.
 Wit, G. M. de s. J. C. G. Boot 368.
 — Roland de (Self-energy of a helical dislocation) 409.
 Witt, Bryce S. de (Invariant commutators for quantized gravitational field) 210.
 Witting, Hermann (Stabilität laminarer Strömungen) 194.
 Wolf, E. (Partially polarized electromagnetic radiation) 203.

- Wolff, P. A. (Electron correlation on optical properties of metals) 230.
- Wolfowitz, J. (Coding theorem for semicontinuous channels) 339.
- Wolk, E. S. (Order-compatible topologies) 19.
- Woll jr., John W. (Homogeneous stochastic processes) 138.
- Wong, David Y. and John S. Toll (Causality and the dispersion relation) 205.
- Woodger, M. s. J. W. Backus 125.
- Wormleighton, R. (Tests of permutation symmetry) 147.
- Wrench jr., J. W. s. Daniel Shanks 41.
- Wright, G. H. von (Heterological paradox) 244.
- Wunsch, Gerhard (Theorie der linearen Netzwerke) 128.
- Wyss, Hans (Solvabilität einer Lebensversicherungsgesellschaft?) 369.
- Yajima, S. (Théorie nébulaire de Shizuki) 241.
- Yang, C. N. s. T. D. Lee 227.
- Chao-hui (Integrability of functions) 44.
- Yen, Chih-ta (Classification des algèbres de Lie) 258; (Automorphismes d'une algèbre de Lie) 258.
- Yennie, D. R. s. S. G. Gasiorowicz 217.
- Donald R. s. Leslie L. Foldy 215.
- Yevdjevich, Vujica M. (Differential equation for water storage) 200.
- Yokota, Ichiro s. Hiroshi Toda 181.
- Yoler, Y. A. s. F. D. Hains 197.
- Yoshizawa, Taro (Equi-ultimate boundedness of solutions of $x' = F(t, x)$) 296.
- Young, G. S. s. C. J. Titus 67.
- Yu, Y. S. s. F. Ursell 438.
- Zacharov (Zakharov), V. K. (First boundary-value problem for elliptical equations) 81.
- Zagorskij (Zagorsky), T. Ja. (T. J.) (Parabolic systems of differential equations) 74.
- Zaguskin, V. L. (Ellipsoide extremalen Inhalts) 174.
- Zaidman, S. (Perturbation presque-périodique des groupes) 327.
- Zaikina, N. G. (Verteilung der Zahlen, die aus kleinen Primidealen bestehen) 24.
- Zakon, Elias (Multiples of transfinite numbers) 270.
- Zakrevskij (Zakrevskii), A. D. (Synthesizing functionally stable automatic mechanisms) 128.
- Zamansky, Marc (Construction des espaces L^p) 90.
- Zapałowicz, Wiesław (Torsion of prismatic bars) 414.
- Zaremba, S. K. s. Z. A. Lomnicki 356.
- Žautykov, O. A. (Ein abzählbares System von Differentialgleichungen) 65; (Lineare partielle Differentialgleichung) 71.
- — — und M. V. Pentkovskij (Entwicklungsfragen der mathematischen Wissenschaft) 1.
- Zel'dovič (Zel'dovich), Ja. B. (Ya. B.) and E. M. Rabinovič (Rabinovich) (Applicability of statistical formulas to a degenerate Fermi gas) 450.
- Želudev, P. I. (Überschallumströmung dünner Rotationskörper) 429.
- Zemanek, Heinz (Elementare Informationstheorie) 132.
- Zerner, Martin (Support de la solution d'un problème de Cauchy) 301.
- Zeyen, Günter s. Eberhard Liebel 163.
- Ziegler, Hans (Mechanik. I.) 398.
- Ziamba, Stefan s. Janisław Skowroński 398.
- Zierner, Jürgen (Langer Ringflügel in Überschallströmung) 428.
- Zil'berman, G. E. (Motion of an electron in a crystal) 229.
- Zinger, A. A. (Independence of quasi-polynomial statistics) 362.
- Zinočev, Vl. A. (Mechanismen und Maschinen) 406.
- Zitek, František (Burkilsche Integrale) 272; (Intégrale) 338.
- Zlámál, Miloš (Mixed problem for hyperbolic equations) 73; (Erste Randwertaufgabe für singular perturbierte elliptische Differentialgleichung) 81; ($\ddot{y} + y = \dot{y}^2$) 300.
- Zolotarev, V. M. (Theorems of branching processes) 342.
- Zubov, V. I. (Stability regions for an automatic control system) 297.
- Zwicky jr., E. E. s. H. G. Landau 422.